NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE.

Deel III.

AMSTERDAM,
WEYTINGH & BRAVE,
1877.

De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.

DE REDACTEUR,

LEIDEN, September 1877. D. BIERENS DE HAAN,

Eerste Secretaris van het Genootschap,
onder de zinspreuk:
EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

INHOUD.

Kleinere Mededeelingen.

INHOUD.

OVER DE AFZONDERLIJKE INTEGRALEN DER DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN VAN DE EERSTE ORDE, MET TWEE VERANDERLIJKEN,

DOOR

CORNEILLE L. LANDRÉ.

Afleiding uit de algemeene integraal.

1. Van de meest gebruikelijke leerboeken over de hoogere analysis geven DIENGER's *Differential- und Integralrechnung* en BOOLE's *Treatise on differential equations* bovengenoemde theorie het volledigst.

2. Als van eene differentiaal-vergelijking der eerste orde de algemeene integraal $F(x, y, c) = 0$ is, zoo stelt zich SCHLÖMILCH (*Compendium der höheren Analysis*) tevreden met te zeggen, dat de afzonderlijke integralen gevonden worden door c te elimineeren tusschen $F(x, y, c) = 0$ en $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$. STURM (*Cours d'analyse*) en DUHAMEL (*Éléments de calcul infinitésimal*) bewijzen, dat $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$ ook afzonderlijke integralen kan geven; maar verzuimen daarbij te spreken van $\frac{\partial F}{\partial x}$. DIENGER beweert, dat alle afzonderlijke integralen gevonden worden uit $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ en $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$, of uit $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ en $\frac{\partial F}{\partial x} = \infty$; latende het dus onverschillig, welk der beide stelsels men gebruiken wil; hetgeen echter onjuist is.

Het kenmerk $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ of $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$ volgt, als men de willekeurige standvastige c beschouwt als functie van x; maar als c werkelijk eene functie is van x *alleen*, en men substitueert die functie voor c

in $F(x, y, c) = 0$, moet de uitkomst der substitutie noodzakelijk y bevatten (de x kan verdwijnen); zoodat in het geval, dat c werkelijk eene functie is van x alleen, die substitutie nooit eene afzonderlijke integraal kan geven van den vorm $x = a$ (a eene bepaald aangewezen, dus geen willekeurige, standvastige). Dit neemt niet weg, dat, al beschouwt men c als functie van x alleen, c afgeleid uit $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ of uit $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$ toch wel y kan bevatten; en dit zal zelfs meestal het geval zijn; c stellen als functie van x, wil hier eenvoudig zeggen, dat y als standvastig is beschouwd bij het differentieeren van c ten opzichte van x; zoodat eene afzonderlijke integraal $x = a$ zich ook wel kan zichtbaar maken uit een der beide kenmerken $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ of $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$. Maar het doet zich toch ook dikwijls voor, dat men voor c werkelijk eene functie vindt van x alleen; het is dus in ieder geval mogelijk, dat men éene of meer afzonderlijke integralen van den vorm $x = a$ over het hoofd ziet, door zich te beperken bij de kenmerken $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$, $\frac{dF}{dy} = \infty$.

3. Om zeker te zijn, dat men geen afzonderlijke integralen voorbij ziet, is het dus noodzakelijk, c ook te beschouwen als functie van y. Dit laat zich aldus behandelen.

De differentiaal-vergelijking wil ik voorstellen onder den vorm $f\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right) = 0$, en de algemeene integraal door $F(x, y, c) = 0$.

Beschouwt men c als standvastig, dan volgt uit $F = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} = 0, \text{ dus } \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}};$$

uit deze en uit $F = 0$ heeft men c te elimineeren, om de differentiaal-vergelijking te verkrijgen.

Beschouwt men c als functie van y, dan heeft men

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dy}; \text{ dus } \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} - \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \frac{dc}{dy};$$

zal nu deze uitdrukking voor $\frac{dx}{dy}$ voldoen aan de differentiaal-verge-

lijking, zoo moet $\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial x}}\frac{dc}{dy}=0$; $\frac{dc}{dy}=0$ geeft de algemeene integraal; maar de afzonderlijke integraal komt, (als er eene bestaat, die uit de algemeene integraal volgt, door daarin c te beschouwen als functie van y) door te stellen $\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=0$; dus $\frac{\partial F}{\partial c}=0$ of $\frac{\partial F}{\partial x}=\infty$.

Bestaat er nu eene afzonderlijke integraal $x=a$, zoo moet zij zich door een dezer twee kenmerken zichtbaar maken; daarentegen kan nu weder eene afzonderlijke integraal, $y=$ standvastig, worden voorbij gezien.

4. Het volledig kenmerk voor de afleiding der afzonderlijke integralen uit de algemeene integraal is derhalve

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=0, \text{ en } \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial x}}=0;$$

welke wel in de meeste, maar niet in alle gevallen, dezelfde afzonderlijke integralen zullen leveren. De veranderlijke c, die $\frac{\partial F}{\partial y}=\infty$ maakt, maakt ook meestal $\frac{\partial F}{\partial x}=\infty$.

Is $\frac{\partial F}{\partial y}=\infty$ voor eene c, die noch $\frac{\partial F}{\partial x}$, noch $\frac{\partial F}{\partial c}$ oneindig maakt; zoo is $\frac{dy}{dx}=0$. Dan bestaat dus de afzonderlijke integraal $y=a$, als zij voldoet aan de differentiaal-vergelijking en niet uit de algemeene integraal is af te leiden, door daarin aan c zekere standvastige waarde te geven, en dus geen bijzondere integraal is. Welke dan de a is, wordt door de veranderlijke c uitgemaakt.

Omgekeerd, als, voor zekere veranderlijke c, $\frac{\partial F}{\partial x}=\infty$, zonder dat dit het geval is met $\frac{\partial F}{dy}$, noch met $\frac{\partial F}{\partial c}$, zoodat $\frac{dx}{dy}=0$ is; zoo kunnen er éene of meer afzonderlijke integralen $x=$ standvastig aanwezig zijn.

Het behoeft nauwelijks vermelding, dat, als $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ of $\dfrac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ zich voordoen onder den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$ of $\frac{\infty}{\infty}$, er een afzonderlijk onderzoek noodig is, om uit te maken of die uitdrukkingen voor zekere c nul kunnen zijn.

5. Differentieert men $F(x, y, c)$ partieel ten opzichte van y en x, zoo komt
$$\frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dc} = 0, \text{ en } \frac{\partial F}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dc} = 0;$$
dus
$$\frac{dy}{dc} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \text{ en } \frac{dx}{dc} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial x}};$$
zoodat alle afzonderlijke integralen geleverd worden door $\frac{dy}{dc} = 0$ en $\frac{dx}{dc} = 0$.

Deze beide laatste kenmerken laten zich zonder bezwaar onmiddellijk afleiden (zoo als dan ook gedaan wordt door Boole en Dienger), als men de algemeene integraal schrijft onder de vormen $y = f(x, c)$ of $x = f(y, c)$; echter doet alleen Boole opmerken, dat soms beide kenmerken noodig zijn, en noemt deze de grondvoorwaarden (*fundamental conditions*) voor afzonderlijke integralen.

Boole zegt met nadruk, dat de afzonderlijke integralen, die alleen y bevatten, enkel kunnen voortkomen uit $\frac{dy}{dc} = 0$; terwijl de afzonderlijke integralen, waarin y niet voorkomt, alleen kunnen komen uit $\frac{dx}{dc} = 0$. Dit is zeker het geval, als, om $\frac{dy}{dc}$ te bepalen, de algemeene integraal is op te lossen ten opzichte van y, en dus den vorm $y = f(x, c)$ kan verkrijgen; want dan kan $\frac{dy}{dc} = 0$ geen y bevatten, zoodat dan c een functie is van x alleen; de afzonderlijke integraal moet dus y bevatten. Kan men evenzoo de algemeene integraal oplossen ten opzichte van x, dan geeft $\frac{dx}{dc} = 0$ afzonderlijke integralen, die noodzakelijk x bevatten. Zijn er dus afzonderlijke integralen,

die alleen y bevatten, zoo moeten die komen uit $\frac{dy}{dc} = 0$; en zijn er afzonderlijke integralen, die alleen x bevatten, zoo moeten die komen uit $\frac{dx}{dc} = 0$. Zijn er zulke afzonderlijke integralen niet, dan geven $\frac{dy}{dc} = 0$ en $\frac{dx}{dc} = 0$ dezelfde afzonderlijke integralen.

Dit alles is m. i. ook alleen dan altijd waar, als de algemeene integraal werkelijk ten opzichte van y en x is op te lossen. Immers als $\frac{dy}{dc}$ moet bepaald worden uit de vergelijking $F(x, y, c) = 0$, waarin y in het algemeen eene ingewikkelde functie is van x en c, dan zullen $\frac{dy}{dc} = 0$ en $\frac{dx}{dc} = 0$ in het algemeen x en y bevatten, en zal dus de c, uit elk afgeleid, in den regel eene functie zijn zoowel van x als van y.

Derhalve is het zeer mogelijk, dat zoowel $\frac{dy}{dc} = 0$ als $\frac{dx}{dc} = 0$ (afgeleid uit $F(x, y, c) = 0$) elk op zich zelf alle afzonderlijke integralen leveren, ook die van den vorm $y =$ standvastig, of $x =$ standvastig.

6. Bij elke afzonderlijke integraal, die men vermoedt, uit welk kenmerk dan ook, moet echter steeds onderzocht worden, of wellicht de gevondene oplossing eene bijzondere integraal is; dat is, of zij ook uit de algemeene integraal volgt, door aan c eene standvastige waarde toe te kennen. Dit doet men het geschiktst door x te elimineeren tusschen de gevonden oplossing en de algemeene integraal; vindt men dan voor c eene standvastige waarde, zoo is de oplossing eene bijzondere integraal, en vindt men voor c eene functie van y, zoo is de oplossing eene afzonderlijke integraal.

Meetkundige beteekenis.

7. Dat de afzonderlijke integraal de vergelijking is der omhullende van de krommen, voorgesteld door de algemeene integraal, volgt terstond, als zij gegeven is door $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$; op zich zelf is het niet zoo duidelijk, dat $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$ ook zulke omhullenden levert. Dat dit ech-

ter ook dan het geval is, blijkt uit de kenmerken $\frac{dy}{dc} = 0$ en $\frac{dx}{dc} = 0$, als de algemeene integraal is opgelost ten opzichte van y of x.

Bovendien volgt dit zeer gemakkelijk uit een meetkundige beschouwing, zooals DIENGER dit uitvoerig, en STURM kort, aantoont. Laat eene bijzondere integraal (of juister gezegd de kromme, door haar voorgesteld) gesneden worden door eene naburige integraal, ontstaan door verandering van de willekeurige standvastige c; in het snijpunt (of in elk der snijpunten, zoo er meer zijn) heeft $\frac{dy}{dx}$ eene verschillende waarde voor elk der beide bijzondere integralen; naderen de twee naburige bijzondere integralen elkander (door de verandering van c tot nul te doen naderen), dan nadert het snijpunt tot een grenspunt op de kromme, in hetwelk de beide waarden van $\frac{dy}{dx}$ in elkander overgaan. Nu heeft elke bijzondere integraal zulk een grenspunt, welks meetkundige plaats de omhullende is van de bijzondere integralen; want zij raakt al de bijzondere integralen. Zij heeft dus in het raakpunt met eene bijzondere integraal dezelfde waarde van $\frac{dy}{dx}$ als deze, en voldoet dus even goed aan de differentiaal-vergelijking.

Het is hieruit tevens duidelijk, dat de afzonderlijke integraal geen willekeurige standvastige kan hebben, omdat zij een bepaald aangewezen kromme voorstelt. Wijl twee elkander naderende bijzondere integralen elkander in meer dan éen punt kunnen snijden, kunnen er ook meer afzonderlijke integralen aanwezig zijn, voor elk der snijpunten éen. Voorts is het duidelijk, dat niet elke differentiaal-vergelijking afzonderlijke integralen heeft; zoo is dat b. v. onmogelijk, als de algemeene integraal gelijkmiddelpuntige cirkels voorstelt, zooals dan ook terstond volgt uit de vergelijking $x^2 + y^2 = c$.

DIENGER leidt uit deze beschouwingswijze terstond af, dat de differentiaal-vergelijking geen andere oplossingen kan hebben dan de algemeene en de aldus bepaalde afzonderlijke integralen; zooals dit dan ook gevolgd is uit de kenmerken $\frac{dx}{dc} = 0$, $\frac{dy}{dc} = 0$.

Uit deze gevolgtrekking volgt m. i., dat de theorie der omhullenden, zooals die in de leerboeken wordt gegeven, nog lijdt aan onvolledigheid; en dat de omhullende van $F(x, y, c) = 0$ niet alleen behoeft te ontstaan uit de eliminatie van c tusschen $F = 0$ en

$\frac{\partial F}{\partial c} = 0$; maar dat er ook omhullenden kunnen ontstaan door c te elimineeren tusschen $F = 0$ en $\frac{\partial F}{\partial y} = \infty$, of tusschen $F = 0$ en $\frac{\partial F}{\partial x} = \infty$.

Afleiding uit de differentiaal-vergelijking.

8. De verschillende handelwijzen om de afzonderlijke integralen uit de differentiaal-vergelijking af te leiden, dus zonder de algemeene integraal te kennen, zal ik kort nagaan, en mij daarbij eenige opmerkingen veroorloven. Zoowel BOOLE als DIENGER gaan daarbij uit van de kenmerken $\frac{dy}{dc} = 0$ en $\frac{dx}{dc} = 0$.

DIENGER begint met de algemeene integraal te onderstellen in den vorm $y = f(x, c)$ (1), waaruit volgt $\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}$; stelt men nu $\frac{dy}{dx} = p$, zoo zullen we schrijven $p = f'(x, c)$ (2); om nu de differentiaal-vergelijking terug te bekomen, heeft men c te elimineeren tusschen (1) en (2).

Beschouwt men intusschen c als veranderlijk, functie van x en y, zoo komt door (2) partieel te differentieeren ten opzichte van x en y,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial x} + \frac{\partial f'}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dx} \text{ (3) en } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dy} \text{ (4)};$$

maar uit (1) volgt

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dx} \text{ (5) en } 1 = \frac{\partial f}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dy} \text{ (6).}$$

Substitueert men nu $\frac{dc}{dx}$ uit (5) in (3), en $\frac{dc}{dy}$ uit (6) in (4), zoo komt

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f'}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial c} - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f'}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial c}} \text{ (8) en } \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f'}{\partial c}}{\frac{\partial f}{\partial c}} \text{ (9).}$$

Nu is blijkbaar $\frac{\partial f}{\partial c}$ niet anders dan $\frac{dy}{dc}$.

De afzonderlijke integralen, geleverd door $\frac{dy}{dc} = 0$, maken dus in het algemeen $\frac{\partial p}{\partial x} = \infty$ en $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$; zoodat men hierin twee ken-

merken heeft ter afleiding van de afzonderlijke integralen onmiddellijk uit de differentiaal-vergelijking.

Is intusschen ook de teller van (8) nul (hetgeen in het voorbijgaan gezegd, plaats heeft, wanneer $f'(x, c)$ eene functie is van $f(x, c)$ alleen), zoo is $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{0}{0}$, zoodat men ook nu afzonderlijke integralen vermoeden mag. Evenzoo kan $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{0}{0}$ afzonderlijke integralen leveren.

Het is dus nog twijfelachtig, of BOOLE geheel recht heeft bij het verwerpen van het kenmerk $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{0}{0}$ (van CAUCHY).

9. BOOLE komt tot het kenmerk $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$ op de volgende wijze. Uitgaande van het kenmerk $\frac{dy}{dc} = 0$, stelt hij $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dy}$, waarin y als functie van c wordt beschouwd in de algemeene integraal $y = f(x, c)$; dus

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \frac{dy}{dx}}{\partial c} : \frac{dy}{dc} = \frac{\partial \frac{dy}{dc}}{\partial x} : \frac{dy}{dc} = \frac{\frac{\partial \frac{dy}{dc}}{\frac{dy}{dc}}}{\partial x} = \frac{\partial \log \frac{dy}{dc}}{\partial x}.$$

Stelt men $\frac{dx}{dy} = p'$, zoo is de differentiaal-vergelijking ook te beschouwen als ontstaan uit de eliminatie van c tusschen de algemeene integraal $x = f(y, c)$ en $p' = \frac{\partial f}{\partial y}$; terwijl voor de laatste zal geschreven worden $p' = f'(y, c)$.

Nu is

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dx} = \frac{\partial \frac{dx}{dy}}{\partial c} : \frac{dx}{dc} = \frac{\partial \frac{dx}{dc}}{\partial y} : \frac{dx}{dc} = \frac{\frac{\partial \frac{dx}{dc}}{\frac{dx}{dc}}}{\partial y} = \frac{\partial \log \frac{dx}{dc}}{\partial y}.$$

Er is dus verkregen

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \log \frac{dy}{dc}}{\partial x} \quad \text{en} \quad \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial \log \frac{dx}{dc}}{\partial y}.$$

Als nu $\frac{dy}{dc} = 0$ is, dus $\log \frac{dy}{dc} = \infty$ (afgezien van het teeken);

dan zal meestal $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$ zijn. Ik zeg *meestal*, immers zij $m = \frac{1}{f(n)}$, zoo is $dm = -\frac{f'(n)}{(f(n))^2} dn = -\frac{f'(n)}{f(n)} \times \frac{1}{f(n)} dn$. Is nu $f(n) = 0$ voor zekere waarde van n, dus $\frac{1}{f(n)} = \infty$; dan is ook $dm = \infty$, mits niet te gelijkertijd, hetgeen bij uitzondering kan plaats hebben, $\frac{f'(n)}{f(n)} = \infty$ zij, welke uitdrukking in den regel een eindige waarde heeft. Is namelijk n een abscis, q de overeenkomstige ordinaat, zoo stelt $q = f(n)$ eene kromme voor; en dan is voor $f(n) = 0$, $f'(n)$ de richtings-tangens voor de raaklijn in het punt (of de punten), waar de kromme de n — as snijdt, welke tangens alleen dan nul is, als de kromme de n — as raakt.

Zoo zou dan ook $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\infty}{\infty}$, of wat door verandering van schrijfwijs ook worden kan $\frac{0}{0}$, afzonderlijke integralen kunnen doen vermoeden. Wat Boole zegt, ter beweering, dat $\partial \log \frac{dy}{dc}$ altijd oneindig is, als $\frac{dy}{dc} = 0$ is, schijnt mij niet streng genoeg; bovendien in verband met het bewijs van Dienger, komt het mij voor, dat hier het recht is aan de zijde van dezen.

Intusschen, als omgekeerd $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$ of onbepaald is, is men nog niet zeker, altijd afzonderlijke integralen te ontmoeten, omdat ook $\frac{dy}{dc} = \infty$ voeren kan tot $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\infty}{\infty}$ en daarom ook tot $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$.

Op geheel dezelfde wijze toont men aan, dat $\frac{\partial p'}{\partial x} = \infty$, of $=$ onbepaald, het bestaan van afzonderlijke integralen kan doen vermoeden. Dat de kenmerken, $\frac{\partial p'}{\partial x} = \infty$ en $\frac{\partial p}{\partial x} = \infty$, meestal dezelfde afzonderlijke integralen leveren, laat zich zeer gemakkelijk aantoonen.

Namelijk is $\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial \frac{dx}{dy}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{p}}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial p}{p^2}}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \times \frac{1}{p^2}$.

Als nu (voor zekere c) p oneindig wordt (en dus $x =$ standvastig eene afzonderlijke of eene bijzondere integraal is), geven $\frac{\partial p}{\partial x} = \infty$ en $\frac{\partial p'}{\partial x} = \infty$ niet noodzakelijk dezelfde afzonderlijke integralen; in elk ander geval heeft dit wel plaats.

Zijn deze redeneeringen juist, zoo vindt men alle afzonderlijke integralen uit $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$, of $=$ onbepaald; en uit $\frac{\partial p'}{\partial x} = \infty$, of $=$ onbepaald.

10. Het verdient opmerking, dat het kenmerk $\frac{\partial p'}{\partial x} = \infty$, of onbepaald, even gemakkelijk af te leiden is volgens de methode van Dienger, als het kenmerk $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$, of $=$ onbepaald.

Stellen wij, dat de algemeene integraal is $x = f(y, c)$ (1), en stellen wij $\frac{dx}{dy} = p'$, zoo zullen wij schrijven $p' = f'(y, c)$ (2); de differentiaal-vergelijking ontstaat nu, door c te elimineeren tusschen (1) en (2).

Beschouwt men c als veranderlijk, zoo geeft (2)

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{\partial f'}{\partial y} + \frac{\partial f'}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dy} \;(3) \text{ en } \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial f'}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dx} \;(4).$$

Uit (1) volgt $0 = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dy}$ (5) en $1 = \frac{\partial f}{\partial c} \cdot \frac{dc}{dx}$ (6).

Substitueert men $\frac{dc}{dy}$ uit (5) in (3), en $\frac{dc}{dx}$ uit (6) in (4), zoo heeft men

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f'}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial c} - \frac{\partial f'}{\partial c} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial c}} \;(7) \text{ en } \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\frac{\partial f'}{\partial c} \cdot \frac{\partial c}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial c}} \;(8).$$

$\frac{\partial f}{\partial c}$ is niet anders dan $\frac{dy}{dc}$; en dus, voor de afzonderlijke integraal gegeven door $\frac{dy}{dc} = 0$, zal $\frac{\partial p'}{\partial y} = \infty$ of onbepaald, en $\frac{\partial p'}{\partial x} = \infty$ of onbepaald zijn; welke weder beiden in den regel dezelfde afzonderlijke integralen zullen leveren, en zelfs dezelfde, als $\frac{\partial p}{\partial y}$ of $\frac{\partial p}{\partial x} = \infty$ of onbepaald.

De differentiaal-vergelijking is intusschen in den regel gegeven in

den vorm $\phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, of $\phi(x, y, p) = 0$; om $\frac{\partial p}{\partial y}$ te bepalen heeft men dus $\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial p}}$; waaruit volgt dat $\frac{\partial \phi}{\partial p} = 0$ voldoende kan zijn tot het opsporen der afzonderlijke integralen; maar $\frac{\partial \phi}{\partial y} = \infty$ kan ook noodig zijn.

Op dergelijke wijze toont men aan, dat, als men de differentiaal-vergelijking schrijft $\psi(x, y, p') = 0$, waarin $p' = \frac{dx}{dy}$, $\frac{\partial \psi}{\partial p'} = 0$, of $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \infty$, de afzonderlijke integralen zullen leveren.

11. Bij Duhamel en Schlömilch vindt men, bij hun afleiding der afzonderlijke integralen uit de differentiaal-vergelijking, $\frac{\partial \phi}{\partial p} = 0$ als het eenige kenmerk opgegeven, waartoe zij geraken door in acht te nemen, dat voor de omhullende der bijzondere integralen, minstens twee verschillende uitdrukkingen voor p moeten gelijk worden, omdat twee elkaar naderende bijzondere integralen in het grenspunt van het snijpunt dezelfde p moeten hebben, welke dus ook tot de omhullende behoort.

Dit meetkundig bewijs toont, dat het kenmerk $\frac{\partial \phi}{\partial p} = 0$ tot het opsporen van afzonderlijke integralen, de differentiaal-vergelijking onderstelt in den vorm $\phi = \{p - f(x, y)\}^2 F(x, y, p)$; dan is

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = 2\{p - f(x, y)\} F(x, y, p) + \{p - f(x, y\}^2 \frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p};$$

hetwelk inderdaad $= 0$ is voor $p = f(x, y)$; welke eene afzonderlijke integraal geven kan door eliminatie van p tusschen deze en de differentiaal-vergelijking.

Als een eenvoudig voorbeeld, dat $\frac{\partial \phi}{\partial p} = 0$ niet voldoende is, kies ik de volgende oefening van Sturm.

De differentiaal-vergelijking zij $x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$; de algemeene integraal is $y + c = \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$, of $F(x, y, c) = 0$; het kenmerk $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ geeft de afzonderlijke integraal $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

Stelt men $\frac{dy}{dx}=p$, zoo is de differentiaal-vergelijking

$$\phi(x, y, p)=p\sqrt{x^2+y^2-a^2}-py-x=0;$$

$\frac{\partial\phi}{\partial p}$ is nu $\sqrt{x^2+y^2-a^2}-y$, zoodat $\frac{\partial\phi}{\partial p}=0$ geeft $x^2-a^2=0$, eene bijzondere integraal, volgende uit de algemeene integraal, door daarin te nemen $c=0$.

Daarentegen $\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{py}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}-p$, dus $\frac{\partial\phi}{\partial y}=\infty$ geeft nu werkelijk de afzonderlijke integraal $x^2+y^2-a^2=0$.

Het ongenoegzame van het door SCHLÖMILCH en DUHAMEL als eenig aangewezen kenmerk $\frac{\partial\phi}{\partial p}=0$ is, dunkt mij, hierdoor volkomen aangetoond. Dit neemt niets weg van de waarheid, dat door de afzonderlijke integralen twee waarden van $\frac{dy}{dx}$, die voor elk ander punt (de bijzondere integralen door krommen voorgesteld) ongelijk zijn, in elkander overgaan. Lost men namelijk $\frac{dy}{dx}=p$ uit de differentiaal-vergelijking op, zoo komt $p=\frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2-a^2}-y}$; het dubbele teeken van de worteluitdrukking wijst nu op twee verschillende waarden van p, voor dezelfde x en y, welke twee waarden alleen dan gelijk worden, als $x^2+y^2-a^2=0$ is, d. i. voor het punt, dat behoort tot de omhullende, de afzonderlijke integraal.

Schrijft men daarentegen de vergelijking in meetbaren vorm door het wortelteeken te verdrijven, zoo komt achtereenvolgens

$$p\sqrt{x^2+y^2-a^2}=py+x,\quad p^2(x^2+y^2-a^2)=p^2y^2+2pxy+x^2,$$

$$\text{of}\quad p^2(x^2-a^2)-2pxy-x^2=0=\phi(x, y, p)=0\quad (1).$$

Nu is
$$\frac{d\phi}{dp}=2p(x^2-a^2)-2xy;$$

$\frac{\partial\phi}{\partial p}=0$ geeft dus $p=\frac{xy}{x^2-a^2}$; substitueert men deze p in (1), zoo komt $\frac{x^2y^2}{x^2-a^2}-\frac{2x^2y^2}{x^2-a^2}-x^2=0$; waaraan nu inderdaad de afzonderlijke integraal $x^2+y^2-a^2=0$ voldoet.

12. Vermoedt men eene afzonderlijke integraal uit de differentiaal-vergelijking, zoo moet nog steeds onderzocht worden, of zij niet eene bijzondere integraal is.

DIENGER geeft een zeer praktisch middel aan, om dit na te gaan, zonder zijn toevlucht te nemen tot de algemeene integraal, waarvan het bepalen in eindigen vorm dikwijls geheel onmogelijk is.

Hij merkt namelijk op, dat de afzonderlijke integraal wel aan de differentiaal-vergelijking voldoet; maar haar niet vervangen kan. De algemeene integraal is te noemen identisch met de differentiaal-vergelijking, alleen in anderen vorm; de afzonderlijke integraal voldoet er, in zekeren zin, bij toeval ook aan.

Derhalve kunnen niet *alle* vergelijkingen uit de afzonderlijke integraal afgeleid door opvolgende differentiatiën, aan de differentiaal-vergelijking voldoen.

Een eenvoudig voorbeeld moge dit ophelderen.

De differentiaal-vergelijking der kromme, die een normale heeft van standvastige lengte, is

$$y^2 + y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^2 \quad . \; . \; . \; (1).$$

Blijkbaar wordt hieraan voldaan door $y = a$ (2), want voor $y = a$, is $\frac{dy}{dx} = 0$. Het is de vraag, of dit eene bijzondere of eene afzonderlijke integraal is. Differentieert men (1) zoo komt

$$y\frac{dy}{dx} + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + y^2\frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \text{ of } y\frac{dy}{dx}\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0;$$

zoodat voor eene bijzondere integraal $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y}$. (3)

Uit de integraal $y = a$, volgt intusschen $\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, hetwelk niet voldoet aan (3). Daarom is $y = a$ een afzonderlijke integraal.

13. BOOLE spreekt nog van twee soorten afzonderlijke integralen, afgeleid uit $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$, welke hij niet brengt tot de bijzondere integralen, en ook niet tot de gewone afzonderlijke integralen; welke laatste hij daarom noemt afzonderlijke integralen van de soort der omhullenden (*singular solutions of the envelope species*).

Het komt mij het geschiktst voor, de voorbeelden te bespreken, welke BOOLE zelf aanhaalt van afzonderlijke integralen, die niet zouden behooren tot de soort der omhullenden.

Hij neemt de differentiaal-vergelijking $p = \frac{y \log y}{x}$, waaruit

$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{x}(1 + log y)$, hetgeen oneindig is voor $y = 0$, welke voldoet aan de differentiaal-vergelijking. Immers $y \, log \, y = \frac{log \, y}{\frac{1}{y}}$; voor $y = 0$ wordt deze uitdrukking $\frac{\infty}{\infty}$; en men heeft nu eenvoudig den teller en den noemer op zich zelven te differentieeren, om de waarde der onbepaalde uitdrukking te verkrijgen; zij wordt dan $\frac{\frac{1}{y}}{-\frac{1}{y^2}} = -y = 0$; het tweede lid der differentiaal-vergelijking is nu nul, en het eerste lid is nul, want $dy = 0$ voor $y = 0$.

Nu is de algemeene integraal $y = e^{cx}$; de integraal $y = 0$ volgt dus uit de algemeene, als men stelt $e^{cx} = 0$, dus alleen als $cx = -\infty$; en nu wordt hieraan wel voldaan door een oneindige (dus standvastige) waarde van c; maar de waarde van c is niet geheel onafhankelijk van x, immers als x positief is, moet men nemen $c = -\infty$, en is x negatief, zoo moet $c = +\infty$ genomen worden; dus heeft men, zegt Boole, in $y = 0$ niet een bijzondere integraal in den strengen zin van het woord; en daarom rekent hij $y = 0$ niet tot de gewone bijzondere integralen.

Hierbij veroorloof ik mij intusschen eene opmerking. Schrijft men de algemeene integraal $e^{cx} - y = 0 = F(x, y, c)$; tracht men hieruit de afzonderlijke integraal af te leiden, zoo komt $\frac{\partial F}{\partial c} = xe^{cx}$, zoodat $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ ook levert $e^{cx} = 0$, d. i. $y = 0$; bovendien uit $y = e^{cx}$ volgt $p = ce^{cx}$ dus $p = cy$; derhalve voor $y = 0$ is ook $p = 0$, bij willekeurige waarde van c; dat is de lijn $y = 0$ is raaklijn aan elk der bijzondere integralen; $y = 0$ volgt derhalve uit het kenmerk $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$, en is bovendien omhullende der bijzondere integralen. Het komt mij daarom voor, dat, als $y = 0$ niet is te rekenen tot de gewone bijzondere integralen, zij dan toch zeker behoort tot de gewone afzonderlijke integralen.

Men kan nog opmerken, dat $\frac{\partial p}{\partial y}$ ook oneindig wordt voor $x = 0$, evenals $x = 0$ ook volgt uit $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$; nu voldoet $x = 0$ aan de

differentiaal-vergelijking, hetgeen te duidelijker wordt, als men ze schrijft $x\,dy = y\,log\,y\,dx$; want voor $x = 0$ is $dx = 0$; verder volgt $x = 0$ uit de algemeene integraal, door daarin c oneindig te nemen, hetgeen blijkt, als men deze schrijft $x = \frac{log\,y}{c}$; $x = 0$ is dus een bijzondere integraal; en dat deze niet de omhullende is der andere bijzondere integralen, blijkt, als men opmerkt, dat uit de algemeene integraal gevolgd is $p = c e^{cx}$; stelt men hierin $x = 0$, dan komt $p = c$ dus $\frac{dy}{dx} = 0$, zoodat $x = 0$ de bijzondere integralen niet raakt.

14. Het tweede door BOOLE behandelde voorbeeld is de differentiaal-vergelijking

$$p^2 - pxy + y^2\,log\,y = 0;$$

of oplossende ten opzichte van p,

$$p = \frac{xy \pm y\sqrt{x^2 - 4\,log\,y}}{2};$$

waaruit volgt $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4\,log\,y}}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4\,log\,y}}$.

Nu is $\frac{\partial p}{\partial y} = \infty$, voor $x^2 - 4\,log\,y = 0$, en voor $y = 0$, waarvan de eerste te schrijven is $y = e^{\frac{x^2}{4}}$; beiden voldoen aan de differentiaal-vergelijking.

De algemeene integraal is intusschen $y = e^{cx - c^2}$. Om te onderzoeken, of de gevonden integralen bijzondere of afzonderlijke zijn, ga men weder na, of voor c uit de algemeene integraal eene zekere standvastige, of eene veranderlijke moet gesubstitueerd worden, om de gevonden integralen te verkrijgen; hieruit blijkt terstond, dat $y = e^{\frac{x^2}{4}}$ eene gewone afzonderlijke integraal is; maar opdat $y = 0$ voortkome uit de algemeene integraal, moet $cx - c^2 = -\infty$ zijn, of $c^2 - cx = +\infty$. Dit heeft nu, onafhankelijk van x plaats zoowel voor $c = +\infty$, als voor $c = -\infty$; want $c^2 - cx$ is te schrijven $c(c-x)$; voor $c = +\infty$ wordt deze uitdrukking $+\infty \times + \infty$ en voor $c = -\infty$ wordt zij $-\infty \times -\infty$, alles met uitsluiting van het geval dat $x = \infty$, dus niet geheel onafhankelijk van x; elke bijzondere integraal ontstaat nu uit de algemeene door aan c éene bepaalde waarde toe te kennen; $y = 0$ onderscheidt zich dus in ieder geval van de gewone bijzondere integralen.

BOOLE maakt nog de opmerking, dat men, als men bij eene wille-

keurige differentiaal-vergelijking de willekeurige standvastige c der algemeene integraal vervangt door c^2, wel iedere bijzondere integraal op twee wijzen uit de algemeene is af te leiden, maar dan heeft dat ook met iedere bijzondere integraal plaats; terwijl het in het behandelde voorbeeld slechts met die eene integraal het geval is.

Daarom rekent Boole $y = 0$ niet onder de gewone bijzondere integralen; maar noemt ze een soort van veelvoudige bijzondere integraal (*a species of multiple particular integral*), en daarom een afzonderlijke integraal, doch niet van de soort der omhullenden.

Ik heb hierbij dezelfde opmerking te maken als bij het eerste voorbeeld.

De algemeene integraal is $e^{cx-c^2} - y = 0 = F(x, y, c)$. Tot onderkenning der afzonderlijke integralen ontwikkele men $\frac{\partial F}{\partial c} = (x - 2c)e^{cx-c^2}$; $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ leidt dus ook tot $e^{cx-c^2} = 0$, of $y = 0$, hetgeen het vermoeden wettigt, dat $y = 0$ omhullende is van de bijzondere integralen.

Trouwens uit $y = e^{cx-c^2}$ volgt $p = ce^{cx-c^2}$ of $p = cy$. Is dus $y = 0$, dan is ook $p = 0$, onafhankelijk van x en voor elke waarde van c; waaruit m. i. duidelijk is, dat $y = 0$ al de bijzondere integralen raakt, en dus haar omhullende is.

$\frac{\partial F}{\partial c} = 0$ geeft intusschen ook $x - 2c = 0$; en dit levert de andere afzonderlijke integraal $y = e^{\frac{x^2}{4}}$.

Bedrieg ik mij niet in het gezegde, zoo hebben de beide voorbeelden van Boole niet geleerd, dat er afzonderlijke integralen zijn, welke niet de omhullende zijn van de bijzondere; maar wel kunnen zij leeren, dat, zoo men sommige integralen tot de bijzondere rekent, zij zich toch van de gewone bijzondere door eene bijkomende voorwaarde onderscheiden. Dit neemt intusschen niet weg, dat ik bij dit alles gaarne in het midden laat, wat andere voorbeelden kunnen leeren.

Eigenschappen der afzonderlijke integralen.

15. Bij Boole en Dienger komt omtrent de afzonderlijke integralen een tweetal stellingen voor, die nog ter sprake moeten komen.

Die stellingen zijn:

I. *Eene volkomen differentiaal-vergelijking* (dat is eene differentiaal-

vergelijking, tot nul herleid, waarvan het eerste lid eene volkomen differentiaal is) *laat geen afzonderlijke integralen toe.*

II. *Eene afzonderlijke integraal van eene differentiaal-vergelijking van de eerste orde en den eersten graad maakt haar integreerenden factor oneindig.*

Boole leidt de tweede stelling uit de eerste af; Dienger de eerste uit de tweede.

Het volgende bewijs van de eerste stelling komt voor in Boole.

Eene volkomen differentiaal-vergelijking is steeds te onderstellen van den vorm $\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$ (1), zoodat de algemeene integraal is $\phi(x,y)=c$. Ondersteld, dat $y=f(x)$ eene afzonderlijke integraal is; substitueert men deze y in de algemeene integraal, zoo moet daaruit voor c volgen, niet een standvastige, maar een functie van x; dus $c=F(x)$; zoodat dan de afzonderlijke integraal is $\phi(x,y)=F(x)$. Hieruit volgt

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dF(x)}{dx}\quad . . (2),$$

hetwelk in strijd is met de gegeven differentiaal-vergelijking; want het tweede lid der vergelijking (2) kan niet voortdurend nul zijn, tenzij $F(x)$ standvastig zij.

Bij dit bewijs is op te merken, dat Boole nadrukkelijk ondersteltt eene afzonderlijke integraal $y=f(x)$; maar als men onderstelt de afzonderlijke integraal $x=a$ (standvastig, maar niet willekeurig standvastig), zoo kan die niet ontstaan uit de algemeene integraal, door te stellen $c=F(x)$; men is dan gedwongen te kiezen $c=F(y)$, en dus is voor die afzonderlijke integraal

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{dF(y)}{dx};$$

en nu is het tweede lid identisch nul; zoodat de volkomene differentiaal-vergelijking wel één of meer afzonderlijke integralen $x=$ standvastig hebben kan.

16. Eveneens kan men aantoonen, door de differentiaal-vergelijking te schrijven

$$\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy}+\frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y}=0,$$

dat aan haar kan voldaan worden door één of meer afzonderlijke integralen $y=$ standvastig.

Bovendien is dit ook wel af te leiden uit de differentiaal-vergelijking in haar eersten vorm (1); waaruit volgt

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}}; \text{ terwijl uit (2) volgt } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x} - \frac{dF(x)}{dx}}{\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}}.$$

Beide uitdrukkingen geven $\frac{dy}{dx} = 0$, $y =$ standvastig, voor die uitdrukking $c = F(x)$, welke $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y}$ oneindig maakt; zoodat $y =$ standvastig eene afzonderlijke integraal zijn kan.

17. De tweede stelling is alleen in zooverre waar, als de eerste waar is.

Zij namelijk de differentiaal-vergelijking $Mdx + Ndy = 0$ (1), en zij μ een integreerende factor, zoodat $\mu\,(Mdx + Ndy) = 0$ (2) een volkomen differentiaal-vergelijking is. Als nu eene zekere afzonderlijke integraal voldoet aan (1) en niet aan (2), zoo zal voor die afzonderlijke integraal $\mu = \infty$ moeten zijn.

De tweede stelling geldt dus voor alle afzonderlijke integralen behalve voor $y =$ standvastig, of $x =$ standvastig, die wel in bijzondere gevallen, maar niet altijd, den integreerenden factor oneindig kunnen maken.

18. Dienger begint, zooals reeds gezegd is, met de tweede stelling. De differentiaal-vergelijking $P + Q\frac{dy}{dx} = 0$ (1) gevende, en den integreerenden factor μ onderstellende, stelt hij de algemeene integraal

$$\int \mu\left(P + Q\frac{dy}{dx}\right) dx = C \;.\;.\; (2)$$

Bestaat er nu eene integraal, die voldoet aan (1) maar niet aan (2), zoo is dit een afzonderlijke. Nu is de eene factor van de uitdrukking onder het integraalteeken van (2), $P + Q\frac{dy}{dx} = 0$; daarom moet de andere factor $\mu = \infty$ zijn; anders is $C = 0$, en de integraal is niet een afzonderlijke, maar een bijzondere.

Alle beschouwingen, als bij het bewijs van Boole, ter zijde gesteld, komt dit bewijs mij reeds daarom onjuist voor, dat m. i. de uitdrukking (2) niet de algemeene integraal is te noemen van de differentiaal-vergelijking; deze uitdrukking is eene symbolische; want zij is niet eene onbepaalde integraal $\int F(x)\,dx$. Immers P, Q en μ zijn in het algemeen functiën van x en y; en men heeft dus niet het recht, op zulke voorstelling de wetten toe te passen van de gewone onbepaalde integraal.

19. STURM behandelt de tweede stelling voor het bijzondere geval, dat de differentiaal-vergelijking is van den vorm

$$dy - f(x, y)\,dx = 0.$$

Is nu van deze differentiaal-vergelijking de algemeene integraal $u - c = 0$, terwijl v een integreerende factor is, zoo is $v dy - v f(x, y) dx = 0$ eene volkomen differentiaal-vergelijking; derhalve is $v = \frac{\partial u}{\partial y}$ en $- v f(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}$.

STURM zegt nu. Alle afzonderlijke integralen worden gegeven door $\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0$, als $F(x, y, c) = 0$ de algemeene integraal is; hier is echter, wijl $F(x, y, c) = u - c$ is, $\frac{\partial F}{\partial c} = -1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$, zoodat $\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{1}{\frac{\partial u}{\partial y}}$. Derhalve voor de afzonderlijke integraal, die $\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = 0$ maakt, is $\frac{\partial u}{\partial y} = \infty$ of $v = \infty$. Vooreerst nu heeft STURM geene rekening gehouden, dat ook $\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = 0$ afzonderlijke integralen kan leveren, die niet in het vorig kenmerk begrepen zijn; en voor die wordt dus v niet noodzakelijk $= \infty$. Ten andere zal moeten worden toegegeven dat $dy - f(xy)dx = 0$ een buitengewone vorm is voor een differentiaal-vergelijking; de stelling, zoo als STURM die geeft, is dus niet algemeen genoeg, wat den vorm der vergelijking betreft; want de meeste afzonderlijke integralen maken den integreerenden factor van de differentiaal-vergelijking in haar algemeenen vorm ($P dx + Q dy = 0$) oneindig. En de stelling is te algemeen, wat de afzonderlijke integralen betreft, omdat sommigen hadden moeten worden uitgesloten.

20. Als een voorbeeld, dat eene volkomen differentiaal-vergelijking eene afzonderlijke integraal hebben kan, diene de volgende, mij door Prof. GRINWIS te *Utrecht* medegedeelde differentiaal-vergelijking

$\frac{dx}{2\sqrt{x-a}} - dy = 0$; de vergelijking is eene volkomene, want elke term is een volkomen differentiaal; de algemeene integraal is: $y - \sqrt{x-a} = c$; $x = a$ voldoet aan de differentiaal-vergelijking, want $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x-a}}$, wordt $\infty = \infty$ voor, $x = a$; nu is het waar, dat niet altijd $\infty = \infty$ is; hier is dit toch het geval, hetgeen duidelijk wordt, als men de differentiaal-vergelijking schrijft

$$2\sqrt{x-a}\,.\,dy = dx;$$

beide leden worden nul voor $x = a$, als wanneer $dx = 0$; en het is duidelijk, dat $x = a$ uit de algemeene integraal volgt, door aan c een veranderlijke waarde te geven.

Schrijft men de algemeene integraal

$$(y-c)^2 - (x-a) = 0 = F(x, y, c) = 0;$$

zoo geeft het kenmerk $\frac{\partial F}{\partial c} = 0$, $y - c = 0$; substitueert men hieruit $c = y$ in de algemeene integraal, dan wordt deze $x = a$.

De algemeene integraal stelt voor parabolen, wier assen evenwijdig zijn met de $x-$ as, wier toppen zich verplaatsen langs de lijn $x = a$, evenwijdig met de $y-$ as, en welke daarom allen die lijn raken.

$x = a$ stelt dus voor de (rechtlijnige) omhullende van de parabolen, welke door de bijzondere integralen worden voorgesteld.

Zoo is dan door drie kenmerken uitgemaakt, dat $x = a$ een afzonderlijke integraal is van de behandelde volkomen differentiaal-vergelijking.

21. Niets is gemakkelijker dan nu ook een voorbeeld te geven van een volkomen differentiaal-vergelijking, die $y =$ standvastig tot afzonderlijke integraal heeft. Daartoe heeft men slechts in de behandelde differentiaal-vergelijking x en dx te vervangen door y en dy, en omgekeerd.

De volkomen differentiaal-vergelijking $dx - \frac{dy}{2\sqrt{y-a}} = 0$ heeft dus de afzonderlijke integraal $y = a$.

Mocht het mij gelukt zijn door dit schrijven, op een der schoonste hoofdstukken der hoogere integraal-rekening de aandacht van meer wiskundigen te vestigen; op moeielijkheden te wijzen, die nog op wegruiming wachten; en vooral meer, kon het zijn beter, artikelen uit te lokken; dan zou ik meenen nuttig te hebben geschreven en mij aangemoedigd gevoelen de studie omtrent sommige punten voort te zetten.

DORDRECHT, Maart, 1876.

IETS OVER DE

„THEORIE DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES,

Par M. MAXIMILIEN MARIE."

Door D. BIERENS DE HAAN.

(*Vervolg van Dl.* II, *blz.* 160.)

II. ONDERZOEK.

19. Wanneer twee kromme lijnen $f_1(x,y)=0$, $f_2(x,y)=0$, bestaanbare coëfficienten hebben, zijn hare *gemeenschappelijke* imaginaire *oplossingen* onderling gekoppeld; dat is zulk een paar wordt voorgesteld door $x=\alpha\pm\beta i$, $y=\alpha'\pm\beta' i$,

waarbij de karakteristieke $C=\frac{+\beta'}{+\beta}=\frac{-\beta'}{-\beta}$ dezelfde blijft. De beide punten $x_1=\alpha\pm\beta$, $y_1=\alpha'\pm\beta'$,

behooren dus tot de gekoppelde krommen met de karakteristieke C: de lijn, die ze verbindt, heeft C tot richtingscoëfficient; dus zijn beide punten de uiteinden van eene bestaanbare koorde, die aan beide kromme lijnen gemeen is. Het midden van deze koorde, het punt $x_2=\alpha$, $y_2=\alpha'$, behoort tot de middellijnen, die met die bestaanbare koorde der gekoppelden overeenkomen.

20. Wanneer de vergelijkingen echter ook imaginaire coëfficienten hadden, zoodat zij den vorm hadden

$$X_1+Y_1 i=0,\ X_2+Y_2 i=0,$$

dan zoude een nieuw paar vergelijkingen

$$X_1-Y_1 i=0,\ X_2-Y_2 i=0,$$

gemeenschappelijke oplossingen hebben, die met de eerste gekoppeld waren. Men heeft dus de vergelijkingen

$$X_1^2+Y_1^2=0,\ X_2^2+Y_2^2=0$$

te onderzoeken, maar slechts de helft van hare oplossingen voldoet aan de oorspronkelijke vergelijkingen.

21. Men heeft vroeger (N°. 8) gezien, dat eene bestaanbare lijn $y = Cx + d$ slechts de gekoppelde C van eene kromme kan snijden; ieder andere lijn $y = ax + b$ kan die gekoppelde slechts snijden, als zij imaginair wordt voorgesteld, bijv. door $y = (m + ni)x + (p + qi)$. Voor de bepaling van m, n, p, q, heeft mèn naar N°. 18

$$a = m + n + \frac{2n^2}{m - n - C},\quad b = p + q + \frac{2qn}{m - n - C}.$$

Men kan dus de twee overblijvende voorwaarden gebruiken om haar door twee punten der gekoppelde te brengen.

22. Passen wij dit toe op de ellips, en denken wij ons hare vergelijking op dezelfde middellijn als de gekoppelde, die onderzocht wordt,

$$a_1^2 y^2 + b_1^2 x^2 = a_1^2 b_1^2.$$

Elimineeren we de y tusschen deze en de lijn

$$y = (m + ni)x + (p + qi),$$

dan moet $a_1^2[(m + ni)x + (p + qi)]^2 + b_1^2 x^2 = a_1^2 b_1^2$ twee bestaanbare wortels hebben; en daarentegen na substitutie dier x de vergelijking der lijn alleen uit een imaginair gedeelte bestaan; dat is, $mx + p = 0$, of omdat de x onbepaald moet blijven, $m = 0$, $p = 0$. De vergelijking der lijn wordt dus $y = nxi + qi$; terwijl de uitkomst der vroegere eliminatie geeft

$$(b_1^2 - n^2 a_1^2)x^2 - 2nqa_1^2 x - a_1^2 b_1^2 - a_1^2 q^2 = 0,$$

dus $$x = \frac{1}{b_1^2 - n^2 a_1^2}\left[nqa_1^2 \pm a_1 b_1 \sqrt{b_1^2 - n^2 a_1^2 + q^2}\right];$$

zoodat x slechts bestaanbaar is voor $b_1^2 - n^2 a_1^2 + q^2 > 0$.

Om nu over te gaan tot de vergelijking op de assen, $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$, noemen wij λ en μ de hoeken, die de middellijnen a_1 en b_1 met de as a maken; dan is

$$x = \frac{x_1 \, Sin\,\mu - y_1 \, Cos\,\mu}{Sin(\mu - \lambda)},\quad y = \frac{y_1 \, Cos\,\lambda - x_1 \, Sin\,\lambda}{Sin(\mu - \lambda)},$$

en nu wordt $y = nxi + qi$, na eenige herleiding,

$$y = \frac{ni\,Sin\,\mu + Sin\,\lambda}{ni\,Cos\,\mu + Cos\,\lambda}\,x + \frac{qi\,Sin(\mu - \lambda)}{ni\,Cos\,\mu + Cos\,\lambda}.$$

Daar nu $Tg\,\mu = C$, dus $Sin\,\mu = \dfrac{C}{\sqrt{1 + C^2}}$, $Cos\,\mu = \dfrac{1}{\sqrt{1 + C^2}}$,

$Tg\,\lambda = -\dfrac{b^2}{a^2 C}$, dus $Sin\,\lambda = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^4 C^2 + b^4}}$, $Cos\,\lambda = \dfrac{-a^2 C}{\sqrt{a^4 C^2 + b^4}}$

is, heeft men eindelijk

$$y = \frac{niC\sqrt{a^4 C^2 + b^4} + b^2\sqrt{1 + C^2}}{ni\sqrt{a^4 C^2 + b^4} - a^2 C\sqrt{1 + C^2}}\,x - qi\,\frac{a^2 C^2 + b^2}{ni\sqrt{a^4 C^2 + b^4} - a^2 C\sqrt{1 + C^2}}$$

als vergelijking der lijnen, die de gekoppelde C der ellips in twee punten snijden.

23. Wat betreft de *organische beschrijving* naar deze methode, kan men aldus redeneeren. Indien de bestaanbare kromme $f(x, y) = 0$ ontstaat uit de snijding der twee veranderlijke krommen

$$\phi(x, y, \lambda) = 0, \qquad \psi(x, y, \lambda) = 0,$$

waar de bestaanbare parameter tusschen $-\infty$ en $+\infty$ veranderen kan; dan kan men de gekoppelde C der kromme f beschouwen als beschreven door de snijding der gekoppelden C van de beide veranderlijke krommen

$$\phi(x, y, p + qi) = 0, \qquad \psi(x, y, p + qi) = 0,$$

wanneer slechts p en q zoodanig zijn, dat één enkel der snijpunten tot het stelsel C behoort.

Bijv. De ellips $a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$ ontstaat uit de snijding der beide rechte lijnen $y = \lambda(x + a)$ en $y = -\frac{b^2}{\lambda a^2}(x - a)$; om nu de organische beschrijving der gekoppelde in het stelsel $C = \infty$ na te gaan, stelle men

$$y = (p + qi)(x + a) \text{ en } y = -\frac{b^2}{a^2(p + qi)}(x - a),$$

onder de voorwaarde dat hare doorsnede eene bestaanbare abscis hebbe. De eliminatie van y geeft

$$x = a\,\frac{b^2 - a^2p^2 + a^2q^2 - 2a^2pqi}{b^2 + a^2p^2 - a^2q^2 + 2a^2pqi},$$

dus zoude $$\frac{b^2 - a^2p^2 + a^2q^2}{b^2 + a^2p^2 - a^2q^2} = \frac{-pq}{pq},$$

dat is $b^2 = -b^2$ moeten zijn. Derhalve moet $\frac{pq}{pq} = \frac{0}{a^2}$ zijn, dat is, of $p = 0$ of $q = 0$. Voor $q = 0$ komt er de ellips zelve terug: men moet dus $p = 0$ stellen; en hierdoor worden de beide lijnen

$$y = qi(x + a) \text{ en } y = \frac{-b^2}{a^2 qi}(x - a) = \frac{b^2 i}{a^2 q}(x - a).$$

De bestaanbare lijnen worden dus $y_1 = q(x_1 + a)$ en $y_1 = \frac{b^2}{a^2 q}(x - a)$; en deze moeten nu als snijpunten de hyperbool $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$ leveren.

24. Maar men kan ook de definitie eener kromme lijn algemeener maken door het invoeren van imaginaire grootheden, hetzij bij eigenschappen van raaklijnen of normalen, hetzij bij die van krommingscirkel enz., — en dit behoort bij de overeenkomstige gedeelten van ons onderzoek —, hetzij bij de constructie door punten.

Voor dit laatste moge de Cissoide van Diocles tot voorbeeld strekken. Hare constructie is deze. Trek uit het eene uiteinde A van de middellijn eens cirkels eene willekeurige koorde A P, die den omtrek des cirkels nog eenmaal in D, en verder ook in N de vaste raaklijn A′T snijdt, die aan het andere uiteinde A′ der middellijn is getrokken. Den afstand PN, tusschen de twee laatste snijpunten, zet men nu op de koorde af, in AM, te rekenen van het beginpunt A, altijd in dezelfde richting als het stuk PN; het uiteinde van dien afstand is dan een punt M der Cissoide.

Deze definitie wordt nu op de volgende wijze algemeener gemaakt. Trek door A, den oorsprong der coördinaten, eene koorde $y=(p+qi)x$ en bepaal het snijpunt met den cirkel $y^2=2rx-x^2$; dan zijn de coördinaten $x_1=\dfrac{2r}{(p+qi)^2+1}$ en $y_1=2r\dfrac{p+qi}{(p+qi)^2+1}$.
Bepaal ook het snijpunt met de bedoelde raaklijn $x=2r$, dan zijn die coördinaten $x_2=2r$, en $y_2=(p+qi)2r$.
De coördinaten voor het punt der gekoppelden moeten nu zijn

$$X=x_2-x_1=2r\frac{(p+qi)^2}{(p+qi)^2+1}=2r\left[1-\frac{(p^2-q^2+1)-2pqi}{(p^2-q^2+1)^2+4p^2q^2}\right],$$

$$Y=y_2-y_1=2r\frac{(p+qi)^3}{(p+qi)^2+1}=$$

$$=2r\frac{p[p^4+14p^2q^2-3q^4+p^2-3q^2]+qi[7p^4-6p^2q^2+3q^4+9p^2-3q^2]}{(p^2-q^2+1)^2+4p^2q^2};$$

mits daarin de waarde van X bestaanbaar worde. Dit vordert $pq=0$. Voor $q=0$, wordt $y=px$; dat is, men verkrijgt de snijpunten met de Cissoide zelve. Dus moet $p=0$ zijn, geldende voor het stelsel $C=\infty$. En nu worden ook

$$x_1=\frac{2r}{1-q^2}\ \text{bestaanbaar},\ y_1=\frac{2rqi}{1\ \ q^2},$$

$$x_2=2r\qquad \text{bestaanbaar},\ y_2=2rqi,$$

$$X=\frac{-2rq^2}{1-q^2}\ \text{bestaanbaar},\ \ Y=\frac{-2rq^3i}{1-q^2};$$

zoodat de abscissen der twee snijpunten in het stelsel $C=\infty$ bestaanbaar worden, en dan ook werkelijk tevens de abscis van het punt der kromme bestaanbaar wordt. Verder is

$$\frac{X^3}{2r-X}=\frac{-8r^3q^6}{(1-q^2)^3}:\frac{2r}{1-q^2}=\frac{-4r^2q^6}{(1-q^2)^2}=Y^2,$$

juist de gewone vergelijking der bestaanbare Cissoide. Dus wordt in het stelsel $C=\infty$ de gekoppelde van de Cissoide volgens dezelfde

wet afgeleid uit de gekoppelde des cirkels, namelijk de gelijkzijdige hyperbool; dat is men neme, $A M_1 = P_1 N$.

25. Wanneer eene bestaanbare kromme lijn een *middelpunt* bezit, en men dit als oorsprong aanneemt, voldoen tegelijk de beide punten

$$x_1 = \alpha + \beta i, \; y_1 = \alpha' + \beta' i \text{ en } x_2 = -\alpha - \beta i, \; y_2 = -\alpha' - \beta' i.$$

Beide oplossingen behooren tot dezelfde karakteristieke $C = \frac{\beta'}{\beta}$; dus behooren de punten

$$x_3 = \alpha + \beta, \; y_3 = \alpha' + \beta' \text{ en } x_4 = -\alpha - \beta, \; y_4 = -\alpha' - \beta',$$

tot dezelfde gekoppelde C; en daar de coördinaten alleen in teeken verschillen, zal de koorde, die beide punten verbindt, door den oorsprong midden door worden gedeeld; dat is, ook hier is de oorsprong een middelpunt der gekoppelde C, dus van alle gekoppelden.

Omgekeerd volgt dus naar N°. 10, dat wanneer eene gekoppelde van eene bestaanbare kromme een middelpunt heeft, dan is dit punt tevens het middelpunt van de kromme zelve en van al haar gekoppelden. Zulk een middelpunt kan nooit imaginaire coördinaten hebben; want waren deze $x_1 = \alpha + \beta i$, $y_1 = \alpha' + \beta' i$, dan moest het supplementaire stelsel $x_2 = \alpha - \beta i$, $y_2 = \alpha' - \beta' i$ bij een tweede middelpunt behooren; en dit weet men, dat onmogelijk is.

26. Heeft de kromme lijn imaginaire coëfficienten, dan is het mogelijk dat een middelpunt imaginaire coördinaten hebbe, $x_1 = \alpha + \beta i$, $y_1 = \alpha' + \beta' i$; zoodat $x_2 = \alpha + \beta$, $y_2 = \alpha' + \beta'$ het middelpunt wordt van de gekoppelde met de karakteristieke $C = \frac{\beta'}{\beta}$; maar nu is er geenerlei reden meer, waarom dit punt tevens een middelpunt der overige gekoppelden zijn zoude.

27. Voor de *middellijnen* eener kromme lijn, bedenke men dat een punt P, waarvan de imaginaire coördinaten de halve som zijn van de imaginaire coördinaten van twee punten op de gekoppelde krommen, zoowel wanneer zij dezelfde karakteristieke bezitten, als bij verschillende karakteristieken, het punt P altijd de overeenkomstige koorde door midden deelt. Wanneer nu de beide punten dezelfde karakteristieke hebben, heeft het punt P die ook. Wanneer beide punten op dezelfde lijn van een bundel $y = (m + ni)\,x + (p + qi)$ liggen, ligt het punt P ook daarop.

Wanneer dus x_1 en y_1 zijn de halve sommen der coördinaten van de snijpunten van

$$f(x, y) = 0 \text{ en } y = (m + ni)\,x + (p + qi),$$

en derhalve van ons punt P, — zoo zal, wanneer men daarin x door $x+x_1$ en y door $y+y_1$ vervangt, dat is

$$f(x+x_1\,,\ y+y_1)=0\,,\ y=(m+ni)x\,,$$

of $f\left\{x+x_1\,,\ y_1+(m+ni)\,x\right\}=0$, stel $=\phi\left\{x\,,y,\,(m+ni)\right\}$ twee wortels moeten hebben, die op het teeken na gelijk zijn. Door deze vergelijking te ontbinden in de bestaanbare en imaginaire deelen, verkrijgt men twee vergelijkingen ter oplossing van x_1 en y_1. Overigens zal de verkregen vergelijking slechts daarin kunnen verschillen van die der middellijnen van de bestaanbare kromme, dat de richtings-coëfficient hier door $(m+ni)$ wordt gegeven.

Wanneer dus de vergelijking der middellijnen bij de bestaanbare kromme is $\phi(x,y,a)=0$, zal die der middellijnen van de gekoppelde zijn $\phi\left\{x,\,y,\,(m+ni)\right\}=0$; en daar de beide punten, naar het boven gezegde, zeer wel tot verschillende karakteristieken kunnen behooren, zal men daarin m en n geheel willekeurig kunnen nemen. Wanneer men echter twee punten van dezelfde karakteristieke wil hebben, moeten m en n naar N°. 18 voldoen aan de voorwaarde

$$m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}=a.$$

Wanneer men de middellijnen eener bestaanbare kromme verlengt tot aan eene van haar gekoppelden, zal die verlengde de bestaanbare middellijn dier gekoppelde worden, zooals volgt uit de bepaling van de bestaanbare koorde der gekoppelde kromme (zie N°. 19).

28. Ten einde de middellijn te vinden, die bij de karakteristieke C van eene kromme $f(x,y)=0$ alle koorden, evenwijdig aan $y=kx$ midden doordeelt, moet men eerst naar N°. 21 de voorwaarden der doorsnijding van een bundel $y=(m+ni)x+(p+qi)$ bepalen; deze zijn twee in aantal. Verder komt daarbij de voorwaarde, dat de lijn C van den bundel evenwijdig zij aan de lijn $y=kx$, namelijk $m+n+\dfrac{2n^2}{m-n-C}=k$.

Men kan dus de drie parameters, bijv. n, p en q elimineeren, en verkrijgt alzoo $y=\left\{m+i\psi_1(m)\right\}x+\left\{\chi(m)+i\psi_2(m)\right\}$; zoodat voor iedere waarde van m de twee gemeenschappelijke oplossingen van deze en de $f(x,y)=0$, twee snijpunten leveren in het stelsel C, en die op dezelfde evenwijdige aan $y=kx$ gelegen zijn. Nu moet het middelpunt der koorde, die beide punten verbindt, op deze lijn $\quad y=\left\{m+i\psi_1(m)\right\}x+\left\{\chi(m)+i\psi_2(m)\right\}$,
en tevens naar N°. 27 op de

$$\phi\left\{x,y,m+i\psi_1(m)\right\}=0$$

gelegen zijn. Men heeft dus slechts tusschen beide vergelijkingen de m te elimineeren.

29. Wij komen thans tot de theorie der *raaklijnen*, zoodat wij met differentiaal-quotienten te doen krijgen. Hierbij wordt, in overeenstemming met het vorige, het volgende beginsel als grondslag en als verklaring aangenomen.

Wanneer men bij de kromme $f(x, y) = 0$ voor het differentiaal-quotient van de afhankelijk veranderlijke y ten opzichte van de onafhankelijk veranderlijke x vindt $k + li$; dan beteekent dit, dat men voor $dx = d\alpha + i d\beta$ en $dy = d\alpha' + i d\beta'$ heeft

$$d\alpha' + i d\beta' = (k + li)(d\alpha + i d\beta) = (k d\alpha - l d\beta) + i(k d\beta + l d\alpha);$$

derhalve $\quad d\alpha' = k d\alpha - l d\beta$ en $d\beta' = k d\beta + l d\alpha$;

en wederom, even als vroeger redeneerende,

$$\frac{d\alpha' + d\beta'}{d\alpha + d\beta} = \frac{(k + l) d\alpha + (k - l) d\beta}{d\alpha + d\beta} = \frac{(k + l) + (k - l)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1 + \dfrac{d\beta}{d\alpha}}.$$

Wanneer dus twee kromme lijnen $f(x, y) = 0$ en $f_1(x, y) = 0$ een bestaanbaar of imaginair punt (x_1, y_1) gemeen hebben, en in dit punt voor elke aangroeiing van x het differentiaal-quotient van y ten opzichte van x in beide kromme lijnen gelijk is, stel $k + li$; dan zullen ook de aangroeiingen van y bij beide krommen gelijk zijn. Maar de gevonden verhouding hangt af van de geheel onbepaalde waarde van $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$, en kan dus alle mogelijke waarde verkrijgen tusschen $-\infty$ en $+\infty$; tenzij $l = 0$, en daarover wordt nader afzonderlijk gesproken. Derhalve zullen er een oneindig aantal imaginaire punten, rondom het punt (x, y) in alle mogelijke richtingen gelegen, aan beide krommen gemeen zijn; en deze punten zullen een klein schijfje vormen rondom het eerste punt.

30. Heeft men dus de twee krommen $f(x, y) = 0$ en

$$\eta - y = -\frac{f'_\xi(\xi, \eta)}{f'_\eta(\xi, \eta)}(\xi - x),$$

waarin ξ en η voldoen aan de vergelijking $f(\xi, \eta) = 0$; dan voldoen beide vergelijkingen aan $\xi = x, \eta = y$; en tevens is het differentiaal-quotient van y naar x in beide vergelijkingen gelijk. Beide krommen hebben dus zulk een schijfje van een oneindig aantal punten in de nabijheid van het punt (ξ, η) gemeen. En die gekoppel-

den, welke dezelfde karakteristieke hebben als het punt (ξ, η), raken elkander in dat punt.

Nu kan men de laatste vergelijking altijd tot den vorm

$$\eta = (m + ni)\,\xi + (p + qi)$$

terugbrengen; dat is, zij stelt een bundel lijnen voor, uitgaande uit het punt $\quad \eta = m\,\xi + p,\quad 0 = n\,\xi + q;$

de genoemde raaklijn moet dus ook door dit punt gaan in het stelsel C.

31. Stelt men de waarde van het differentiaal-quotient van y naar x in een punt (x, y) der kromme voor door $m + ni$, dan verkrijgt men een element dier kromme door de vergelijking $dy = (m + ni)\,dx$. Neemt nu hierin $dx = d\alpha + i\,d\beta$, dan moet men kunnen bepalen de overeenkomstige $dy = d\alpha' + i\,d\beta'$; en nu kan men nog de richting van het element bepalen door de voorwaarde $\dfrac{d\beta'}{d\beta} = C$.

Neemt men evenzoo den bundel lijnen $y = (m + ni)x$, en stelt men daarin $x = \alpha + \beta i$, en $y = \alpha' + \beta' i$, nog $\dfrac{\beta'}{\beta} = C$; dan zullen hier de waarden van $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ evenredig zijn aan de waarden $d\alpha$, $d\beta$, $d\alpha'$, $d\beta'$ van straks. Dat is, de elementen van eene kromme, beginnende bij een harer punten, waar het differentiaal-quotient van y naar x is $m + ni$, vormen een bundel, gelijkvormig met den bundel lijnen, in de vergelijking $y = (m + ni)x$.

Dezen bundel kan men altijd, door behoorlijke verandering der coördinaten-assen, terugbrengen tot den vorm $y = sxi$, behalve in het geval dat n gelijk nul is. In dien vorm is de bundel een elliptische, omdat de stralen eene verdwijnende ellips vormen; is hierin s de eenheid, zoo wordt de bundel een circulaire.

Indien n gelijk nul is, en dus de richtings-coëfficient bestaanbaar, dan valt de geheele bundel in eene lijn, de raaklijn, te zamen; want dan geeft $dy = d\alpha' + i\,d\beta' = m\,(d\alpha + i\,d\beta)$ hier $d\alpha' = m\,d\alpha$, en $d\beta' = m\,d\beta$, dus ook $d\alpha' + d\beta' = m\,(d\alpha + d\beta)$.

In zulk een punt (x, y) zullen dus de elementen alle in de richting van de raaklijn zamenvallen, en geen schijfje om het punt vormen; de raaklijn behoort dus bij alle gekoppelden. Het punt zelf behoort dus tot de (imaginaire) omhullende der gekoppelden.

32. Wil men door een punt, buiten de kromme $f(x, y) = 0$, daaraan eene raaklijn trekken, dan neme men vooreerst de coördinaten van dat punt bestaanbaar (x_1, y_1); het vraagstuk is dan geheel bepaald, en de oplossingen gelden hetzij de kromme zelve, of zekere

gekoppelden, die door het vraagstuk zelf worden bepaald. De coördinaten van het raakpunt worden dan gegeven door

$$f(x,y)=0,\ (x-x_1)f'_x(x,y)+(y-y_1)f'_y(x,y)=af(x,y),$$

waar a is de graad van $f(x,y)$, en waar dus de laatste vergelijking is van den graad $a-1$. De bestaanbare oplossingen van dit stelsel geven dus de raakpunten van raaklijnen, aan de kromme zelve getrokken. De imaginaire oplossingen geven de coördinaten van zulke punten der gekoppelde, waar de raaklijn door die punten aan die gekoppelde getrokken, werkelijk door het punt (x_1, y_1) gaan; en waar ook aan de vergelijking dier raaklijn wordt voldaan door $x=x_1$, $y=y_1$. Het punt (x_1, y_1) zal dus het uitgangspunt zijn van de verschillende bundels raaklijnen, die aan de vraag voldoen; zijn de coëfficienten van $f(x,y)$ bestaanbaar, dan zullen de gevonden raakpunten twee aan twee gekoppeld moeten zijn, en dus aan dezelfde gekoppelde der gegeven kromme behooren.

Bij kromme lijnen van den tweeden graad, geeft de tweede vergelijking eene rechte lijn, de koorde der raakpunten, ook de polaire voor de pool (x_1, y_1) genoemd. Voor

$$f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

wordt zij $x(Ax_1+By_1+D)+y(Bx_1+Cy_1+E)+Dx_1+Ey_1+F=0$, altijd bestaanbaar, al worden ook de raakpunten zelve imaginair. Dan behooren deze tot eene gekoppelde, die tot karakteristieke heeft de richtings-coëfficient dezer polaire; dat is, de polaire is eene bestaanbare koorde der gekoppelde. Maar deze polaire moet de toegevoegde middellijn wezen van die middellijn, welke het punt (x_1, y_1) bevat; derhalve moet de bedoelde gekoppelde de oorspronkelijke kromme raken in het snijpunt van deze kromme en de middellijn, door (x_1, y_1) getrokken.

Laat de vergelijking eener kegelsnede, op de groote as en een brandpunt, wezen $y^2+x^2-(kx+l)^2=0$; dan is de polaire van dat brandpunt $kx+l=0$, dat is de overeenkomstige richtlijn. Om dus de raakpunten te vinden, die op de polaire $kx+l=0$ liggen, heeft men $y^2+x^2=0$, of $y=\pm xi$; deze raakpunten hebben echter tot abscis $-\frac{l}{k}$; de raaklijnen zijn uit het brandpunt getrokken; dus is de vergelijking dier raaklijnen $y=\pm x$; zij zijn onderling rechthoekig.

De vergelijking der imaginaire ellips kan men nu in dezen vorm schrijven

$$y^2 + x^2 = -(kx+l)^2, \text{ of } 0 = y^2 + (1+k^2)x^2 + 2klx + l^2 =$$
$$= y^2 + (1+k^2)\left\{x + \frac{kl}{1+k^2}\right\}^2 + \frac{l^2}{1+k^2}.$$

Het middelpunt heeft dus tot coördinaten $y = 0$, $x = -\frac{kl}{1+k^2}$.
Herleidt men de vergelijking tot dat punt, dan wordt zij
$y^2 + (1+k^2)x'^2 + \frac{l^2}{1+k^2} = 0$, die voor $1+k^2 = \frac{b^2}{a^2}$ en $l^2 = \frac{b^4}{a^2}$
wordt $\quad y^2 + \frac{b^2}{a^2}x'^2 = -b^2$, of $a^2y^2 + b^2x'^2 = -a^2b^2$.

Maar nu is ook $-\frac{kl}{1+k^2} = \pm ka = \pm a\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1} = \pm\sqrt{b^2 - a^2}$.
De bestaanbare punten, die bij de imaginaire ellips den rol van brandpunten vervullen, liggen dus op de kleine as, op een afstand tot het middelpunt, gelijk aan den wortel uit het verschil der tweede machten van de beide assen.

33. Wanneer echter de coördinaten van het punt, waaruit de raaklijnen getrokken moeten worden, imaginair zijn gegeven, $x_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $y_1 = \alpha'_1 + \beta'_1 i$, waarin slechts bekend is $\alpha_1 + \beta_1 = a$, $\alpha'_1 + \beta'_1 = b$, de meetkundig gegeven coördinaten van dat punt, — dan geven de twee vergelijkingen van N°. 32 slechts de raakpunten aan van raaklijnen, behoorende tot de bundels, die alle gaan door het gegeven punt (x_1, y_1), met imaginaire coördinaten. Zullen die raaklijnen in werkelijkheid door dat punt gaan, dan moet $\frac{\beta'_1}{\beta_1}$ de karakteristieke zijn van het overeenkomstige raakpunt; en nu kan men nog aan eene voorwaarde voldoen, zoodat eene bepaalde oplossing behoort bij eene bepaalde gekoppelde der kromme.

Laat gegeven zijn eene ellips, en de karakteristieke van de gekoppelde, waaraan men uit het gegeven punt eene raaklijn wil trekken. Neem dan voor de x as de toegevoegde middellijn van de bestaanbare koorde dezer gekoppelde, en voor de y as de toegevoegde der x as; zoodat dan de vergelijking zij $\qquad a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$,
waarbij de coördinaten van het gegeven punt worden

$$x_1 = \alpha_1,\ y_1 = \alpha'_1 + \beta'_1 i.$$

Voor de coördinaten van het raakpunt vindt men dan

$$x_2 = a^2\frac{b^2\alpha_1 \pm (\alpha'_1 + \beta'_1 i)\sqrt{a^2(\alpha'_1+\beta'_1 i)^2 + b^2(\alpha_1{}^2 - a^2)}}{b^2\alpha_1{}^2 + a^2(\alpha'_1 + \beta'_1 i)^2},$$

$$y_2 = b^2\frac{a^2(\alpha'_1 \pm \beta'_1 i) \pm \alpha_1\sqrt{a^2(\alpha'_1+\beta'_1 i)^2 + b^2(\alpha_1{}^2 - a^2)}}{b^2\alpha_1{}^2 + a^2(\alpha'_1 + \beta'_1 i)^2}.$$

Vooreerst, ten einde x_2 bestaanbaar te maken, kan men nemen $\alpha'_1=0$ of $\beta'_1=0$; de laatste maakt het gegeven punt bestaanbaar, tegen de onderstelling; dus moet $\alpha'_1=0$ zijn, en men heeft

$$x_2=a^2\,\frac{b^2\alpha_1\pm\beta'_1\sqrt{a^2\beta_1'^2+b^2(a^2-\alpha_1^2)}}{b^2\alpha_1^2-a^2\beta_1'^2},$$

$$y_2=b^2\,\frac{a^2\beta'_1 i\pm\alpha_1 i\sqrt{a^2\beta_1'^2+b^2(a^2-\alpha_1^2)}}{b^2\alpha_1^2-a^2\beta_1'^2}.$$

Indien hier $a^2\beta_1'^2+b^2(a^2-\alpha_1^2)>0$, zoo behoort deze oplossing bij de bedoelde gekoppelde, en de beide raakpunten liggen beide op die gekoppelde zelve. Indien echter $a^2\beta_1'^2+b^2(a^2-\alpha_1^2)<0$ is, zoo geeft onze oplossing de raakpunten van *die* gekoppelde onzer gekoppelde, die deze laatste aanraakt aan de uiteinden van de middellijn, die door het gegeven punt gaat.

34. Voor het onderzoek der ***asymptoten***, neme men haar vooreerst bestaanbaar, en stelle men hare vergelijking $y=Cx+p$; dan kan deze lijn ook imaginaire oplossingen verkrijgen met de karakteristieke C, stel bijv. $x=\alpha+\beta i$, $y=\alpha'+C\beta i$. Opdat deze aan de gestelde vergelijking voldoe, moet $\alpha'=C\alpha+p$, dus ook $\alpha'+C\beta=(\alpha+\beta)C+p$ zijn; dat is, het punt van de imaginaire oplossing behoort tot de bestaanbare lijn $y=Cx+\beta$; dus de gekoppelden van de asymptoten der bestaanbare kromme zijn de asymptoten der toegevoegde kromme.

Dus is de bestaanbare asymptoot eener bestaanbare kromme tevens asymptoot van die gekoppelde, waarvan de karakteristieke is de richtings-coëfficient van die asymptoot.

Bijv. de hyperbool $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ heeft tot asymptoot $y=\frac{b}{a}x$.

Voor de gekoppelde kromme in het stelsel $\frac{b}{a}$, zij $x=\alpha+\beta i$, $y=\alpha'+\beta\frac{b}{a}i$; dan wordt haar vergelijking

$$a^2\left(\alpha'^2-\beta^2\frac{b^2}{a^2}+2\alpha'\beta\frac{b}{a}i\right)-b^2(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i)=-a^2b^2,$$

dat is $a^2\alpha'^2-b^2\alpha^2=-a^2b^2$ en $a\alpha'-b\alpha=0$, dus $a\alpha'+b\alpha=-\frac{a^2b^2}{0}$.

Daar dit onmogelijk is, moeten α en α' oneindig groot zijn. Wanneer men dus β ook oneindig neemt, zoo dat $\alpha+\beta$ en $\alpha'+\beta\frac{b}{a}$ eindig blijven; dan verkrijgt men de lijn $y=\alpha'+\beta\frac{b}{a}=\frac{b}{a}(\alpha+\beta)=\frac{b}{a}x$, dat is de asymptoot der hyperbool zelve.

Wanneer men echter de β eindig neemt, worden $\alpha+\beta$ en $\alpha'+\beta\frac{b}{a}$ oneindig; dat is het oneindige punt der gekoppelde kromme, of het punt harer asymptoot, ligt op de asymptoot der hyperbool zelve.

35. Wanneer de asymptoot onbestaanbaar is, maar toch eenen bestaanbaren richtingshoek heeft, dan zij hare vergelijking $y=Cx+p+qi$. Wanneer dan $x=\alpha+\beta i$ en $y=\alpha'+\beta' i$ eene oplossing zoude vormen, dan moet $\alpha'=C\alpha+p$, en $\beta'=C\beta+q$; dus weder $\alpha'+\beta'=C(\alpha+\beta)+(p+q)$. Hoewel dus de karakteristieke $\frac{\beta'}{\beta}$ van een punt der asymptoot veranderlijk is, ligt dat punt toch altijd op de rechte lijn $y=Cx+p+q$; en deze is dus asymptoot aan al de gekoppelde krommen.

36. Is de vergelijking der asymptoot geheel onbestaanbaar, dat is hare vergelijking $y=(m+ni)x+(p+qi)$;
dan heeft de lijn uit dien bundel, die C tot karakteristieke heeft, naar N°. 18 tot vergelijking $y=\left(m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}\right)x+p+q+\frac{2qn}{m-n-C}$.
Wanneer nu $x=\alpha+\beta i$ en $y=\alpha'+\beta' i$ eene oplossing dier lijn is, moet

$$\alpha'=\left(m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}\right)\alpha+p+q+\frac{2qn}{m-n-C},$$

$$\beta'=\left(m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}\right)\beta,$$

dus ook $\alpha'+\beta'=\left(m+n+\frac{2n^2}{m-n-C}\right)(\alpha+\beta)+p+q+\frac{2qn}{m-n-C}$;
en dus is zij eene asymptoot van de gekoppelde kromme in het stelsel C. De oorspronkelijke imaginaire vergelijking der asymptoot geeft dus een bundel van lijnen, die ieder asymptoot zijn van de gekoppelde kromme met dezelfde karakteristieke.

Bijv. de ellips $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ heeft tot imaginaire asymptoot $y=\pm\frac{b}{a}xi$. Nu zijn de gekoppelde krommen dier ellips alle hyperbolen, die telkens met haar het stelsel gekoppelde middellijnen gemeen hebben. Wanneer men nu beide vorige vergelijkingen tot een zelfde stelsel toegevoegde middellijnen herleidt, zoo komt er

$$a_1{}^2y^2+b_1{}^2x^2=a_1{}^2b_1{}^2 \text{ en } y=\pm\frac{b_1}{a_1}xi.$$

Voor imaginaire y leveren deze de hyperbool $a_1{}^2y^2-b_1{}^2x^2=-a_1{}^2b_1{}^2$, met hare asymptoot $y=\pm\frac{b_1}{a_1}x$.

(*Wordt vervolgd.*)

THEORIE DER BASCULE

DOOR

B. P. MOORS.

§ 1.

Beschrijving der bascule van Quintenz.

Algemeene voorwaarde waaraan de bascule moet voldoen.

De basculen, waarin uitsluitend hefboomen en stangen voorkomen, berusten allen op het zelfde beginsel; zoodat het, indien de voorwaarden bekend zijn waaraan één vorm moet voldoen, gemakkelijk is hieruit die voor elken anderen af te leiden.

Daar de bascule van Quintenz het meest in gebruik is, zullen wij deze als punt van uitgang onzer beschouwing nemen; eene korte beschrijving van dit werktuig ga de mathematische discussie vooraf.

Fig. I is eene schematische afbeelding en fig. II eene verticale lengte-doorsnede der bascule van Quintenz.

De bascule bestaat uit een, door middel van een *mes* B, fig. I, op een vast *kussen* rustende hefboom A D (het *juk*); waarin, in het uiteinde A, een mes is vastgemaakt, dat eene *schaal* draagt, bestemd om er een *gewigt G* in te plaatsen, dat met een af te wegen *last L* evenwigt moet maken. In de punten C en D van het juk zijn eveneens messen bevestigd, waaraan de *trekstangen* CE en DF hangen, die de driehoeken H_1 E H en K_1 F K (*de ramen*), in de punten E en F, dragen. In deze ramen nl. zijn in E en F messen vastgemaakt, welke op de kussens liggen, die in de gelijknamige punten der genoemde trekstangen bevestigd zijn.

Het raam K_1FK rust ook nog, door middel van messen, welke daarin in de punten K_1 en K zijn vastgemaakt, op vaste kussens; terwijl het raam H_1EH door middel van kussens op de messen H_1 en H rust, welke in de stangen K_1F en KF van het onderste raam zijn aangebragt.

Aan het raam H_1EH is een dekstuk vast verbonden (de *brug*), dat bestemd is om er den last L op te plaatsen.

Indien nu de last L op de brug rust, zal zich de drukking er van over de drie punten H_1, E en H verdeelen. De drukkingen in H_1 en H zullen het punt D, en de drukking in E het punt C van het juk naar beneden trachten te trekken, waartegen het gewigt G in de schaal zich verzet.

Er werken dus drie krachten op het juk, welke door den tegenstand van het kussen B in evenwigt gehouden worden, nl. eene kracht in A, eene in C en eene in D.

Bij het gebruik van de bascule is het eene hoofdvoorwaarde, dat *het evenwigt en de gevoeligheid, bij elken stand van het juk*, onafhankelijk zijn van de plaats van den last op de brug.

In de vier eerstvolgende paragrafen zullen wij de voorwaarden opsporen, waaraan de bascule moet voldoen, opdat genoemde onafhankelijkheid plaats vinde; voorloopig laten wij daarbij de wrijving, — die eerst in § 7 zal beschouwd worden, — buiten rekening.

---

§ 2.

Het vlak van beweging van elk punt der bascule moet evenwijdig loopen aan het vlak, waarin zich de lengte-as van het juk beweegt bij een hoek van doorslag.

Fig. III is eene gedeeltelijke afbeelding der bascule, waarin de brug H_1EH en de trekstang CE van fig. I duidelijkheidshalve zijn weggelaten. Even als in fig. I stelt in fig. III AD het juk voor; DF de trekstang, waaraan het raam K_1FK is opgehangen en Fk eene loodlijn, die uit F op de as K_1K is neergelaten.

Wij onderstellen, dat er evenwigt bestaat tusschen den last op de brug en het gewigt in de schaal.

De last op de brug veroorzaakt, dat het punt F naar beneden gedrukt wordt, alsof in dit punt eene verticale kracht, die wij J zullen noemen, aangrijpt.

Ontbinden wij deze kracht J in twee andere krachten, nl. I vol-

gens het verlengde van DF, en I_1 in eene rigting loodregt daarop, en volgen wij eerst de componente I. Het is duidelijk, dat deze in het hefboomsvlak [1]) moet liggen; want doet zij dit niet, dan zal zij vooreerst het kussen in D over het daar bevestigd mes, en daarna het mes in B over het kussen aldaar, in eene zijdelingsche rigting, trachten te verschuiven. Zoo deze beweging niet verhinderd wordt, zal de bestendigheid der bascule worden opgeheven; wordt zij wel tegengegaan, dan ontstaat hieruit wrijving, die de gevoeligheid van het werktuig benadeelt. Bovendien moet de componente I zooveel mogelijk loodregt op de lengte-as van het juk gerigt zijn, vermits anders de door haar overgebragte kracht de kussens en messen van het juk over elkander tracht te schuiven, in de rigting van de lengte van het juk; wat wel tot zekeren graad door de wrijving zal worden verhinderd; doch steeds zal deze kracht nadeelig werken, zoowel op de bestendigheid van het werktuig, als op de duurzaamheid der messen en kussens.

Wij nemen dus aan, dat de stang DF in het hefboomsvlak ligt. Staat nu de as K_1K niet loodregt op het hefboomsvlak, dan is de tweede componente van J, nl. I_1, niet loodregt op K_1K. Zij brengt dus te weeg, dat de messen van K_1K over de kussens trachten te schuiven, vooreerst in de rigting van K_1K, en ten tweede in eene zijdelingsche rigting. Beide deze werkingen vervallen, wanneer de as K_1K loodregt staat op het hefboomsvlak; en deze is dus de voor de as K_1K meest voordeelige rigting. Bovendien moet de componente I_1 zoo klein mogelijk zijn, vermits zij het raam over de kussens K en K_1 tracht te schuiven in de rigting van kF; derhalve moet de stang DF zoo nabij mogelijk verticaal, en het juk AD zoo nabij mogelijk horizontaal gerigt zijn.

Op gelijken grond is het duidelijk, dat ook de stang CE, fig. I en II, in het hefboomsvlak, en zoo nabij mogelijk verticaal moet liggen; en de draaijings-as H_1H en de scherpe kanten van de messen der bascule loodregt op dit vlak moeten staan.

Wij zullen dus in het vervolg aannemen, dat de bascule aan de noodzakelijke voorwaarde voldoet, dat de stangen CE en DF in het hefboomsvlak liggen, en de messen [2]) en de draaijings-assen H_1H en K_1K loodregt staan op dit vlak.

[1]) Dat is het verticaal vlak, waarin zich de lengte-as van het juk beweegt bij een hoek van doorslag.

[2]) Hier en in het vervolg wordt onder „messen" de „scherpe kanten der messen" verstaan.

§ 3.

Zal het evenwigt der bascule, bij elken stand van het juk, onafhankelijk zijn van de plaats van den last op de brug, dan moet de brug, tijdens de schommelingen van het juk, zich steeds evenwijdig aan haar oorspronkelijken stand bewegen.

De afstand der messen A en C, fig. I, tot de lijn BD, die van de lijn H_1H tot het vlak K_1FK, en de rigtingen en lengten der stangen CE en DF, zoomede de hoeken, die de lijnen AB, BC, BD, en de vlakken K_1FK en H_1EH met het horizontaal vlak maken, blijven geheel onbepaald.

Wij nemen aan, dat L en G met elkaar evenwigt maken; en stellen den afstand van de verticaal, die door E gaat, tot de lijn H_1H gelijk b; de afstanden van de verticaal, die door het zwaartepunt van den last gaat, tot de lijn H_1H gelijk x, en tot het hefboomsvlak ADEhk gelijk y; en eindelijk $H_1h = h_1$ en $Hh = h$.

De last L [1]) verdeelt zich over de punten H_1, E en H, alsof in deze punten verticale krachten aangrijpen; wij zullen deze krachten „drukking in H_1," „drukking in E" en „drukking in H" noemen.

Ten einde de evenwigts-vergelijking tusschen deze drukkingen en het gewigt G, d. w. z. de evenwigts-voorwaarde tusschen L en G te bepalen, deelen wij het juk een oneindig kleinen hoek van doorslag mede, waardoor de punten H_1, E, H en A oneindig kleine wegen doorloopen.

Noemen wij de projectiën op de verticale lijn van de door de punten H_1, E, H en A doorloopen wegen, respectievelijk „rijzing H_1", „rijzing E", enz., dan wordt, volgens het grondbeginsel der virtueele snelheden, de bedoelde evenwigts-vergelijking uitgedrukt door

$$(\text{drukking in } H_1) \,.\, (\text{rijzing } H_1) + (\text{drukking in E}) \,.\, (\text{rijzing E}) + \\ + (\text{drukking in H}) \,.\, (\text{rijzing H}) + G \,.\, \text{rijzing A} = 0;$$

waarvoor gevonden wordt

$$\frac{x}{b} \,.\, L \,.\, \text{rijzing E} + \frac{L(H_1 \,.\, \text{rijzing H} + H \,.\, \text{rijzing } H_1)}{h + h_1} \,.\, \left\{1 - \frac{x}{b}\right\} - \\ - \frac{L(\text{rijzing H} - \text{rijzing } H_1)}{h + h_1} \,.\, y \,.\, \left\{1 - \frac{x}{b}\right\} + G \,.\, \text{rijzing A} = 0.$$

Deze vergelijking moet onafhankelijk zijn van y, omdat het evenwigt onafhankelijk moet wezen van eene verplaatsing van den last

---

[1]) Het gewigt van de bewegende deelen der bascule kan voor het onderhavig onderzoek buiten rekening blijven, vermits het van geen invloed wezen kan op de bedoelde onafhankelijkheid.

in de rigting loodregt op het hefboomsvlak; dus moet vooreerst „rijzing H_1" = „rijzing H" zijn, waardoor de evenwigts-vergelijking, onafhankelijk van y, overgaat in

$$\frac{x}{b} \cdot L\,(\text{rijzing H} - \text{rijzing E}) + L \cdot \text{rijzing H} + G \cdot \text{rijzing A} = 0.$$

De vergelijking moet ook onafhankelijk zijn van x, omdat het evenwigt onafhankelijk moet wezen van eene verplaatsing van den last op de brug in de rigting evenwijdig aan het hefboomsvlak; dus moet ook „rijzing E" = „rijzing H" zijn, waardoor de evenwigts-vergelijking, onafhankelijk van x en y, overgaat in

$$L \cdot \text{rijzing H} + G \cdot \text{rijzing A} = 0.$$

Derhalve is het voor de bedoelde onafhankelijkheid noodig, dat

„rijzing H_1" = „rijzing H" = „rijzing E"

is; d. w. z. de brug moet zich, tijdens den oneindig kleinen hoek van doorslag van het juk, evenwijdig aan haar oorspronkelijken stand verplaatsen.

Zal nu het evenwigt der bascule, *bij elken van de oneindig vele standen, waarin het juk kan worden gebragt door eenig overwigt in de schaal te leggen*, onafhankelijk zijn van x en y; dan moet het evenwigt, *bij elken mogelijken stand van het juk*, aan de laatste gelijkheid voldoen. Waaruit volgt dat, tijdens het juk een willekeurigen hoek van doorslag doorloopt, de brug zich steeds evenwijdig aan haar oorspronkelijken stand moet bewegen; hetgeen te bewijzen was.

Omgekeerd zal, bij elke bascule, waarvan de brug, tijdens de schommelingen van het juk, zich evenwijdig aan haar oorspronkelijken stand verplaatst, steeds aan de laatste gelijkheid voldaan worden; en derhalve zullen ook, zoowel de gevoeligheid dier bascule, als het evenwigt in den normaalstand [1]), onafhankelijk zijn van de plaats der goederen op de brug.

---

§ 4.

Onderzoek naar de voorwaarden, waaraan de bascule moet voldoen, opdat a *het evenwigt en* b *de gevoeligheid, bij een bepaalden stand van het juk, onafhankelijk zijn van de plaats van den last op de brug.*

Indien, fig. I, tijdens de schommelingen van het juk, de brug H_1 EH zich steeds evenwijdig aan haar oorspronkelijken stand ver-

[1]) Dat is die stand der bascule, waarbij de verhouding tusschen L en G standvastig is, onafhankelijk van de grootte van L.

plaatst, dan zal blijkbaar ook de lijn hE, van de doorsnede der bascule met het hefboomsvlak, zich steeds evenwijdig aan hare oorspronkelijke rigting bewegen.

Het omgekeerde is ook waar. Want de beweging van het punt h is volkomen onafhankelijk van de lengte der lijn K_1 K; en verder is het duidelijk, dat al de punten der horizontale lijn H_1 h H steeds gelijke en evenwijdige wegen zullen doorloopen, wier projectiën op een verticaal vlak onderling gelijk zijn.

Blijft dus, tijdens de schommelingen van het juk, de lijn hE evenwijdig aan hare oorspronkelijke rigting, dan moet ook de brug H_1 EH evenwijdig blijven aan haar oorspronkelijken stand.

Wij kunnen dus volstaan met de voorwaarden te zoeken, waaraan de doorsnede der bascule met het hefboomsvlak moet voldoen, opdat de lijn hE zich, bij de slingeringen van het juk, evenwijdig bewege aan hare oorspronkelijke rigting.

Zij fig. IV deze doorsnede.

Hierin worden de punten A en C, zie fig. II, buiten de lijn BD, het punt H buiten de lijn FK, en de rigtingen en lengten der lijnen CE en DF tamelijk willekeurig aangenomen.

De gelijke letters in de figuren II en IV hebben dezelfde beteekenis; zoodat B en K vaste punten voorstellen, en de lijn AB en het punt C aan de lijn BD, evenzoo het punt H aan de lijn FK vast verbonden zijn; en derhalve de onderlinge afstanden der punten A, B, C en D, evenzoo die der punten K, H en F standvastig zijn. De lijnen BD, DF en FK achten wij door scharnieren in D en F aan elkander verbonden; evenzoo de lijnen BC, CE, EH en HK door scharnieren in C, E en H; terwijl de gebroken lijn ABCD in het vast punt B, en de gebroken lijn FHK in het vast punt K, op een scharnier rust; zoodat, bij de beweging van het punt A, de gebroken lijnen BDFK en BCEHK te gelijk van vorm veranderen. De brug is aan de lijn EH vastgemaakt, en de last L grijpt in het punt M der lijn EH aan, waarbij wij stellen HM $= x$. De hefboomsarmen DB en AB sluiten een hoek van $(180° - \alpha)$ in, de hefboomsarmen DB en CB een hoek α_1, en de hefboomsarmen HK en FK een hoek α_2; terwijl, bij het evenwigt van den last L met het in A opgehangen gewigt G, de arm BC den hoek ϕ maakt met eene horizontale lijn. De overige hoeken, die de genoemde lijnen met eene horizontale lijn maken, zijn in de figuur aangewezen. De lengte der lijnen AB $= a$, BD $= e$, DF $= s$, FK $= r$, BC $= e_1$, CE $= s_1$, EH $= b$, HK $= r_1$ en BK $= n$ zijn standvastig, evenzoo

de hoeken α, α_1, α_2 en Σ; terwijl voorloopig al de overige hoeken nl. ϕ, δ, γ, δ_1 en β veranderlijk worden aangenomen. De hoek ϕ zij in het vervolg de onafhankelijk veranderlijke.

Zij nog G_0 het gewigt van de schaal, welke in A ophangt, Z het gewigt en Z het zwaartepunt van het juk, BZ $= z$ en de hoek, dien de lijn BZ met de horizontale lijn maakt, gelijk τ; verder Z_1 het gewigt en Z_1 het zwaartepunt van het raam FKH, K$Z_1 = z_1$ en de hoek, dien de lijn KZ_1 met de horizontale lijn maakt, gelijk τ_1; stellen wij eindelijk het gewigt van de stangen DF en CE door S en S_1 en dat der brug door B voor, aangrijpende in D_1, C_1 en E_1, zijnde F$D_1 = t$, E$C_1 = t_1$ en H$E_1 = c$.

a. Het evenwigt.

Volgens het grondbeginsel der virtueele snelheden wordt de evenwigtsvoorwaarde uitgedrukt door de vergelijking

$$Z_1 d\left\{z_1 Sin\,\tau_1\right\}+Sd\left\{t\,Sin\,\delta+r\,Sin\,\gamma\right\}+Bd\left\{c\,Sin\,\beta+r_1\,Sin(\gamma+\alpha_2)\right\}+$$
$$+Ld\left\{x\,Sin\,\beta+r_1 Sin(\gamma+\alpha_2)\right\}+S_1 d\left\{t_1 Sin\,\delta_1+b\,Sin\beta+r_1 Sin(\gamma+\alpha_2)\right\}+$$
$$+Zd\left\{z\,Sin\,\tau\right\}-(G+G_0)d\left\{a\,Sin\,(\alpha+\alpha_1+\phi)\right\}=0;$$

dat is, daar $d\tau = d\phi$ en $d\tau_1 = d\gamma$ is,

$$Z_1 z_1 Cos\,\tau_1\frac{d\gamma}{d\phi}+S\left\{t\,Cos\,\delta\frac{d\delta}{d\phi}+r\,Cos\,\gamma\frac{d\gamma}{d\phi}\right\}+$$
$$+B\left\{c\,Cos\,\beta\frac{d\beta}{d\phi}+r_1\,Cos(\gamma+\alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi}\right\}+L\left\{x\,Cos\,\beta\frac{d\beta}{d\phi}+r_1 Cos(\gamma+\alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi}\right\}+$$
$$+S_1\left\{t_1\,Cos\,\delta_1\frac{d\delta_1}{d\phi}+b\,Cos\,\beta\frac{d\beta}{d\phi}+r_1\,Cos(\gamma+\alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi}\right\}+Zz\,Cos\,\tau-$$
$$-(G+G_0)\,a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\phi)=0;$$

of

$$St\,Cos\,\delta\frac{d\delta}{d\phi}+S_1 t_1\,Cos\,\delta_1\frac{d\delta_1}{d\phi}+$$
$$+\left\{Z_1 z_1\,Cos\,\tau_1+Sr\,Cos\,\gamma+(B+L+S_1)r_1\,Cos(\gamma+\alpha_2)\right\}\frac{d\gamma}{d\phi}+$$
$$+(Bc+Lx+S_1 b)\,Cos\,\beta\frac{d\beta}{d\phi}+Zz\,Cos\,\tau-$$
$$-(G+G_0)\,a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\phi)=0\;\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

Aan deze vergelijking moet voldaan worden onafhankelijk van x; de vergelijking (1) bevat dus de beide vergelijkingen

$$\frac{d\beta}{d\phi}=0\ ^{1)},\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\;(2)$$

---

[1]) Dat het evenwigt onafhankelijk is van x, indien $Cos\,\beta = 0$ is, — d. w. z. dat, indien de brug verticaal staat, de last in de rigting van de zwaartekracht kan verplaatst worden zonder het evenwigt te storen, — verdient blijkbaar geen verdere beschouwing.

en $$St\,Cos\,\delta\,\frac{d\delta}{d\Phi}+S_1\,t_1\,Cos\,\delta_1\,\frac{d\delta_1}{d\Phi}+$$

$$+\{Z_1 z_1\,Cos\,\tau_1+Sr\,Cos\,\gamma+(B+L+S_1)r_1\,Cos(\gamma+\alpha_2)\}\,\frac{d\gamma}{d\Phi}+$$

$$+Zz\,Cos\,\tau-(G+G_0)a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\Phi)=0\;\ldots\ldots\;(3)$$

De vergelijking (2) geeft de voorwaarde aan, waarop, *bij den bepaalden stand van het juk*, de uitkomst der weging onafhankelijk zal zijn van de plaats van den last op de brug; de vergelijking (3) geeft, bij dien stand der bascule, eene vergelijking aan tusschen L en G.

b. De gevoeligheid.

Zoo als bekend is, drukt de waarde der verhouding $\frac{d\Phi}{dG}$ de maat der gevoeligheid uit; de waarde dezer verhouding wordt gevonden door de evenwigtsvergelijking (1) te differentieeren. Wij vinden

$$St\,Cos\,\delta\,\frac{d^2\delta}{d\Phi^2}-St\,Sin\,\delta\left(\frac{d\delta}{d\Phi}\right)^2+S_1\,t_1\,Cos\,\delta_1\,\frac{d^2\delta_1}{d\Phi^2}-S_1\,t_1\,Sin\,\delta_1\left(\frac{d\delta_1}{d\Phi}\right)^2+$$

$$+\{Z_1 z_1\,Cos\,\tau_1+Sr\,Cos\,\gamma+(B+L+S_1)r_1\,Cos(\gamma+\alpha_2)\}\,\frac{d^2\gamma}{d\Phi^2}-$$

$$-\{Z_1 z_1\,Sin\,\tau_1+Sr\,Sin\,\gamma+(B+L+S_1)r_1\,Sin(\gamma+\alpha_2)\}\left(\frac{d\gamma}{d\Phi}\right)^2+$$

$$+(Bc+Lx+S_1 b)\,Cos\,\beta\,\frac{d^2\beta}{d\Phi^2}-(Bc+Lx+S_1 b)\,Sin\,\beta\left(\frac{d\beta}{d\Phi}\right)^2-$$

$$-Zz\,Sin\,\tau+(G+G_0)a\,Sin(\alpha+\alpha_1+\Phi)-a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\Phi)\,\frac{dG}{d\Phi}=0\;..\;(4)$$

Stellen wij, dat aan de voorwaarde (2) voldaan is, dan verdwijnt de term met $\left(\frac{d\beta}{d\Phi}\right)^2$; en, daar de gevoeligheid onafhankelijk moet zijn van x, zoo gaat de laatste vergelijking over in de beide volgende

$$\frac{d^2\beta}{d\Phi^2}=0\ ^{1)},\;\ldots\ldots\ldots\;(5)$$

en deelende door $a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\Phi)$,

---

1) De gevoeligheid is ook onafhankelijk van x, indien $Cos\,\beta=0$ en daarenboven $\frac{d\beta}{d\varphi}=0$ is; zie de hierop betrekkelijke aanteekening op de vorige bladzijde.

$$\frac{dG}{d\Phi} = (G + G_0)\,Tg(\alpha + \alpha_1 + \Phi) +$$

$$+\frac{\left\{\begin{array}{l} + St\,Cos\,\delta\,\dfrac{d^2\delta}{d\Phi^2} - St\,Sin\,\delta\left(\dfrac{d\delta}{d\Phi}\right)^2 + \\ + S_1 t_1\,Cos\,\delta_1\,\dfrac{d^2\delta_1}{d\Phi^2} - S_1 t_1\,Sin\,\delta_1\left(\dfrac{d\delta_1}{d\Phi}\right)^2 + \\ + \{Z_1 z_1\,Cos\,\tau_1 + Sr\,Cos\,\gamma + (B + L + S_1) r_1\,Cos(\gamma + \alpha_2)\}\,\dfrac{d^2\gamma}{d\Phi^2} - \\ - \{Z_1 z_1\,Sin\,\tau_1 + Sr\,Sin\,\gamma + (B + L + S_1) r_1\,Sin(\gamma + \alpha_2)\}\left(\dfrac{d\gamma}{d\Phi}\right)^2 - \\ - Z z\,Sin\,\tau \end{array}\right\}}{a\,Cos(\alpha + \alpha_1 + \Phi)} \quad (6)$$

De vergelijking (5) drukt dan de voorwaarde uit, waaronder de gevoeligheid, *bij den bepaalden stand van het juk*, onafhankelijk zal zijn van de plaats van den last op de brug; de vergelijking (6) geeft het omgekeerde van de maat der gevoeligheid aan, bij dien stand der bascule.

De uitkomst van ons onderzoek is dus, dat, om eene bascule te construeeren, zoodanig, dat *bij een bepaalden stand van het juk* zoowel het evenwigt als de gevoeligheid onafhankelijk zijn van x, de bascule aan twee voorwaarden, nl. $\frac{d\beta}{d\Phi} = 0$ en $\frac{d^2\beta}{d\Phi^2} = 0$ moet voldoen.

Om de beteekenis dezer voorwaarden te kunnen nagaan, moeten wij de differentiaal-quotienten $\frac{d\delta_1}{d\Phi}$, $\frac{d\beta}{d\Phi}$, $\frac{d\gamma}{d\Phi}$ en $\frac{d\delta}{d\Phi}$ in de gegevens uitdrukken, en vervolgens $\frac{d\beta}{d\Phi} = 0$ en $\frac{d^2\beta}{d\Phi^2} = 0$ stellen. Daartoe zijn vier vergelijkingen noodig, die wij verkrijgen door de gesloten lijnen BCEHKB en BDFKB op eene horizontale en op eene verticale lijn te projecteeren; wij vinden dan

$$e_1\,Cos\,\Phi + s_1\,Cos\,\delta_1 + b\,Cos\,\beta + r_1\,Cos(\gamma + \alpha_2) = n\,Cos\,\Sigma, \quad . \ (7)$$

$$-e_1\,Sin\,\Phi + s_1\,Sin\,\delta_1 + b\,Sin\,\beta + r_1\,Sin(\gamma + \alpha_2) = n\,Sin\,\Sigma, \ \ldots \ (8)$$

$$e\,Cos(\Phi + \alpha_1) + s\,Cos\,\delta + r\,Cos\,\gamma = n\,Cos\,\Sigma, \ \ldots\ldots\ldots \ (9)$$

en $$-e\,Sin(\Phi + \alpha_1) + s\,Sin\,\delta + r\,Sin\,\gamma = n\,Sin\,\Sigma \ \ldots\ldots\ldots \ (10)$$

En door deze vergelijkingen te differentieeren,

$$-e_1\,Sin\,\Phi - s_1\,Sin\,\delta_1\,\frac{d\delta_1}{d\Phi} - b\,Sin\,\beta\,\frac{d\beta}{d\Phi} - r_1\,Sin(\gamma + \alpha_2)\,\frac{d\gamma}{d\Phi} = 0, \ (11)$$

$$-e_1\, Cos\,\phi + s_1\, Cos\,\delta_1 \frac{d\delta_1}{d\phi} + b\, Cos\,\beta \frac{d\beta}{d\phi} + r_1\, Cos(\gamma + \alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi} = 0, \quad (12)$$

$$-e\, Sin\,(\phi + \alpha_1) - s\, Sin\,\delta\, \frac{d\delta}{d\phi} - r\, Sin\,\gamma\, \frac{d\gamma}{d\phi} = 0, \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

en $$-e\, Cos\,(\phi + \alpha_1) + s\, Cos\,\delta\, \frac{d\delta}{d\phi} + r\, Cos\,\gamma\, \frac{d\gamma}{d\phi} = 0 \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Door (11) met $Cos\,\delta_1$ en (12) met $Sin\,\delta_1$ te vermenigvuldigen, wordt door optelling gevonden

$$-e_1\, Sin(\phi + \delta_1) - b\, Sin(\beta - \delta_1)\frac{d\beta}{d\phi} - r_1\, Sin\,(\gamma + \alpha_2 - \delta_1)\frac{d\gamma}{d\phi} = 0,$$

waaruit $$\frac{d\beta}{d\phi} = \frac{e_1\, Sin(\delta_1 + \phi) - r_1\, Sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi}}{b\, Sin\,(\delta_1 - \beta)} \ldots \quad (15)$$

Door (13) met $Cos\,\delta$ en (14) met $Sin\,\delta$ te vermenigvuldigen, en daarna op te tellen,

$$-e\, Sin\,(\phi + \alpha_1 + \delta) - r\, Sin\,(\gamma - \delta)\frac{d\gamma}{d\phi} = 0,$$

waaruit $$\frac{d\gamma}{d\phi} = \frac{e\, Sin\,(\delta + \phi + \alpha_1)}{r\, Sin\,(\delta - \gamma)} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Zoodat (15) overgaat in

$$\frac{d\beta}{d\phi} = \frac{e_1\, Sin(\delta_1 + \phi) - \dfrac{r_1\, e\, Sin(\delta_1 - \gamma - \alpha_2).\, Sin\,(\delta + \phi + \alpha_1)}{r\, Sin\,(\delta - \gamma)}}{b\, Sin\,(\delta_1 - \beta)}. \quad (17)$$

Zal nu $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ zijn, dan moet de teller van het tweede lid der laatste vergelijking gelijk nul zijn, terwijl de noemer eene eindige waarde behoudt; dus komt de voorwaarde $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ overeen met de betrekking

$$\frac{e_1\, Sin\,(\delta_1 + \phi)}{r_1\, Sin\,(\delta_1 - \gamma - \alpha_2)} = \frac{e\, Sin\,(\delta + \phi + \alpha_1)}{r\, Sin(\delta - \gamma)}; \ldots\ldots \quad (18)$$

of in woorden: „de projectiën van BC en KH op eene loodlijn „op de lijn CE moeten evenredig zijn aan de projectiën van BD „en KF op eene loodlijn op de lijn DF."

Indien omgekeerd deze betrekking bestaat, zal ook $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ wezen; hetgeen dadelijk uit (17) blijkt; tenzij ook tevens $Sin\,(\delta_1 - \beta) = 0$, d. i. $\beta = \delta_1$, of $\delta_1 - \beta = 180°$, (d. i. $\beta = \delta_1 - 180°$), of $\delta_1 - \beta = -180°$, (d. i. $\beta = \delta_1 + 180°$). Daar echter geen dezer waarden van β, bij de bascule, die wij beschouwen, kan voorkomen, en dus $Sin(\delta_1 - \beta)$ niet

nul kan zijn, zoo zal ook $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ wezen, indien de betrekking (18) bestaat.

De uitdrukking voor $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ wordt gevonden door de vergelijking, die (15) onmiddellijk vooraf gaat, te differentieeren; wij vinden

$$-e_1 Cos(\delta_1+\phi)\frac{d\phi+d\delta_1}{d\phi}+b\,Sin(\delta_1-\beta)\frac{d^2\beta}{d\phi^2}+b\,Cos(\delta_1-\beta)\frac{d\beta}{d\phi}\cdot\frac{d\delta_1-d\beta}{d\phi}+$$

$$+r_1\,Sin(\delta_1-\gamma-\alpha_2)\frac{d^2\gamma}{d\phi^2}+r_1\,Cos(\delta_1-\gamma-\alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi}\cdot\frac{d\delta_1-d\gamma}{d\phi}=0;$$

of, aannemende dat aan de voorwaarde $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ en dus ook aan (17) voldaan is,

$$\frac{d^2\beta}{d\phi^2}=\frac{\left\{\begin{array}{c} e_1\,Cos(\delta_1+\phi)\frac{d\phi+d\delta_1}{d\phi}-r_1\,Sin(\delta_1-\gamma-\alpha_2)\frac{d^2\gamma}{d\phi^2}- \\ -r_1\,Cos(\delta_1-\gamma-\alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi}\cdot\frac{d\delta_1-d\gamma}{d\phi} \end{array}\right\}}{b\,Sin(\delta_1-\beta)}\,. \quad (19)$$

In deze uitdrukking dienen wij de differentiaal-quotienten nog in de gegevens uit te drukken.

Daartoe vinden wij door optelling van (13) en (14), na vooraf (13) met $Cos\,\gamma$ en (14) met $Sin\,\gamma$ vermenigvuldigd te hebben,

$$\frac{d\delta}{d\phi}=\frac{e\,Sin(\gamma+\alpha_1+\phi)}{s\,Sin(\gamma-\delta)}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

door optelling van (11) en (12), na vermenigvuldiging van (11) met $Cos(\gamma+\alpha_2)$ en van (12) met $Sin(\gamma+\alpha_2)$,

$$\frac{d\delta_1}{d\phi}=\frac{e_1\,Sin(\gamma+\alpha_2+\phi)+b\,Sin(\beta-\gamma-\alpha_2)\frac{d\beta}{d\phi}}{s_1\,Sin(\gamma+\alpha_2-\delta_1)}; \quad \ldots \quad (21)$$

en door differentiatie van (16), met inachtneming van (20),

$$\frac{d^2\gamma}{d\phi^2}=\frac{s\left(\frac{d\delta}{d\phi}\right)^2+e\,Cos(\delta+\phi+\alpha)+r\,Cos(\delta-\gamma)\left(\frac{d\gamma}{d\phi}\right)^2}{r\,Sin(\delta-\gamma)} \quad \ldots \quad (22)$$

Zoodat wij, na substitutie in (19) der gevonden waarden van $\frac{d^2\gamma}{d\phi^2}$ en $\frac{d\gamma}{d\phi}$, met inachtneming van (18), en vereenvoudiging, vinden, dat de voorwaarde $\frac{d^2\beta}{d\phi^2} = 0$ overeenkomt met de betrekking

$$\frac{r\,Sin(\delta-\gamma)}{r_1\,Sin(\delta_1-\gamma-\alpha_2)}=$$
$$\frac{e\,Cos(\phi+\alpha_1+\delta)+s\left(\frac{d\delta}{d\phi}\right)^2+r\,Cos(\gamma-\delta)\left(\frac{d\gamma}{d\phi}\right)^2}{e_1\,Cos(\phi+\delta_1)+s_1\left(\frac{d\delta_1}{d\phi}\right)^2+r_1\,Cos(\gamma+\alpha_2-\delta_1)\left(\frac{d\gamma}{d\phi}\right)^2}\quad\ldots(23)$$

Indien omgekeerd deze betrekking bestaat, zal ook $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}=0$ zijn; tenzij tevens $Sin(\delta_1-\beta)=0$ is, hetgeen, zoo als zoo juist is opgemerkt, bij de bascule, welke wij thans beschouwen, niet het geval kan wezen.

De vergelijkingen (18) en (23) drukken dus de voorwaarden in de gegevens uit, waaraan de bascule moet voldoen, opdat het evenwigt en de gevoeligheid, *bij een bepaalden stand van het juk*, onafhankelijk zijn van de plaats van den last op de brug.

---

§ 5.

Constructie van de doorsnede eener bascule, waarvan, tijdens de schommelingen van het juk, de brug zich steeds evenwijdig aan hare oorspronkelijke rigting beweegt.

In de vorige paragraaf is aangetoond dat, *bij een bepaalden stand van het juk*, het evenwigt en de gevoeligheid onafhankelijk zijn van de plaats van den last op de brug, indien aan de voorwaarden (18) en (23) voldaan wordt.

De grootheden, die in (18) en (23) voorkomen, zijn echter door de vergelijkingen (7), (8), (9) en (10) aan *vier* voorwaarden verbonden; zoodat er dus in het geheel *zes* voorwaarden bestaan tusschen al de grootheden der bascule.

Nu zijn er bij de bascule, — althans indien wij het gewigt der bewegende deelen buiten aanmerking laten, — te zamen *achttien* grootheden, nl.: e_1, ϕ, s_1, δ_1, b, β, r_1, α_2, r, γ, s, δ, e, α_1, n, Σ, a en α, welke dus door slechts *zes* voorwaarden verbonden zijn; zoodat wij nog *twaalf* voorwaarden, die echter onafhankelijk van elkaar en van de zes bekende voorwaarden moeten zijn, willekeurig kunnen aannemen. Het vraagstuk: *eene bascule te construeeren waarbij*, IN EEN BEPAALDEN STAND VAN HET JUK, *het evenwigt en de gevoeligheid onafhankelijk zijn van de plaats van den last op de brug*, is dus zeer onbepaald.

Stellen wij, om tot eene eenvoudige constructie te geraken, aanvankelijk b. v.

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0 \text{ en } \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r};$$

dan gaat (18) over in

$$\frac{Sin\,(\delta_1 + \phi)}{Sin\,(\delta_1 - \gamma)} = \frac{Sin\,(\delta + \phi)}{Sin\,(\delta - \gamma)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

waaraan voldaan wordt door te stellen

$$\delta_1 = \delta\ [1]).$$

Stellen wij in (23) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\delta_1 = \delta$ en $e_1 r = r_1 e$, dan verkrijgen wij

$$r s_1 \left(\frac{d\delta_1}{d\phi}\right)^2 = r_1 s \left(\frac{d\delta}{d\phi}\right)^2;$$

en, door in de laatste uitdrukking de waarden van $\frac{d\delta}{d\phi}$ en $\frac{d\delta_1}{d\phi}$ uit (20) en (21) over te brengen,

$$\frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}.$$

Uit $\delta_1 = \delta$ volgt dat, bij de willekeurig gestelde voorwaarden $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, de stangen DF en CE van fig. IV evenwijdig moeten loopen, zooals in fig. V is aangegeven; en daar nu s en s_1 evenredig zijn met e en e_1, zoo vallen de punten E en F met B in eene regte lijn.

Verder volgt dan van zelf

$$\frac{s}{s - s_1} = \frac{r}{r - r_1} = \frac{FK}{FH} = \frac{FB}{FE};$$

dus moet EH evenwijdig zijn aan BK en $\beta = \Sigma$.

Eindelijk hebben wij

$$b : n = r - r_1 : r \text{ of } b = n\frac{r - r_1}{r}.$$

De verkregen gelijkheden $\delta_1 = \delta$, $\beta = \Sigma$ *enz. gelden tot nog toe alléén voor den oorspronkelijken stand van het juk; zij blijven echter ook bestaan* BIJ ELKEN STAND *van het juk*, hetgeen als volgt is aan te toonen.

Stellen wij $$\frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r} = \lambda,$$

---

[1]) Aan de vergelijking (24) voldoen nog andere waarden dan $\delta_1 = \delta$; wij zullen eenige dezer waarden in § 9 beschouwen.

en dus $$b = n\frac{r - r_1}{r} = n\left(1 - \frac{r_1}{r}\right) = n(1-\lambda);$$

verder $\alpha_1 = 0$ en $\alpha_2 = 0$, welke gelijkheden blijkbaar *in iederen stand der figuur* blijven bestaan, wanneer daaraan voor een bepaalden stand voldaan is; en substitueeren wij deze waarden in (7) en (8), dan vinden wij

$$\lambda\, e\, Cos\, \phi + \lambda\, s\, Cos\, \delta_1 + (1-\lambda)\, n\, Cos\, \beta + \lambda\, r\, Cos\, \gamma = n\, Cos\, \Sigma$$

en $$-\lambda\, e\, Sin\, \phi + \lambda\, s\, Sin\, \delta_1 + (1-\lambda)\, n\, Sin\, \beta + \lambda\, r\, Sin\, \gamma = n\, Sin\, \Sigma.$$

Van deze vergelijkingen trekken wij respectievelijk de met λ vermenigvuldigde vergelijkingen (9) en (10) af, dan is

$$\lambda\, s\, (Cos\, \delta_1 - Cos\, \delta) + (1-\lambda)\, n\, Cos\, \beta = (1-\lambda)\, n\, Cos\, \Sigma$$

en $$\lambda\, s\, (Sin\, \delta_1 - Sin\, \delta) + (1-\lambda)\, n\, Sin\, \beta = (1-\lambda)\, n\, Sin\, \Sigma;$$

of $$\lambda\, s\, (Cos\, \delta_1 - Cos\, \delta) = (1-\lambda)\, n\, (Cos\, \Sigma - Cos\, \beta)$$

en $$\lambda\, s\, (Sin\, \delta_1 - Sin\, \delta) = (1-\lambda)\, n\, (Sin\, \Sigma - Sin\, \beta);$$

waarvoor wij ook kunnen schrijven

$$\lambda\, s\, Sin\tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta).\, Sin\tfrac{1}{2}(\delta_1 - \delta) = (1-\lambda)\, n\, Sin\tfrac{1}{2}(\Sigma + \beta).\, Sin\tfrac{1}{2}(\Sigma - \beta)$$

en $$\lambda\, s\, Sin\tfrac{1}{2}(\delta_1 - \delta).\, Cos\tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta) = (1-\lambda)\, n\, Sin\tfrac{1}{2}(\Sigma - \beta).\, Cos\tfrac{1}{2}(\Sigma + \beta).$$

Deze vergelijkingen zijn algemeen, en gelden voor elken stand der figuur. Indien nu niet $\delta_1 = \delta$ en $\beta = \Sigma$ is, dan vinden wij door deeling

$$Tg\tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta) = Tg\tfrac{1}{2}(\Sigma + \beta),$$

dus $$\tfrac{1}{2}(\delta_1 + \delta) = \tfrac{1}{2}(\Sigma + \beta) \pm n\pi,$$

of $$\delta_1 + \delta = \Sigma + \beta \pm 2n\pi.$$

Onderstellen wij nu alleen, dat in den oorspronkelijken stand $\delta_1 = \delta$ en $\beta = \Sigma$ is, dan geldt voor alle standen, behalve den oorspronkelijken stand, de betrekking

$$\delta_1 + \delta = \Sigma + \beta \pm 2n\pi.$$

Maar wanneer deze betrekking voor alle andere standen doorgaat, dan *moet* zij ook voor den oorspronkelijken stand gelden, aangezien de beweging continu is en er geen sprongswijze veranderingen kunnen plaats vinden; zoodat deze betrekking, die *voortdurend* plaats vindt, niet plotseling kan verbroken worden, als de toestel in den oorspronkelijken stand terugkeert. De betrekking moet dus ook gelden in den oorspronkelijken stand, waarvoor $\beta = \Sigma$ en $\delta_1 = \delta$ is;

dus $$\delta = \Sigma \pm n\pi;$$

hetgeen, blijkbaar uit de figuur, eene ongerijmdheid is. Er blijft dus niet over dan te stellen

$$\delta_1 = \delta \text{ en } \beta = \Sigma.$$

voor alle standen der figuur, waardoor aan de laatste vergelijkingen voldaan wordt.

Hier volgt thans de geheele constructie der figuur.

Wij nemen, fig. V, de punten B en K, d. w. z. de grootheden n en Σ willekeurig aan; trekken de lijnen BD en KF in willekeurige rigtingen, en nemen hierop de punten C, D en F willekeurig aan; waardoor wij de *zeven* grootheden n, Σ, ϕ, γ, e_1, e en r willekeurig aangenomen hebben. Wij vereenigen D met F; en trekken uit C eene lijn evenwijdig aan DF; daarop moet het punt E geconstrueerd worden, zoodanig dat

$$CE : DF = BC : BD;$$

hiertoe wordt B met F vereenigd; het snijpunt van BF met de uit C evenwijdig aan DF getrokken lijn is het punt E. Verder wordt uit E eene lijn getrokken, evenwijdig aan BK, omdat $\beta = \Sigma$ wezen moet; het snijpunt van deze met de lijn FK geeft het punt H aan. Daar nu $\beta = \Sigma =$ standvastig blijft, tijdens de schommelingen van het juk, zoo beweegt zich de brug evenwijdig aan hare oorspronkelijke rigting; het punt E beschrijft dus een cirkel om een vast punt K_1, dat bepaald is door EK_1 gelijk en evenwijdig aan HK te nemen. Vierhoek $EHKK_1$ is dus steeds een parallelogram. Wij kunnen nu nog de lijn BA in eene willekeurige rigting nemen en haar eene lengte geven naar verkiezing,

---

§ 6.

Onderzoek naar de voorwaarden, waaraan de bascule moet voldoen opdat de gevoeligheid, bij elken stand van het juk, groot zij.

Wij kunnen blijkbaar ook hier volstaan met de *doorsneden* van het raam en van de brug met het hefboomsvlak te beschouwen; omdat, wáár ook de zwaartepunten van het raam en van de brug ten opzigte van het hefboomsvlak gelegen zijn, deze punten steeds, bij een hoek van doorslag van het juk, volkomen gelijke rijzingen ondergaan als hunne projectiën op het hefboomsvlak.

Nemen wij in fig. IV $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$; en zij aangenomen, dat de bascule volgens § 5, zie fig. V, is geconstrueerd; dan is $\delta_1 = \delta$ in *alle* standen, dus ook $\frac{d\delta_1}{d\phi} = \frac{d\delta}{d\phi}$ en $\frac{d^2\delta_1}{d\phi^2} = \frac{d^2\delta}{d\phi^2}$;

en (6) gaat, na substitutie van $St+S_1t_1=X$ en $Sr+(B+L+S_1)r_1=Y$, over in

$$\frac{dG}{d\phi}=(G+G_0)\,Tg\,(\alpha+\phi)+\frac{\left\{\begin{array}{c}X\left\{Cos\,\delta\,\dfrac{d^2\delta}{d\phi^2}-Sin\,\delta\left(\dfrac{d\delta}{d\phi}\right)^2\right\}+\\+\left\{Z_1z_1\,Cos\,\tau_1+Y\,Cos\,\gamma\right\}\dfrac{d^2\gamma}{d\phi^2}-\left\{Z_1z_1\,Sin\,\tau_1+Y\,Sin\,\gamma\right\}\left(\dfrac{d\gamma}{d\phi}\right)^2-\\-Zz\,Sin\,\tau\end{array}\right\}}{a\,Cos\,(\alpha+\phi)}\qquad(25)$$

Om de beteekenis dezer uitdrukking te kunnen nagaan, dienen wij nog het differentiaal-quotient $\frac{d^2\delta}{d\phi^2}$ in de bekenden uit te drukken. Door (20) te differentieeren vinden wij, met inachtneming van (16),

$$\frac{d^2\delta}{d\phi^2}=\frac{e\,Cos(\phi+\gamma)+s\,Cos(\delta-\gamma)\left(\dfrac{d\delta}{d\phi}\right)^2+r\left(\dfrac{d\gamma}{d\phi}\right)^2}{Sin\,(\delta-\gamma)}.$$

Nemen wij nu nog b. v. $\alpha=0$, $\gamma=0$, $\phi=0$, $\delta=90°$, $Z=0$ en $Z_1=0$, dan gaat (25) over in

$$\frac{dG}{d\phi}=0,$$

d. w. z. dat alsdan de gevoeligheid der bascule oneindig groot is.

De bascule moet echter voldoen aan de voorwaarde, dat ze, bij een kleinen hoek van doorslag ϕ, gevoelig *blijft* en dat het evenwigt *stabiel* is tusschen $\phi=0$ en $\phi=\phi$. Hieraan wordt voldaan o. a. door $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$ en $\alpha=0$ en, in den normaalstand der bascule, $\phi=0$, $\gamma=0$, $\delta=90°$, $s \geqq e$ en $r \geqq e$ te nemen, en de zwaartepunten Z en Z_1 respectievelijk beneden, doch nabij de as van het juk en van het raam te plaatsen.

Want onderstellen wij dat bij deze gegevens het juk een hoek van doorslag ϕ wordt medegedeeld, oneindig klein van de eerste orde; dan blijkt uit (16), dat γ eene oneindig kleine grootheid van gelijke orde is; terwijl uit (20) volgt, dat $d\delta$, en derhalve ook $Cos\,\delta$, oneindig klein zijn van de tweede orde; dus gaat alsdan (25), bij verwaarloozing der oneindig kleinen van de tweede orde, over in

$$\frac{dG}{d\phi}=\frac{1}{a}\left\{\begin{array}{l}(G+G_0)\,a\,Sin\,\phi+\left\{Z_1z_1\,Cos\,\tau_1+Y\right\}\dfrac{d^2\gamma}{d\phi^2}-\\-\left\{Z_1z_1\,Sin\,\tau_1+Y\,Sin\,\gamma\right\}\left(\dfrac{d\gamma}{d\phi}\right)^2-Zz\,Sin\,\tau\end{array}\right\}.$$

Nu is, blijkens (22) en (16), bij verwaarloozing der oneindig kleinen van de tweede orde, vermits $e\,Sin\,\phi = r\,Sin\,\gamma$ is,

$$\frac{d^2\gamma}{d\phi^2} = -\frac{e}{r}\,Sin\,\phi + \frac{e^2}{r^2}\,Sin\,\gamma = Sin\,\gamma\left\{\frac{e^2}{r^2} - 1\right\},\ \text{en}\ \left(\frac{d\gamma}{d\phi}\right)^2 = \frac{e^2}{r^2};$$

dus is

$$\frac{dG}{d\phi} = \frac{1}{a}\left\{\begin{array}{l}(G+G_0)\,a\,Sin\,\phi + \{Z_1\,z_1\,Cos\,\tau_1 + Y\}\left\{\frac{e^2}{r^2}-1\right\}Sin\,\gamma - \\ -\{Z_1\,z_1\,Sin\,\tau_1 + Y\,Sin\,\gamma\}\frac{e^2}{r^2} - Zz\,Sin\,\tau\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{a}\left\{\begin{array}{l}(G+G_0)\,a\,Sin\,\phi - \frac{e^2}{r^2}\,Z_1\,z_1\,\{Sin\,\tau_1 - Cos\,\tau_1\,.\,Sin\,\gamma\} - \\ -\{Z_1\,z_1\,Cos\,\tau_1 + Y\}\,Sin\,\gamma - Zz\,Sin\,\tau\end{array}\right\};$$

of, daar blijkens (3), bij verwaarloozing der oneindig kleinen van de tweede orde,

$$Z_1\,z_1\,Cos\,\tau_1 + Y = \{(G+G_0)\,a - Zz\,Cos\,\tau\}\,\frac{r}{e}$$

is, zoo vinden wij na herleiding, in aanmerking nemende dat $\frac{r}{e}\,Sin\,\gamma = Sin\,\phi$ is,

$$\frac{dG}{d\phi} = -\frac{1}{a}\left\{\frac{e^2}{r^2}\,Z_1\,z_1(Sin\,\tau_1 - Cos\,\tau_1\,.\,Sin\,\gamma) + Zz\,(Sin\,\tau - Cos\,\tau\,.\,Sin\,\phi)\right\};$$

of, daar $(Sin\,\tau_1 - Cos\,\tau_1\,.\,Sin\,\gamma)$ en $(Sin\,\tau - Cos\,\tau\,.\,Sin\,\phi)$ respectievelijk slechts eene oneindig kleine grootheid van de tweede orde verschillen van $Sin(\tau_1 - \gamma)$ en $Sin\,(\tau - \phi)$,

$$\frac{dG}{d\phi} = -\frac{1}{a}\left\{\frac{e^2}{r^2}\,Z_1\,z_1\,Sin(\tau_1 - \gamma) + Zz\,Sin(\tau - \phi)\right\}.$$

Ten einde de bascule bruikbaar te doen zijn, moet het tweede lid der laatste gelijkheid positief wezen; hetgeen o. a. plaats heeft, als de zwaartepunten Z en Z_1 respectievelijk beneden de as van het juk en van het raam gelegen zijn. In dat geval neemt de gevoeligheid toe, naarmate Z_1, Z, $z_1\,Sin(\tau_1 - \gamma)$, $z\,Sin(\tau - \phi)$ en e kleiner, daarentegen a en r grooter worden; d. i. naarmate het juk en het raam ligter zijn, en hunne zwaartepunten digter bij de overeenkomstige assen vallen; en naarmate $BD = e$, fig. IV, kleiner, daarentegen $AB = a$ en $KF = r$ grooter worden genomen. Tevens blijkt uit de laatste formule, dat, zoolang de hoek van doorslag ϕ zeer klein is en de wrijving buiten rekening blijft, het gewigt van L en G geen invloed heeft op de gevoeligheid der bascule, evenmin s, d. i. de lengte van de trekstang DF.

Uit (25) is het echter gemakkelijk na te gaan, dat de laatst gevonden uitdrukking voor de gevoeligheid, bij toenemende waarde van ϕ, te langer zal gelden, naarmate de verhoudingen $\frac{e}{r}$ en $\frac{e}{s}$ kleiner, d. i. naarmate e kleiner en r en s grooter worden genomen.

In de laatste uitdrukking voor de gevoeligheid komt de verhouding $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ niet voor, waaruit zou volgen, dat de gevoeligheid onafhankelijk is van de waarde dezer verhouding. Hadden wij echter de doorbuiging mede in rekening gebragt, dan zouden wij gevonden hebben, dat deze verhouding zoo klein mogelijk moet zijn; omdat, hoe verder zich de punten H en C, fig. V, van K en B verwijderen, des te grooter ook, bij gelijke belasting en doorbuiging, de afmetingen der stangen KF en BD moeten zijn, waardoor hun gewigt en derhalve ook de wrijving in de bascule vermeerdert. De lengte nu van r is afhankelijk van de uitgebreidheid der lasten, die met de bascule moeten afgewogen worden; is dus voor r zekere lengte aangenomen, dan moeten e_1 en e zoo klein genomen worden, als de constructie der bascule toelaat.

Verminderen wij de evenwigtsvergelijking (1) met die, welke verkregen wordt door in (1) $L = 0$ en $G = 0$ te stellen, d. i. met de vergelijking waaraan voldaan wordt door het *tarreeren;* dan vinden wij voor de evenwigtsvergelijking tusschen L en G

$$Lr_1 \, Cos(\gamma + \alpha_2) \frac{d\gamma}{d\phi} + Lx \, Cos\,\beta \, \frac{d\beta}{d\phi} - G\,a\,Cos(\alpha + \alpha_1 + \phi) = 0 \; . \; . \; (26)$$

Worden nu in fig. V $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha = 0$, $\phi = 0$, $\gamma = 0$, $\delta_1 = \delta = 90°$ en $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ genomen, dan gaat (26), blijkens (15) en (16), over in

$$Le_1 - Ga = 0 \quad \text{of} \quad \frac{L}{G} = \frac{a}{e_1};$$

terwijl, blijkens (19), $\frac{d^2\beta}{d\phi^2} = 0$ wordt; waaruit volgt, dat bij deze voorwaarden het evenwigt en de gevoeligheid onafhankelijk zijn van de plaats van den last op de brug *en* van den hoek β, d. w. z. van de verhouding $\frac{s_1}{s}$; zie fig. II.

---

§ 7.

Over de wrijving.

De last moet bij voorkeur nabij de draaijings-as van het bovenste raam op de brug rusten.

Indien de bascule in rust is, zal er in de schaal een zeker overwigt G_1 moeten gelegd worden, om de bascule in beweging te brengen, d. w. z. om de wrijving van de messen op de kussens te overwinnen. Wij kunnen, door de plaatsing van den last op de brug, bijdragen om G_1 betrekkelijk klein te maken.

Om dit aan te toonen nemen wij aan, dat de arbeid om de wrijving te overwinnen (wrijvings-arbeid) evenredig is met de drukking en met den hoek van draaijing; bij deze onderstelling is het dan de vraag, het overwigt te bepalen, dat, in den normaalstand der bascule, bij het gewigt in de schaal moet gevoegd worden, om de genoemde wrijving te overwinnen.

Bepalen wij eerst de wrijving, voor zooveel die veroorzaakt wordt door de drukkingen van de messen op de kussens, uitsluitend door den last L en het gewigt G; zoodat wij voorloopig het gewigt van de bewegende deelen der bascule buiten aanmerking laten.

Zij dan, fig. V, M het aangrijpingspunt van den last op de brug [1]), MH $= x$; en nemen wij aan, dat de bascule in den normaalstand in evenwigt is, dat daarbij de stangen CE en DF verticaal loopen, en α_1, α_2, α, γ en ϕ gelijk nul zijn; stellen wij verder de drukkingen, die de last op de messen veroorzaakt, door K, H, F, E, enz. voor, welke drukkingen in de gelijknamige punten aangrijpen; dan hebben wij

$$H + E = L.$$

De momenten van $(H + E)$ en L ten opzigte van het punt H gelijkstellende, zoo is

$$Eb = Lx, \text{ dus } E = C = \frac{x}{b} L \text{ en } H = \frac{b-x}{b} L;$$

verder is

$$Fr = Hr_1, \text{ dus } F = D = \frac{r_1}{r} \frac{b-x}{b} L,$$

[1]) De som van de door den last L in de punten H_1 en H, K_1 en K, fig. I, veroorzaakte drukkingen verandert niet, indien de last op de brug in eene rigting loodregt op het hefboomsvlak verplaatst wordt; derhalve is ook de wrijving onafhankelijk van deze verplaatsing van den last; waaruit volgt, dat wij ook hier de breedte van de brug en die van het raam gelijk nul kunnen stellen.

$$K = H - F = \frac{r - r_1}{r} \frac{b - x}{b} L,$$

en $$B = A + C + D = G + \frac{r_1}{r} L + \frac{r - r_1}{r} \frac{x}{b} L.$$

Volgens het grondbeginsel der virtueele snelheden moet de arbeid, door het overwigt verrigt, gelijk zijn aan de wrijvings-arbeid. Nu is, volgens de vroegere onderstelling, als f eene standvastige is, de wrijvings-arbeid

in K $= \frac{r - r_1}{r} \frac{b - x}{b} L f d\gamma,$

in H $= \frac{b - x}{b} L f d\gamma,$

in F $= \frac{r_1}{r} \frac{b - x}{b} L f (d\gamma - d\delta),$

in E $= \frac{x}{b} L f d\delta,$

in D $= \frac{r_1}{r} \frac{b - x}{b} L f (d\phi + d\delta),$

in C $= \frac{x}{b} L f (d\phi + d\delta),$

in B $= \left(G + \frac{r_1}{r} L + \frac{r - r_1}{r} \frac{x}{b} L\right) f d\phi,$

en in A $= G f d\phi;$

terwijl de arbeid, door het overwigt veroorzaakt, gelijk is aan

$$G_1 a d\phi.$$

Derhalve is, met verwaarloozing van $d\delta$, — welke grootheid blijkens (20) voor oneindig kleine waarden van ϕ, γ en $90° - \delta$, oneindig klein is met betrekking tot $d\phi$ en $d\gamma$ [1]), —

$$G_1 = \frac{f}{a} \left\{ \frac{r - r_1}{r} \frac{b - x}{b} L \frac{d\gamma}{d\phi} + \frac{b - x}{b} L \frac{d\gamma}{d\phi} + \frac{r_1}{r} \frac{b - x}{b} L \frac{d\gamma}{d\phi} + \right.$$
$$\left. + \frac{r_1}{r} \frac{b - x}{b} L + \frac{x}{b} L + G + \frac{r_1}{r} L + \frac{r - r_1}{r} \frac{x}{b} L + G \right\},$$

of, met inachtneming van (16),

---

[1]) Gewoonlijk rusten de punten E van de stang CE en het bovenste raam niet door middel van een mes en een kussen op elkaar, maar door middel van een oog en een haak van zwaar ijzer. Uit de waarde van de wrijving in E blijkt, dat dit kan toegepast worden, zonder de gevoeligheid der bascule merkbaar te veranderen.

$$G_1 = \frac{f}{a}\left\{\frac{2}{r}\left[e + r_1 + \frac{x}{b}(r - e - r_1)\right] L + 2G\right\};$$

en dus voor $x = 0$,

$$G_{1_{x=0}} = \frac{2f}{a}\left\{\frac{(e + r_1)}{r} . L + G\right\}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (27)$$

en voor $x = b$,

$$G_{1_{x=b}} = \frac{2f}{a}\{L + G\};$$

en het verschil

$$G_{1_{x=b}} - G_{1_{x=0}} = \frac{2f}{a}\left\{\frac{r - e - r_1}{r}\right\} L.$$

Bij de bascule van Quintenz van gewone afmetingen is dit verschil zeker positief; en derhalve is er bepaald voordeel in gelegen, het zwaartepunt van den last zoo nabij mogelijk boven het punt H te doen vallen. Stellen wij b. v. $r = 4e = 6r_1$ en $G = \frac{1}{10} L$, dan bedraagt het verschil bijna de helft $G_{1_{x=b}}$.

Zij verder G_0 het gewigt der schaal in A, Z het gewigt van het juk, Z_1 dat van het raam, S_1 en S dat der stangen, B dat der brug, enz. als in § 4.

Door het gewigt der bewegende deelen worden dan de volgende drukkingen uitgeoefend.

in E $= \frac{c}{b} B$,

in H $= \frac{b - c}{b} B$,

in F $= \frac{r_1}{r} \frac{b - c}{b} B + \frac{z_1 \operatorname{Cos} \tau_1}{r} Z_1$,

in K $= \frac{r - r_1}{r} \frac{b - c}{b} B + \frac{r - z_1 \operatorname{Cos} \tau_1}{r} Z_1$,

in D $= \frac{r_1}{r} \frac{b - c}{b} B + \frac{z_1 \operatorname{Cos} \tau_1}{r} Z_1 + S$,

in C $= \frac{c}{b} B + S_1$,

in B $= \frac{r_1}{r} \frac{b - c}{b} B + \frac{z_1 \operatorname{Cos} \tau_1}{r} Z_1 + S + \frac{c}{b} B + S_1 + Z + G_0$ en

in A $= G_0$.

Berekenen wij het overwigt, dat noodig is, om de door deze drukkingen ontstane wrijving te overwinnen; dan vinden wij, dat dit gelijk is aan

$$\frac{2f}{a}\left\{\left[\frac{b-c}{b}\,\frac{e+r_1}{r}+\frac{c}{b}\right]B+\frac{e+2z_1\,Cos\,\tau_1}{2r}\,Z_1+S+S_1+\frac{Z}{2}+G_0\right\}.$$

Uit de laatste uitdrukking en uit (27) blijkt o. a., dat de wrijving kleiner wordt door a en r groot, daarentegen e en r_1 klein te nemen; wij dienen derhalve, indien wij de gevoeligheid der bascule groot willen maken, $e_1 = \frac{e r_1}{r}$ zoo klein te nemen als de constructie der bascule toelaat. Eene gelijke uitkomst betrekkelijk e_1 hebben wij reeds gevonden aan het eind der vorige paragraaf.

---

§ 8.

Onderzoek naar den invloed van kleine fouten in de constructie der bascule op de onafhankelijkheid van het evenwigt en de gevoeligheid van de plaats van den last op de brug.

Bij de basculen, die in den handel worden gebruikt, zullen zich steeds, in de ligging en de afmetingen der hefboomen en stangen, kleine onjuistheden voordoen; die ontstaan door het rekken en buigen der hefboomen en stangen, tijdens de belasting der brug; door het afslijten der messen en kussens; door het werken van het materiaal, waaruit de bascule is zamengesteld, of die hunne oorzaak hebhebben in eene fautieve constructie; ook ligt het punt E niet in de lijn BF, zooals in fig. V, maar de stangen CE en DF zijn, als in fig. II, ongeveer even lang.

Wij zullen daarom thans onderzoeken, welken invloed deze afwijkingen van den ideaalvorm op de bovengenoemde onafhankelijkheid hebben. Wij gaan daarbij uit van de onderstelling, dat getracht is de bascule zoodanig te construeeren, dat in den normaalstand $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha = 0$, $\phi = 0$, $\gamma = 0$ en $\delta_1 = \delta = 90°$ is.

a. Het evenwigt.

Volgens (26) wordt de evenwigtsvergelijking tusschen L en G uitgedrukt door

$$L r_1\,Cos(\gamma+\alpha_2)\frac{d\gamma}{d\phi}+L x\,Cos\,\beta.\,\frac{d\beta}{d\phi}-G a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\phi)=0.$$

Nemen wij nu aan, dat de grootheden α, α_1, α_2, γ, ϕ, $90°-\delta$ en $90°-\delta_1$, oneindig klein zijn van de eerste orde, *en er voldaan*

wordt aan de gelijkheid $\frac{e_1}{e}=\frac{r}{r}$; dan gaat, met verwaarloozing der oneindig kleinen van de tweede orde, de laatste evenwigtsvergelijking, met inachtneming van (16), over in

$$\frac{Le_1}{Ga}=\frac{Sin(\delta-\gamma)}{Sin(\delta+\phi+\alpha_1)}\left\{1-\frac{Lx.Cos\beta}{Ga}\frac{d\beta}{d\phi}\right\};$$

terwijl (17) overgaat in

$$\frac{d\beta}{d\phi}=\frac{e_1}{b}\left\{\frac{Sin(\delta-\gamma).Sin(\delta_1+\phi)-Sin(\delta_1-\gamma-\alpha_2).Sin(\delta+\phi+\alpha_1)}{Sin(\delta_1-\beta).Sin(\delta-\gamma)}\right\}.$$

Daar nu elk der hoeken $(\delta-\gamma)$, $(\delta_1+\phi)$, $(\delta_1-\gamma-\alpha_2)$ en $(\delta+\phi+\alpha_1)$ oneindig weinig van 90°, en bijgevolg de Sinus van elk dier hoeken eene oneindig kleine grootheid van de tweede orde van de eenheid verschilt, zoo is blijkbaar — *onafhankelijk van de positieve of negatieve waarde van* β, *mits* $\delta-\beta$ *eene eindige grootheid voorstelle,* — de waarde der verhouding $\frac{d\beta}{d\phi}$ eene oneindig kleine grootheid van de tweede orde; waaruit volgt dat, *indien voldaan wordt aan de gelijkheid* $\frac{e_1}{e}=\frac{r_1}{r}$, de lengte van de stang CE, zie fig. II, en overigens kleine afwijkingen in de constructie der bascule, van geen merkbaren invloed zijn op de onafhankelijkheid van het evenwigt van de plaats van den last op de brug.

b. De gevoeligheid.

De gevoeligheid kan uit (4) worden afgeleid.

Daar zoo straks gebleken is, dat de waarde van $\frac{d\beta}{d\phi}$, bij de gestelde voorwaarden, eene oneindig kleine grootheid is van de tweede orde, zoo bepaalt alleen de term in (4), waarvan $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ een factor is, of de gevoeligheid afhankelijk is van de plaats van den last op de brug.

De uitdrukking voor $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ komt voor onder (19), in de onderstelling dat $\frac{d\beta}{d\phi}=0$ is, en is dus nu ook bruikbaar omdat $\frac{d\beta}{d\phi}$ van de tweede orde is; en daar, volgens de gestelde voorwaarden, blijkens (16) en (21), $d\delta_1$ oneindig klein is met betrekking tot $d\phi$ en $d\gamma$, zoo kunnen wij, met verwaarloozing der oneindig kleinen van hoogere dan de eerste orde, en na substitutie van (16) en (22), schrijven

$$b\,Sin(\delta_1-\beta)\frac{d^2\beta}{d\phi^2}=e_1\,Cos(\delta_1+\phi)+r_1\,Cos(\delta_1-\gamma-\alpha_2).\frac{e^2\,Sin^2(\delta+\phi+\alpha_1)}{r^2\,Sin^2(\delta-\gamma)}-$$

$$-r_1\,Sin(\delta_1-\gamma-\alpha_2)\,\frac{e\,Cos(\delta+\phi+\alpha_1)+r\,Cos(\delta-\gamma)\,\frac{e^2\,Sin^2(\delta+\phi+\alpha_1)}{r^2\,Sin^2(\delta-\gamma)}}{r\,Sin(\delta-\gamma)};$$

of, na substitutie van $\frac{e_1}{e}=\frac{r_1}{r}$, en verdere verwaarloozing der oneindig kleinen van hoogere dan de eerste orde,

$$\frac{d^2\beta}{d\phi^2}=\frac{e_1}{b\,Sin(\delta_1-\beta)}\Big\{Cos(\delta_1+\phi)-\frac{e}{r}\,Cos(\delta_1-\gamma-\alpha_2)-$$
$$-Cos(\delta+\phi+\alpha_1)-\frac{e}{r}\,Cos(\delta-\gamma)\Big\}.$$

Daar nu elk der termen van het laatste lid eene oneindig kleine grootheid is van de eerste orde, is ook $\frac{d^2\beta}{d\phi^2}$ zulk eene grootheid; waaruit volgt, dat kleine onjuistheden in de constructie der bascule, volgens de theorie, van invloed zullen zijn op de onafhankelijkheid van de gevoeligheid van de plaats van den last op de brug, *en dat te meer naarmate* β *tot* δ_1 *nadert;* d. w. z. indien de last eenmaal nabij het punt H, fig. II, en een andermaal nabij het punt F op de brug geplaatst wordt, dan zal — de wrijving buiten rekening latende — de verhouding der overwigten G_1 en G_2, die in de beide standen respectievelijk in de schaal moeten gelegd worden, om het juk van uit den normaalstand een zelfden hoek van doorslag mede te deelen, van de eenheid verschillen; terwijl het verschil G_1-G_2 kleiner wordt naarmate β digter bij nul valt.

Of echter het verschil in gevoeligheid *merkbaar* wezen zal, hangt af van de wrijving en van de waarde van de som der termen in het tweede lid van (6), vooral van de termen $Z_1\,z_1\,Sin\,\tau_1$ en $Z\,z\,Sin\,\tau$. Is de som hiervan of de wrijving betrekkelijk groot, dus de bascule niet zeer gevoelig, en zijn de fouten in de constructie klein, dan zal, bij een kleinen hoek van doorslag van het juk, het verschil in gevoeligheid in de verschillende punten der brug niet merkbaar wezen. Is daarentegen de som der termen $Z_1\,z_1\,Sin\,\tau_1$ en $Z\,z\,Sin\,\tau$ *zeer* klein, en de wrijving *zeer* gering, dus de bascule hoogst gevoelig; dan zal het verschil, bij aanzienlijke fouten in de constructie en een betrekkelijk grooten hoek van doorslag van het juk, stellig merkbaar zijn.

Daar echter in den gewonen handel niet de uiterste naauwkeurigheid verlangd wordt, maar het er vooral op aankomt met de bascule *snel* te kunnen wegen, zou eene te groote gevoeligheid dit werktuig

meestal onbruikbaar maken. Wij kunnen derhalve aannemen, dat indien bij eene goede handels-bascule — d. i. zulk eene, waarvan de gevoeligheid niet te groot is, — α_1, α_2, α, γ, ϕ, $90° - \delta$ en $90° - \delta_1$ in den normaalstand *zeer* klein zijn, de term $\frac{d^2 \beta}{d\phi^2}$ — onafhankelijk van de waarde van β — zoo klein zal wezen, dat de gevoeligheid, in de verschillende punten der brug, bij eenigen hoek van doorslag, niet merkbaar zal verschillen.

Uit het vorenstaande volgt dus, dat de bascule van Quintenz, waarbij de trekstangen, als in fig. II, ongeveer even lang zijn, wel zoo goed aan de voorwaarden voor eene goede weging kan voldoen, als de bascule, welke volgens fig. V is zamengesteld.

Blijkbaar blijven ook de uitkomsten, die in § 7 betrekkelijk de wrijving gevonden zijn, volkomen van toepassing, indien de trekstangen DF en CE, fig. II, ongeveer even lang zijn; en tevens wordt de kans van verschuiving der brug, bij eenigen hoek van doorslag van het juk, kleiner dan wanneer de stangen, als in fig. V, aanzienlijk in lengte verschillen; ook op grond hiervan is het dus beter, de bascule te construeeren volgens fig. II, dan volgens fig. V.

(*Wordt vervolgd.*)

PRIJSVRAAG 11,

OPGELOST DOOR

D. J. KORTEWEG.

Men vraagt het oppervlak te berekenen eener kegelvormige wig van Wallis met elliptisch grondvlak.

---

1. In eene aan deze oplossing toegevoegde Noot zullen wij aantoonen, dat alle scheeve oppervlakken door eene enkelvoudige integraal kunnen worden uitgedrukt. De daar te vinden algemeene formulen worden natuurlijk veel eenvoudiger voor een scheef oppervlak als de wig van Wallis, 't welk een richtvlak bezit, en begrensd is door een grond- en bovenvlak, — dit laatste overgegaan in een rechte lijn — die loodrecht op het richtvlak zijn aangebracht. Maar ook de afleiding der formulen zelve wordt eenvoudiger; dit is zoozeer het geval, dat het ons wenschelijk voorkwam tot eene zelfstandige behandeling van zulke scheeve oppervlakken over te gaan.

Laat dan fig. 1 een gedeelte van zulk een oppervlak voorstellen, begrepen tusschen grond- en bovenvlak en tusschen twee vlakken, evenwijdig aan het richtvlak, en van dit richtvlak op afstanden α en β verwijderd. Stellen in die figuur AC en BD twee opeenvolgende beschrijvende lijnen voor, dan mag de scheeve vierhoek ABCD als eene differentiaal van het scheeve oppervlak worden beschouwd.

Geven wij nu aan de hoekpunten van dien vierhoek de coördinaten

A	x_1,	y_1,	0;	C	x_1,	y_2,	z_2;
B	x_1+dx_1,	y_1+dy_1,	0;	D	x_1+dx_1,	y_2+dy_2,	z_2;

dan worden de coördinaten van eenig punt E, zoodanig gekozen dat

$$\frac{\text{AE}}{\text{AC}}=p,$$

aangewezen door

men, ingeval nog geene repeteering plaats heeft, de deeling niet voort te zetten; maar men completeere het repetendum, dat nu uit $p-1$ cijfers bestaan zal, met het verschil tusschen een getal met $\frac{p-1}{2}$ negens geschreven en het gevonden deel.

Op deze wijze komt men tot dien regel.

Volgens de beide lemna's zal $10^{\frac{p-1}{2}}+1$ door p deelbaar zijn, als $10^{\frac{p-1}{2}}-1$ het *niet* is.

$10^{p-1}-1$ kan natuurlijk niet ontbonden worden in twee geheele factoren, waarvan één den vorm $10^{\alpha}-1$ heeft, en $\alpha > \frac{p-1}{2}$, zoodat het repetendum uit $p-1$ cijfers bestaan zal, indien blijkt, dat het met meer dan $\frac{p-1}{2}$ cijfers wordt geschreven.

In dit geval is $a\left(10^{\frac{p-1}{2}}+1\right)$ of $a.10^{\frac{p-1}{2}}+a$ door p deelbaar, en daar $a.10^{\frac{p-1}{2}}$ een getal is, waarin a gevolgd is van $\frac{p-1}{2}$ nullen, zullen er door deeling van $a.10^{\frac{p-1}{2}}$ door p ook $\frac{p-1}{2}$ cijfers van 't repetendum gevonden worden, en wijl er „a" te kort komt, om de deeling te doen opgaan, zal er $p-a$ tot rest overblijven.

$a.10^{\frac{p-1}{2}}$, door p gedeeld, geeft bijv. $bcd\ldots m$ tot quotient met de rest $p-a$. Daar er nu nog $\frac{p-1}{2}$ cijfers van het quotient moeten bepaald worden, zal $(p-a).10^{\frac{p-1}{2}}$ door p gedeeld wordende die overige cijfers doen kennen. M. a. w.: ik haal nog $\frac{p-1}{2}$ nullen bij en deel door.

$(p-a).10^{\frac{p-1}{2}} = 10^{\frac{p-1}{2}} \times p - a \times 10^{\frac{p-1}{2}}$ geeft bij deeling door p tot quotient: $10^{\frac{p-1}{2}} - \left(bcd\ldots m + \frac{p-a}{p}\right)$ of $10^{\frac{p-1}{2}}-1-bcd\ldots m+\frac{a}{p}$, zoodat de rest a is en er nu repeteering zal plaats hebben.

$10^{\frac{p-1}{2}}-1$ is een getal met $\frac{p-1}{2}$ negens geschreven; $bcd\ldots m$ bevat evenveel cijfers. Het gestelde is dus bewezen.

$$\text{Inh. ABCD} = \frac{dx_1^2}{dy_2 - dy_1}\int_{\frac{dy_1}{dx_1}}^{\frac{dy_2}{dx_1}} \sqrt{(y_1-y_2)^2+z_2^2+r^2 z_2^2}\,.\,dr;$$

maar deze integraal is gemakkelijk te vinden. Men heeft namelijk in het algemeen

$$\int \sqrt{A+Br^2}\,dr = \tfrac{1}{2}r\sqrt{A+Br^2} + \tfrac{1}{2}\frac{A}{\sqrt{B}}\,l(r\sqrt{B}+\sqrt{A+Br^2}) + C;$$

en derhalve is Inh. ABCD $=$

$$\frac{\left\{\begin{array}{c} dy_2\sqrt{\{(y_1-y_2)^2+z_2^2\}dx_1^2+z_2^2 dy_2^2}\,- \\ -\,dy_1\sqrt{\{(y_1-y_2)^2+z_2^2\}dx_1^2+z_2^2 dy_1^2}\,+ \\ +\,\dfrac{(y_1-y_2)^2+z_2^2}{z_2}dx_1^2\,l\,\dfrac{z_2 dy_2+\sqrt{\{(y_1-y_2)^2+z_2^2\}dx_1^2+z_2^2 dy_2^2}}{z_2 dy_1+\sqrt{\{(y_1-y_2)^2+z_2^2\}dx_1^2+z_2^2 dy_1^2}} \end{array}\right\}}{2(dy_2-dy_1)}.$$

Indien men stelt

$$L = (y_1-y_2)^2+z_2^2,$$

dan zal dus het gevraagde oppervlak worden aangegeven door

$$O = \int_\alpha^\beta \frac{\left\{\begin{array}{c} \dfrac{dy_2}{dx_1}\sqrt{L+z_2^2\dfrac{dy_2^2}{dx_1^2}} - \dfrac{dy_1}{dx_1}\sqrt{L+z_2^2\dfrac{dy_1^2}{dx_1^2}}\,+ \\ +\,\dfrac{L}{z_2}\,l\,\dfrac{z_2\dfrac{dy_2}{dx_1}+\sqrt{L+z_2^2\dfrac{dy_2^2}{dx_1^2}}}{z_2\dfrac{dy_1}{dx_1}+\sqrt{L+z_2^2\dfrac{dy_1^2}{dx_1^2}}} \end{array}\right\}}{2\left(\dfrac{dy_2}{dx_1}-\dfrac{dy_1}{dx_1}\right)}\,dx_1,$$

waarin z_2 eene standvastige, en y_1 en y_2 gegevene functiën van x_1 voorstellen.

Natuurlijk zal deze integraal — even als de meer algemeene voor een willekeurig scheef oppervlak — slechts hoogst zelden voor rechtstreeksche berekening geschikt zijn, en zal in den regel volgens eene benaderingsmethode moeten gevonden worden.

2. Voor het gevraagde oppervlak van de wig van Wallis gaat de kromme, die het bovenvlak begrenst, over in een enkele rechte lijn, die evenwijdig aan de x as, in het vlak der XOZ op een hoogte h kan worden geplaatst. Alsdan is

$$y_2 = 0,\ \frac{dy_2}{dx_1} = 0,\ \mathrm{L} = y_1^{\,2} + h^2,\ z_2 = h;$$

en derhalve

$$\mathrm{O} = \int_\alpha^\beta \frac{\left\{ \begin{array}{c} h\dfrac{dy_1}{dx_1}\sqrt{y_1^{\,2}+h^2+h^2\dfrac{dy_1^{\,2}}{dx_1^{\,2}}} - \\ -(y_1^{\,2}+h^2)\, l\, \dfrac{\sqrt{y_1^{\,2}+h^2}}{h\dfrac{dy_1}{dx_1}+\sqrt{y_1^{\,2}+h^2+h^2\dfrac{dy_1^{\,2}}{dx_1^{\,2}}}} \end{array} \right\}}{2h\dfrac{dy_1}{dx_1}}\, dx_1.$$

Wat het grondvlak betreft, zal men — althans indien de projectie der scherpe kant van de wig op het grondvlak met de kleine of groote as der ellips samenvalt — mogen stellen

$$x_1 = a\, Sin\,\psi,\quad y_1 = b\, Cos\,\psi;$$

immers met iedere waarde van ψ komt dan overeen een punt, behoorende tot de ellips

$$\frac{x_1^{\,2}}{a^2} + \frac{y_1^{\,2}}{b^2} = 1.$$

Men heeft dan

$$dx_1 = a\, Cos\,\psi\, d\psi,\ dy_1 = -b\, Sin\,\psi\, d\psi;$$

en men vindt dus, indien men nog opmerkt, dat het geheele oppervlak gelijk is aan viermaal het oppervlak van een der kwadranten,

$$\mathrm{O} = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 b^2 Cos^4\psi + a^2 h^2 Cos^2\psi + b^2 h^2 Sin^2\psi}\, d\psi +$$

$$+ \frac{2a^2}{bh}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{Cos\ \psi}{Sin\,\psi}(b^2 Cos^2\psi + h^2) \times$$

$$l\, \frac{a\, Cos\,\psi . \sqrt{b\ \ Cos^2\psi + h^2}}{-bh\, Sin\psi + \sqrt{a^2 b^2 Cos^4\psi + a^2 h^2 Cos^2\psi + b^2 h^2 Sin^2\psi}}\, d\psi.$$

Stelt men hierin

$$Cos\,\psi = z,$$

dan vindt men eindelijk

$$\mathrm{O} = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{a^2 b^2 z^4 + b^2 h^2 + z^2 h^2 (a^2 - b^2)}{1 - z^2}}\, dz +$$

$$+ \frac{2a^2}{bh}\int_0^1 \frac{z^2 (b^2 z^2 + h^2)}{1 - z^2}\, l\, \frac{az\sqrt{b^2 z^2 + h^2}}{-bh\sqrt{1 - z^2} + \sqrt{a^2 b^2 z^4 + b^2 h^2 + z^2 h^2 (a^2 - b^2)}}\, dz.$$

Van deze beide integralen kan de eerste tot eene elliptische integraal worden overgebracht. Men kan daartoe in de eerste plaats substitueeren

$$z^2 = u;$$

dan is

$$A = \int_0^1 \sqrt{\frac{a^2 b^2 z^4 + b^2 h^2 + z^2 h^2 (a^2 - b^2)}{1 - z^2}}\, dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{a^2 b^2 u^2 + b^2 h^2 + u h^2 (a^2 - b^2)}{u(1-u)}}\, du.$$

Vervolgens maakt men den noemer rationeel door de substitutie

$$\sqrt{u(1-u)} = u z',$$

waaruit volgt

$$u = \frac{1}{1 + z'^2}, \quad 1 - u = \frac{z'^2}{1 + z'^2}, \quad du = -\frac{2 z' dz'}{(1 + z'^2)^2};$$

$$A = \int_0^\infty \frac{dz'}{(1 + z'^2)^2} \sqrt{a^2 b^2 + h^2 (a^2 - b^2)(1 + z'^2) + h^2 b^2 (1 + z'^2)^2},$$

welke uitdrukking tot de elliptische integralen behoort.

Men zal echter te vergeefs beproeven, ook de tweede integraal onder deze afdeeling te huis te brengen; en er zal dus in het algemeen niets anders te doen overblijven dan de toepassing van eene der bekende benaderingsmethoden, waarbij zich geene bijzondere moeilijkheden voor zullen doen.

3. Overigens kan men de verkregen uitkomst gemakkelijk aan eenige eenvoudige onderstellingen toetsen, namelijk aan de gevallen $a = 0$, $b = 0$ of $h = 0$. In al deze drie gevallen worden de verkregen formules onbepaald. In het eerste geval gaan ze over in

$$O_{a=0} = 2bh \int_0^1 dz - \frac{2}{bh} \int_0^1 \frac{z^2 (b^2 z^2 + h^2)}{1 - z^2} \times \left\{ lim.\ a^2\, l\, a \right\} dz;$$

zooals duidelijk blijkt, indien men de uitdrukking

$$l \frac{a z \sqrt{b^2 z^2 + h^2}}{-bh\sqrt{1 - z^2} + \sqrt{a^2 b^2 z^4 + b^2 h^2 + z^2 h^2 (a^2 - b^2)}},$$

vooraf herleidt tot

$$l \left\{ \frac{bh\sqrt{1 - z^2} + \sqrt{a^2 (b^2 z^2 + h^2) z^2 + b^2 h^2 (1 - z^2)}}{z \sqrt{(b^2 z^2 + h^2)}} \right\} - l(a),$$

en in overeenstemming daarmede de tweede integraal in de som van twee andere integralen ontleedt.

Nu is echter

$$lim.\, a^2\, l(a) = lim.\, \frac{l(a)}{a^{-2}} = \frac{a^{-1}}{-2\, a^{-3}} = 0,$$

en derhalve

$$O_{a=0} = 2\,b\,h,$$

't welk volkomen in overeenstemming is met eenvoudige meetkunstige beschouwingen. Het is immers duidelijk, dat voor $a = 0$ het oppervlak van de wig van Wallis overgaat in een dubbelen driehoek, die $2\,b$ tot basis en h tot hoogte heeft.

Op gelijke wijze vindt men

$$O_{b=0} = 2\,a\,h \int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} + 2\,a^2\,h \int_0^1 \frac{z^2}{1-z^2}$$

$$\left\{ lim.\, \frac{l[az\sqrt{b^2z^2+h^2}] - l[-bh\sqrt{1-z^2} + \sqrt{a^2b^2z^4+b^2h^2+z^2h^2(a^2-b^2)}]}{b} \right\} dz,$$

waarbij de uitdrukking binnen het limietteeken den onbepaalden vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt, en dus zal moeten gevonden worden door differentiatie van teller en noemer naar b. Zij bekomt dan tot waarde

$$\frac{\dfrac{a\,b\,z^3}{\sqrt{b^2\,z^2+h^2}}}{a\,z\sqrt{b^2\,z^2+h^2}} - \frac{-h\sqrt{1-z^2} + \dfrac{b\,(a^2\,z^4+h^2-z^2\,h^2)}{\sqrt{a^2\,b^2\,z^4+b^2\,h^2+z^2\,h^2\,(a^2-b^2)}}}{-b\,h\sqrt{1-z^2} + \sqrt{a^2\,b^2\,z^4+b^2\,h^2+z^2\,h^2\,(a^2-b^2)}},$$

welke uitdrukking voor $b = 0$ gelijk is aan

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{a\,z}.$$

Substitueert men dit in $O_{b=0}$, dan verkrijgen beide termen van deze uitdrukking gelijke waarde, en men heeft

$$O_{b=0} = 4\,a\,h \int_0^1 \frac{z\,dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4\,a\,h;$$

't geen zich weer meetkunstig eenvoudig verklaren laat. Immers voor $b = 0$ gaat de wig over in een dubbelen rechthoek, met de hoogte h en de basis $2\,a$.

Is eindelijk $h = 0$, dan vindt men

$$O_{h=0} = 2\,a\,b \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{\sqrt{1-z^2}} + 2\,a^2\,b \int_0^1 \frac{z^4}{1-z^2}$$

$$\left\{ lim.\, \frac{l[az\sqrt{b^2z^2+h^2}] - l[-bh\sqrt{1-z^2} + \sqrt{a^2b^2z^4+b^2h^2+z^2h^2(a^2-b^2)}]}{h} \right\} dz.$$

Behandelt men de onbepaalde uitdrukking nu weder op dezelfde wijze, dan zal men vinden, dat de beide termen aan elkander gelijk worden, en dat

$$O_{h=0} = 4ab\int_0^1 \frac{z^2 dz}{\sqrt{1-z^2}} = 4ab\int_0^{\frac{1}{2}\pi} Sin^2\phi\, d\phi = ab\pi;$$

maar het is ook duidelijk dat voor $h = 0$ de oppervlakte van de wig moet overgaan in die van zijn grondvlak.

NOOT OVER SCHEEVE OPPERVLAKKEN,

DOOR

D. J. KORTEWEG.

1. Ten einde aan te toonen, dat de berekening van scheeve oppervlakken altijd tot eene enkelvoudige integratie terug te voeren is, nemen wij aan, dat een gedeelte van zulk een oppervlak begrensd wordt door twee uiterste beschrijvende lijnen en door twee willekeurige krommen, die van de tusschengelegen lijnen bepaalde stukken afsnijden.

Laten dan x_1, y_1, z_1 en x_2, y_2, z_2 twee correspondeerende punten van die kromme lijnen voorstellen, dat wil zeggen, twee punten, die de beide uiteinden eener zelfde beschrijvende lijn aanwijzen; dan zal deze lijn en de lijn, die de punten x_1+dx_1, y_1+dy_1, z_1+dz_1, x_2+dx_2, y_2+dy_2, z_2+dz_2 tot uiteinden heeft, een scheeven vierhoek begrenzen, die als differentiaal van het scheeve oppervlak kan worden beschouwd.

Kiest men nu twee punten

A . . . . . $x_1+p(x_2-x_1)$, $y_1+p(y_2-y_1)$, $z_1+p(z_2-z_1)$,

en

B . . . . . $x_1+p(x_2-x_1)+dp(x_2-x_1)$, $y_1+p(y_2-y_1)+dp(y_2-y_1)$,
$z_1+p(z_2-z_1)+dp(z_2-z_1)$,

op de eerste beschrijvende lijn, en twee andere punten C en D op

de tweede, zoodanig dat A en C, B en D respectievelijk de beschrijvende lijnen, waarop ze gelegen zijn, in dezelfde rede verdeelen; dan zijn de coördinaten van deze punten C en D, met verwaarloozing der differentialen van de tweede orde,

van C $\quad x_1+dx_1+p(x_2-x_1)+p(dx_2-dx_1),$
$y_1+dy_1+p(y_2-y_1)+p(dy_2-dy_1),$
$z_1+dz_1+p(z_2-z_1)+p(dz_2-dz_1),$

en van D $\quad x_1+dx_1+p(x_2-x_1)+p(dx_2-dx_1)+dp(x_2-x_1),$
$y_1+dy_1+p(y_2-y_1)+p(dy_2-dy_1)+dp(y_2-y_1),$
$z_1+dz_1+p(z_2-z_1)+p(dz_2-dz_1)+dp(z_2-z_1);$

waarbij dan het scheeve vierhoekje ABDC beschouwd kan worden als differentiaal van den scheeven vierhoek, tusschen de twee opvolgende lijnen begrepen.

De inhoud van het scheeve vierhoekje ABDC kan nu echter weer berekend worden uit die zijner drie projectiën. Met behulp eener licht begrijpelijke notatie kan de inhoud der projectie, op het XOY-vlak, voorgesteld worden door

$$d^2 I_z = \tfrac{1}{2}\left[(y_D-y_A)(x_C-x_B)-(y_C-y_B)(x_D-x_A)\right],$$

waarvoor dan, blijkens de zoo even aangegeven waarden dezer coördinaten, geschreven worden kan

$$d^2 I_z = \tfrac{1}{2}\left[\{dy_1+p(dy_2-dy_1)+dp(y_2-y_1)\}\{dx_1+p(dx_2-dx_1)-dp(x_2-x_1)\}-\right.$$
$$\left.-\{dy_1+p(dy_2-dy_1)-dp(y_2-y_1)\}\{dx_1+p(dx_2-dx_1)+dp(x_2-x_1)\}\right],$$

of ook

$$d^2 I_z = \{dx_1+p(dx_2-dx_1)\}(y_2-y_1)dp-\{dy_1+p(dy_2-dy_1)\}(x_2-x_1)dp,$$

of eindelijk

$$d^2 I_z = [\{(dx_2-dx_1)(y_2-y_1)-(dy_2-dy_1)(x_2-x_1)\}p+$$
$$+dx_1(y_2-y_1)-dy_1(x_2-x_1)]\,dp.$$

Door letterverwisseling vindt men daarop $d^2 I_y$ en $d^2 I_x$, en besluit daaruit dan ten slotte

$$d^2 I = \sqrt{\mathfrak{A}p^2+2\mathfrak{B}p+\mathfrak{C}}\;dp,$$

waarin

$$\mathfrak{A} = [(dx_2-dx_1)(y_2-y_1)-(dy_2-dy_1)(x_2-x_1)]^2+$$
$$+[(dy_2-dy_1)(z_2-z_1)-(dz_2-dz_1)(y_2-y_1)]^2+$$
$$+[(dz_2-dz_1)(x_2-x_1)-(dx_2-dx_1)(z_2-z_1)]^2,$$

$$\mathfrak{B}=[(dx_2-dx_1)(y_2-y_1)-(dy_2-dy_1)(x_2-x_1)]\times$$
$$\times[dx_1(y_2-y_1)-dy_1(x_2-x_1)]+$$
$$+[(dy_2-dy_1)(z_2-z_1)-(dz_2-dz_1)(y_2-y_1)]\times$$
$$\times[dy_1(z_2-z_1)-dz_1(y_2-y_1)]+$$
$$+[(dz_2-dz_1)(x_2-x_1)-(dx_2-dx_1)(z_2-z_1)]\times$$
$$\times[dy_1(x_2-x_1)-dx_1(z_2-z_1)],$$
$$\mathfrak{C}=[dx_1(y_2-y_1)-dy_1(x_2-x_1)]^2+[dy_1(z_2-z_1)-dz_1(y_2-y_1)]^2+$$
$$+[dz_1(x_2-x_1)-dx_1(z_2-z_1)]^2.$$

Let men nu op de beteekenis van p, dan wordt de scheeve vierhoek, die begrepen is tusschen twee opeenvolgende beschrijvende lijnen, berekend uit

$$dI=\int_0^1 d^1 I=\int_0^1 \sqrt{\mathfrak{A}p^2+2\mathfrak{B}p+\mathfrak{C}}\,dp.$$

Deze integraal is echter bekend, en men vindt

$$dI=\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}\sqrt{\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}+\mathfrak{C}}-\frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}\sqrt{\mathfrak{C}}+$$
$$+\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C}-\mathfrak{B}^2}{2\mathfrak{A}\sqrt{\mathfrak{A}}}\,l\,\frac{\mathfrak{B}+\mathfrak{A}+\sqrt{\mathfrak{A}(\mathfrak{A}+2\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{\mathfrak{B}+\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}}.$$

Wenscht men nu ten slotte tot de berekening van een bepaald gedeelte van het oppervlak over te gaan, dan zullen daartoe x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 in functie eener zelfde veranderlijke t bekend moeten zijn. Is dan t_0 de begin- en T de eindwaarde dezer veranderlijke, d. w. z. zijn dat de waarden, waarvoor de eindpunten gevonden worden van de beide beschrijvende lijnen, die met de beide gegeven krommen het gevraagde gedeelte van het oppervlak begrenzen; dan is

$$I=\int_{t_0}^{T}\frac{dI}{dt}\,dt,$$

welke laatste integratie dan echter wel hoogst zelden zal kunnen worden uitgevoerd.

2. Heeft het scheeve oppervlak het vlak der YOZ tot richtvlak, dan is

$$dx_2=dx_1;\quad x_2=x_1;$$

liggen bovendien de beide begrenzende krommen in vlakken, evenwijdig met het XOY-vlak, dan is ook nog

$$dz_2=dz_1=0;$$

en valt eindelijk een dezer vlakken met het XOY-vlak zamen, dan is

$$z_1=0.$$

Men heeft dan

$$\mathfrak{A} = (dy_2 - dy_1)^2 z_2^2,$$
$$\mathfrak{B} = (dy_2 - dy_1) dy_1 z_2^2,$$
$$\mathfrak{C} = dy_1^2 . z_2^2 + dx_1^2 (y_2 - y_1)^2 + dx_1^2 . z_2^2;$$

waaruit, indien men weder stelt

$$L = (y_1 - y_2)^2 + z_2^2,$$

de in den tekst gevonden formule voor een zoodanig scheef oppervlak zonder eenige moeite kan worden afgeleid.

Wenscht men voorts de algemeene formule toegepast te zien op een voorbeeld, waarbij ook de laatste integratie kan worden uitgevoerd, dan neme men bijv.

$$x_1 = r \, Sin \, \phi, \quad y_1 = r \, Cos \, \phi, \quad z_1 = h\phi,$$
$$x_2 = R \, Sin (\phi + \alpha), \quad y_2 = R \, Cos (\phi + \alpha), \quad z_2 = h\phi + h_1,$$

waarbij ϕ als onafhankelijk veranderlijke dient.

Men heeft dan te doen met een soort verwrongen schroefvlak, 't welk voor $\alpha = 0$ in het gewone scheeve schroefvlak overgaat.

Voor dit oppervlak is, indien men stelt

$$\frac{R \, Cos \, \alpha - r}{R \, Sin \, \alpha} = Tg \, \beta,$$

$$x_2 - x_1 = \frac{R \, Cos(\phi - \beta) . Sin \, \alpha}{Cos \, \beta}, \quad y_2 - y_1 = - \frac{R \, Sin(\phi - \beta) . Sin \, \alpha}{Cos \, \beta}, \quad z_2 - z_1 = h_1;$$

derhalve

$$dx_2 - dx_1 = - \frac{R \, Sin (\phi - \beta) . Sin \, \alpha}{Cos \, \beta} d\phi,$$

$$dy_2 - dy_1 = - \frac{R \, Cos (\phi - \beta) . Sin \, \alpha}{Cos \, \beta} d\phi, \quad dz_2 - dz_1 = 0;$$

waaruit volgt

$$\mathfrak{A} = \left\{ \frac{R^4 \, Sin^4 \alpha}{Cos^4 \beta} + \frac{h_1^2 R^2 \, Sin^2 \alpha}{Cos^2 \beta} \right\} d\phi^2 =$$
$$= \frac{R^2 \, Sin^2 \alpha}{Cos^2 \beta} \left\{ \frac{R^2 \, Sin^2 \alpha}{Cos^2 \beta} + h_1^2 \right\} d\phi^2,$$

$$\mathfrak{B} = \left\{ \frac{r R^3 \, Sin^3 \alpha . Sin \beta}{Cos^3 \beta} + \frac{h_1^2 R \, Sin \, \alpha . Sin \, \beta}{Cos \, \beta} \right\} d\phi^2 =$$
$$= \frac{r R \, Sin \, \alpha \, Sin \, \beta}{Cos \, \beta} \left\{ \frac{R^2 \, Sin^2 \alpha}{Cos^2 \beta} + h_1^2 \right\} d\phi^2,$$

$$\mathfrak{C} = \left\{ \frac{r^2 R^2 \, Sin^2 \beta . Sin^2 \alpha}{Cos^2 \beta} + r^2 h_1^2 + \frac{h^2 R^2 \, Sin^2 \alpha}{Cos^2 \beta} + 2 h h_1 R r \, Sin \, \alpha \right\} d\phi^2;$$

derhalve, als wij nog stellen $\mathfrak{A} = a_1 d\phi$; $\mathfrak{B} = b_1 d\phi$, $\mathfrak{C} = c_1 d\phi$,

$$dI = \left\{ \frac{b_1 + a_1}{2a_1} \sqrt{a_1 + 2b_1 + c_1} - \frac{b_1}{2a_1} \sqrt{c_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 c_1 - b_1^2}{2a_1 \sqrt{a_1}} \, l \, \frac{b_1 + a_1 + \sqrt{a_1(a_1 + 2b_1 + c_1)}}{b_1 + \sqrt{a_1 c_1}} \right\} d\phi;$$

of eindelijk, daar de uitdrukking tusschen haakjes onafhankelijk is van ϕ, zooals dan ook vooraf te verwachten was,

$$I = \left\{ \frac{b_1 + a_1}{2a_1} \sqrt{a_1 + 2b_1 + c_1} - \frac{b_1}{2a_1} \sqrt{c_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_1 c_1 - b_1^2}{2a_1 \sqrt{a_1}} \, l \, \frac{b_1 + a_1 + \sqrt{a_1(a_1 + 2b_1 + c_1)}}{b_1 + \sqrt{a_1 c_1}} \right\} (\phi - \phi_0).$$

PRIJSVRAAG 12,

OPGELOST DOOR

D. J. KORTEWEG.

Een schijf met horizontaal plat bovenvlak wentelt met eene gegevene standvastige hoeksnelheid om eene verticale as. Als nu op die wentelende schijf, zonder eenigen schok, een bolletje neergelegd wordt, dat overigens door een onrekbaren, buigzamen en horizontaal gespannen draad aan de omwentelings-as bevestigd is, zonder dat eene rollende beweging van het bolletje in het minst belemmerd wordt, zal de wrijving der schijf tegen het bolletje dit in beweging brengen. De vraag is, hoeveel tijd er verloopen zal, eer het bolletje dezelfde hoeksnelheid heeft verkregen, die de draaijende schijf voortdurend bezit.

Het antwoord op deze prijsvraag zoude zeer eenvoudig kunnen gegeven worden. Het bolletje zal namelijk zonder rollende wrijving *nimmer* de hoeksnelheid aannemen, welke de draaiende schijf bezit. Behalve de beweging van het zwaartepunt van het bolletje, met kleinere hoeksnelheid dan die van de schijf, om de gegeven verticale as, zal namelijk nog eene rollende beweging om eene horizontale as ontstaan.

§ 1. Ten einde dit reeds vooraf waarschijnlijk te maken en bovendien een duidelijk inzicht in de te verwachten bewegingsverschijnselen te verkrijgen, behandelen wij vooraf een eenvoudiger vraagstuk; en onderstellen namelijk, dat de schijf een oneindig grooten straal bezit, met andere woorden, dat het bolletje geplaatst wordt op een plat vlak, 't welk zich met eene gegevene horizontale snelheid v voortbeweegt.

Laat dan fig. 1 het bolletje op een zeker oogènblik van de beweging voorstellen. Zijn straal zij r, terwijl v_1 de rechtlijnige beweging van zijn zwaartepunt, w zijn hoeksnelheid in positieven zin om eene horizontale as, loodrecht op het vlak van teekening, voorstelt. Ter wille van meerdere algemeenheid onderstellen wij een oogenblik, dat v of de snelheid van het bewegende vlak veranderlijk is.

De krachten, die op zoodanig oogenblik op het bolletje werkzaam kunnen zijn, bestaan 1° uit de zwaartekracht Mg, 2° uit eene horizontale kracht in de richting van de snelheid van de schijf, die wij voorstellen door U, 3° uit eene verticale reactiekracht.

Van deze drie heffen de eerste en de laatste elkander op. De tweede wordt in rekening gebracht door de beide bewegingsvergelijkingen

$$M \frac{dv_1}{dt} = U, \quad \ldots \ldots (1) \qquad T\frac{dw}{dt} = rU, \quad \ldots \ldots (2)$$

waarin T het traagheidsmoment voorstelt, 't welk — als bekend is — voor een bol gelijk is aan $\frac{2}{5} Mr^2$.

Nu zijn er twee gevallen te onderscheiden. Of er heeft wrijvingsarbeid plaats in het aanrakingspunt van vlak en bolletje, òf de beweging van het bolletje is ten opzichte van dit vlak eene zuiver rollende. In het eerste geval moet aan de beide vergelijkingen nog worden toegevoegd

$$U = Mgf; \quad \ldots \ldots (3^a)$$

in het tweede

$$wr + v_1 = v, \quad U < Mgf; \quad \ldots \ldots (3^b)$$

waarbij f de wrijvingscoëfficient voorstelt.

Duidelijk is het, dat bij een bolletje, dat, zonder eene wentelende beweging of eene horizontale snelheid te bezitten, op een voortbewegend vlak wordt geplaatst, zich aanvankelijk het eerste geval zal voordoen; en dat men zal hebben

$$\frac{dv_1}{dt} = gf, \quad \ldots \ldots (1^a) \qquad \frac{2}{5} r \frac{dw}{dt} = gf, \quad \ldots \ldots (2^a)$$

Zoolang deze eerste periode voortduurt, is dus, *geheel onafhankelijk van de snelheid, waarmede het vlak voortbeweegt,*

$$v_1 = gft; \quad \ldots\ldots\ldots (4^a) \qquad \frac{2}{5} wr = gft, \quad \ldots\ldots\ldots (5^a)$$

derhalve

$$v_1 + wr = \frac{7}{2} gft \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6^a)$$

Men ziet dus dat in deze eerste periode de grootheid

$$v_1 + wr,$$

voortdurend evenredig met den tijd zal toenemen. Op een gegeven oogenblik zal zij dus, als v veranderlijk is, *kunnen*, en, als v standvastig is, *moeten*, gelijk worden aan v; en daarmede kan dan de tweede periode — die der zuiver rollende beweging — intreden.

Voor die periode is blijkens (3^b)

$$r \frac{dw}{dt} + \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4^b)$$

derhalve onder toepassing van (1) en (2),

$$\frac{7}{2} \frac{U}{M} = \frac{dv}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5^b)$$

derhalve

$$U = \frac{2}{7} M \frac{dv}{dt}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6^b)$$

waarbij dan moet zijn

$$\frac{2}{7} M \frac{dv}{dt} < Mgf \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)^b$$

Indien derhalve een bolletje geplaatst wordt op een voortbewegend horizontaal vlak, dan zal aanvankelijk eene beweging ontstaan, die geheel onafhankelijk is van de beweging van het vlak, en waarbij steeds

$$U = Mgf.$$

Plotseling echter zal de schuivende beweging in een rollende overgaan; daarbij zal U dan op eens verkrijgen de waarde

$$U = \frac{2}{7} M \frac{dv}{dt};$$

terwijl van dit oogenblik af de beweging eene zuiver rollende zal blijven, zoolang U de grens Mgf niet overtreedt.

§ 2. Nemen wij nu meer in het bijzonder v als eene standvastige aan, dan zal de eerste periode voortduren tot

$$\frac{7}{2} gft = v,$$

of tot

$$t = \frac{2}{7} \cdot \frac{v}{gf} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Op het oogenblik, dat deze periode verlaten wordt, is dus blijkens (4^a) en (5^a)

$$v_1 = \frac{2}{7} v, \dots\dots\dots (9) \qquad wr = \frac{5}{7} v; \dots\dots\dots\dots (10)$$

en gedurende de tweede periode blijven deze grootheden volkomen onveranderd, want dan is blijkens (6^b) de kracht U plotseling nul geworden.

§ 3. Gaan wij nu over tot de draaijende beweging van een schijf, waarbij het bolletje in het middelpunt vastgehouden wordt door een draad, welks lengte voorgesteld wordt door R; dan bezitten wij vooraf de zekerheid, dat voor $R = \infty$ de zoo even beschouwde beweging zal moeten te voorschijn treden, en het laat zich verwachten, dat ook dan nog beide perioden zullen blijven bestaan. Vooraf maken wij dus formulen op, die voor beide te gelijk zullen gelden.

Stellen wij namelijk door γ voor den hoek, dien de draad maakt met een horizontale lijn O X van standvastige richting (fig. 2), gaande door het middelpunt van de schijf; verder door ϕ, ψ en χ de hoeken van de *axe instantanée* — waarom het bolletje geacht kan worden op een gegeven oogenblik te wentelen — met drie assen, O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 van standvastige richting, evenwijdig met drie assen O X, O Y, O Z, gaande door het middelpunt van de schijf; door μ' den hoek, dien de wrijvingskracht U maakt met de lijn B C, evenwijdig aan de raaklijn aan den cirkel, volgens welke het middelpunt van het bolletje zich beweegt; door v de lineaire snelheid van de schijf ter plaatse, waar het bolletje deze raakt; door v_1 die van het middelpunt van het bolletje; en eindelijk door w de rotatie-snelheid om de *axe instantanée*; door S de spanning van het koordje; dan gelden voor het zwaartepunt van het bolletje de bewegingsvergelijkingen

$$M\frac{dv_1}{dt} = U \, Cos\,\mu', \; . \; . \; . \; (I_A) \qquad \frac{Mv_1^2}{R} = S + U \, Sin\,\mu' \; . \; . \; . \; (II_A)$$

Daarentegen wordt de draaijende beweging om het zwaartepunt gevonden met behulp van de bekende stelling, dat de aangroeijing van het moment van de hoeveelheid beweging, die eenig lichaam om eene gegevene as — gaande door het zwaartepunt — bezit, gelijk is aan het moment der elementaire impulsiën ten opzichte van diezelfde as. (Zie Delaunay, Mécanique Rationelle, ed. 1866, § 226).

Men weet namelijk, dat indien O Z eene willekeurige as voorstelt, gaande door het zwaartepunt van eenig lichaam, en w_z de projectie

van de rotatiesnelheid op deze as; dat alsdan het moment van de hoeveelheid beweging om deze as voorgesteld wordt door

$$\ldots\ldots w_z \Sigma m(x^2+y^2) - w_x \Sigma mxz - w_y \Sigma myz;$$

(zie weder Delaunay, § 242).

Voor den *bol* is echter ten opzichte van ieder assenstelsel

$$\Sigma mxy = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0,$$

$$\Sigma m(x^2+y^2) = \Sigma m(x^2+z^2) = \Sigma m(y^2+z^2) = \frac{2}{5} Mr^2;$$

zoodat voor de aangroeijing van de momenten der hoeveelheden beweging om de assen O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1, geschreven worden mag

$$\frac{2}{5} Mr^2\, d.w\, Cos\,\phi; \quad \frac{2}{5} Mr^2\, d.w\, Cos\,\psi; \quad \frac{2}{5} Mr^2\, d.w\, Cos\,\chi.$$

Evenzoo is het gemakkelijk, de momenten der elementaire impulsies om deze assen te berekenen. Men vindt daarvoor resp.

$$Ur\,Cos(\mu'+\gamma)dt, \quad Ur\,Sin(\mu'+\gamma)\,dt, \quad 0;$$

zoodat

$$\frac{2}{5} Mr^2\, d.w\, Cos\,\phi = Ur\,Cos(\mu'+\gamma)dt, \quad \ldots \quad (\mathrm{III_A})$$

$$\frac{2}{5} Mr^2\, d.w.Cos\,\psi = Ur\,Sin(\mu'+\gamma)dt, \quad \ldots \quad (\mathrm{IV_A})$$

$$d.w\, Cos\,\chi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{V_A})$$

Eindelijk kunnen wij, zoolang er althans nog verschuiving plaats heeft tusschen de schijf en het bolletje, zoolang dus de beweging nog geen zuiver rollende geworden is, nog ééne betrekking opstellen, die aanwijst dat de wrijvingskracht tegengesteld is aan de beweging van het raakpunt van het bolletje ten opzichte van het bewegende vlak.

De snelheid nu van de beweging van dit raakpunt in de beide richtingen BC en BF, ten gevolge van de draaijingen om de assen O_1X_1, O_1Y_1 en O_1Z_1 en van de beweging van het zwaartepunt, genomen ten opzichte van een stilstaand vlak, kan gemakkelijk gevonden worden door ieder dezer bewegingen afzonderlijk in aanmerking te nemen. Men vindt dan

volgens BF $\quad wr\,Cos\,\phi\,.\,Sin\,\gamma - wr\,Cos\,\psi\,.\,Cos\,\gamma,$

volgens BC $\quad v_1 + wr\,Cos\,\phi.\,Cos\,\gamma + wr\,Cos\,\psi\,.\,Sin\,\gamma.$

Neemt men echter de snelheid v van de bewegende schijf in aanmerking, dan zijn de snelheden van het raakpunt, ***ten opzichte van deze schijf***,

volgens BF $\quad wr\,Cos\,\phi\,.\,Sin\,\gamma - wr\,Cos\,\psi\,.\,Cos\,\gamma,$

tegengesteld aan BC $v - v_1 - w\,r\,Cos\,\phi\,.\,Cos\,\gamma - w\,r\,Cos\,\psi\,.\,Sin\,\gamma$;
waaruit; indien men deze beide snelheden samenstelt, onmiddelijk volgt

$$Tg\,\mu' = \frac{w\,r\,Cos\,\phi\,.\,Sin\,\gamma - w\,r\,Cos\,\psi\,.\,Cos\,\gamma}{v - v_1 - w\,r\,Cos\,\phi\,.\,Cos\,\gamma - w\,r\,Cos\,\psi\,.\,Sin\,\gamma} \quad \ldots\ldots (\mathrm{VI}^a_A)$$

Tevens is in de eerste periode (*a*)

$$U = M\,g\,f \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{VII}^a_A)$$

In de tweede (*b*) daarentegen, bij zuiver rollende beweging, heeft men

$$w\,r\,Cos\,\phi\,.\,Sin\,\gamma - w\,r\,Cos\,\psi\,.\,Cos\,\gamma = 0, \ldots\ldots (\mathrm{VI}^b_A)$$

$$v - v_1 - w\,Cos\,\phi\,.\,Cos\,\gamma - w\,Cos\,\psi\,.\,Sin\,\gamma = 0 \quad \ldots (\mathrm{VII}^b_A)$$

§ 4. De eenige differentiaalvergelijking, vatbaar voor dadelijke integratie, is (V_A). Voert men daar de integratie uit, en let men op den initiaaltoestand van het kogeltje, dan ziet men dat gedurende de geheele beweging

$$w\,Cos\,\chi = 0.$$

Daar echter, behalve in den initiaaltoestand, w niet nul blijven kan, zoo moet men voortdurend hebben

$$Cos\,\chi = 0,$$

dus

$$\chi = 90°.$$

De AXE INSTANTANÉE *blijft gedurende de geheele beweging in beide perioden horizontaal.*

Een noodzakelijk gevolg hiervan is dat

$$\psi = 90° - \phi.$$

Maakt men van deze betrekkingen gebruik, en bedenkt men bovendien, dat de verg. (II_A) ter bepaling van de beweging volkomen onnut is, en slechts dienen kan, om de spanning van het koordje te berekenen; dan behoudt men de volgende *drie* vergelijkingen

$$M\frac{dv_1}{dt} = U\,Cos\,\mu'; \ \ldots (\mathrm{I}_B) \qquad \frac{d.w\,Cos\,\phi}{dt} = \frac{5\,U}{2\,M\,r}\,Cos(\mu' + \gamma); \ (\mathrm{II}_B)$$

$$\frac{d.w\,Sin\,\phi}{dt} = \frac{5\,U}{2\,M\,r}\,Sin(\mu' + \gamma); \ \ldots\ldots (\mathrm{III}_B)$$

waaraan gedurende de eerste periode moet toegevoegd worden

$$Tg\,\mu' = \frac{w\,r\,Sin(\gamma - \phi)}{v - v_1 - w\,r\,Cos(\gamma - \phi)} \quad \ldots\ldots (\mathrm{IV}^a_B)$$

of

$$(v - v_1)\,Sin\,\mu' = w\,r\,Sin(\gamma - \phi + \mu'),$$

en

$$U = M\,g\,f \ldots\ldots\ldots\ldots (\mathrm{V}^a_B)$$

In de tweede daarentegen — waarbij wij altijd nog het onderzoek harer mogelijkheid moeten voorbehouden, — vindt men

$$\Phi = \gamma, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (IV^b_B)$$

$$v = v_1 + wr \ldots\ldots\ldots\ldots (V^b_B)$$

§ 5. Alvorens eene der beide perioden in het bijzonder te beschouwen, laten wij de vergelijkingen (II), (III) nog eenige herleidingen ondergaan. Wij voeren daartoe de differentiatie naar t uit, zoodat

$$-w\,Sin\,\Phi\,\frac{d\Phi}{dt} + Cos\,\Phi\,\frac{dw}{dt} = \frac{5\,U}{2\,Mr}\,Cos\,(\mu' + \gamma),$$

$$+w\,Cos\,\Phi\,\frac{d\Phi}{dt} + Sin\,\Phi\,\frac{dw}{dt} = \frac{5\,U}{2\,Mr}\,Sin\,(\mu' + \gamma);$$

waarna wij beurtelings $\frac{d\Phi}{dt}$ en $\frac{dw}{dt}$ elimineeren.

Men vindt zoo

$$\frac{dw}{dt} = \frac{5\,U}{2\,Mr}\,Cos\,(\gamma - \Phi + \mu'), \ldots\ldots (II_C)$$

$$w\,\frac{d\Phi}{dt} = \frac{5\,U}{2\,Mr}\,Sin\,(\gamma - \Phi + \mu'); \ldots\ldots (III_C)$$

welke vergelijkingen desverkiezende in plaats van (II_B) en (III_B) gesteld zullen kunnen worden.

§ 6. Gaan wij thans over tot het onderzoek naar de mogelijkheid van de tweede periode, dan moeten wij beproeven gelijktijdig aan de vergelijkingen (I_B), (II_C), (III_C), (IV^b_B), (V_B) te voldoen. Dit zal noodig, maar aan den anderen kant ook voldoende, zijn om die mogelijkheid te bewijzen.

Nu volgt uit (II_C) en (IV^b_B),

$$\frac{dw}{dt} = \frac{5\,U}{2\,Mr}\,Cos\,\mu',$$

en uit (I_B)

$$M\,\frac{dv_1}{dt} = U\,Cos\,\mu';$$

uit beide te zamen derhalve

$$\frac{d(v_1 + wr)}{dt} = \frac{7\,U}{2\,M}\,Cos\,\mu';$$

maar, omdat blijkens (V^b_B) $v_1 + wr$ eene standvastige is,

$$\frac{7\,U}{2\,M}\,Cos\,\mu' = 0.$$

Daar nu hier kan genomen worden $U = 0$, of $Cos\,\mu' = 0$; en daar bovendien het geval $U = 0$, blijkens (III_C), nog gesplitst kan worden in de onderstellingen

$$w = 0 \text{ en } \frac{d\Phi}{dt} = 0;$$

zoo verkrijgen wij voorloopig *drie verschillende oplossingen.*

Eerste oplossing.

$$U = 0, \qquad w = 0.$$

Bij deze oplossing is blijkens (V_B^b)

$$v = v_1;$$

d. w. z. het bolletje zal *geene* wentelende beweging bezitten; maar daarentegen zal zijn zwaartepunt zich even snel als de schijf bewegen. De kracht S heft dan de middelpuntvliedende kracht op; en het is duidelijk, dat er zoo inderdaad een toestand ingetreden is, die geene verandering meer zal ondergaan, zoolang geen vreemde krachten in het spel komen.

Tweede oplossing.

$$U = 0, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Let men op de beteekenis van γ en van v_1, dan is ten duidelijkste

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v_1}{R};$$

men zal dan hebben

$$v_1 = 0,$$

en blijken (V_B^b)

$$wr = v.$$

Het bolletje zal dus op dezelfde plaats blijven; maar aldaar eene wentelende beweging bezitten, groot genoeg om de lineaire snelheid van het raakpunt met de schijf, gelijk aan die van de schijf te maken. Dewijl $\gamma = \Phi$, zoo is de as, waarom de wenteling geschiedt, naar het middelpunt van de schijf gericht. Inderdaad is er dan ook geen reden, waarom een zoodanige toestand, indien ze eenmaal ware ingetreden, verlaten zoude worden.

Derde oplossing.

$$Cos\,\mu' = 0, \text{ dus } \mu' = 90°.$$

In dat geval blijkt uit (I_B), dat v_1 eene standvastige geworden is; (II_C) wijst aan, dat ook w standvastig blijft. Uit (III_C) volgt, gecombineerd met (IV_B^b),

$$U = \frac{2}{5} M r w \frac{d\Phi}{dt} = \frac{2}{5} M r w \frac{d\gamma}{dt} = \frac{2 M r w v_1}{5 R}.$$

De volledige oplossing is dus vervat in de betrekkingen
$\gamma = \Phi$; $v = v_1 + wr$; $\mu' = 90°$; v_1 standvastig, w standvastig,

$$U = \frac{2Mrwv_1}{R}.$$

Het bolletje bezit dus in dit evenwichtsgeval eene wenteling om eene as, die blijkens $\gamma = \Phi$ voortdurend naar het middelpunt van de schijf gericht is; tevens beweegt zich het zwaartepunt met eene zekere hoeksnelheid, geringer dan die van de schijf, om de as OZ; terwijl de draaijing van de *axe instantanée*, die voor het voortduren van de beschreven beweging noodig is, verkregen wordt met behulp van de wrijvingskracht U, die thans gericht is naar het middelpunt van de schijf. Eenmaal zich op die wijze bewegende, is er weder geene reden, waarom die beweging wijziging ondergaan zoude.

§ 7. Vraagt men nu, tot welke van deze drie oplossingen de bewegingstoestand behooren zal, waarin een bolletje overgaat, 't welk oorspronkelijk in rust zijnde, op de draaijende schijf wordt neergezet; dan kan het antwoord niet twijfelachtig zijn. *Zeer zeker* zal zulk een bolletje gelijktijdig eene voortgaande en eene wentelende beweging aannemen; w en v_1 zullen beide geregeld toenemen tot de gelijkheid

$$v_1 + wr = v$$

vervuld is; waarmede dan de derde evenwichtstoestand ingetreden is.

Hiermede is nu letterlijk genomen het gestelde vraagstuk opgelost, daar het duidelijk blijkt, dat de hoeksnelheid van de beweging van het zwaartepunt van het bolletje nimmer aan die van de schijf gelijk worden zal, maar integendeel slechts tot eene fractie, bijv. indien de straal van de schijf groot is, tot bijna $\frac{2}{7}$ van die hoeksnelheid zal stijgen, om dan standvastig dezelfde waarde te behouden.

Vragen wij daarentegen thans, hoe lang het duren zal, eer die evenwichtstoestand ingetreden is; dan zal deze vraag wel niet anders dan bij benadering te beantwoorden zijn. Stelt men

$$\gamma - \Phi = \lambda;$$

neemt men in aanmerking, dat

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v_1}{R};$$

en substitueert men

$$U = Mgf;$$

dan verkrijgt men voor de bewegingsvergelijkingen

$$\frac{dv_1}{dt} = gf\,Cos\,\mu', \ldots (\mathrm{I}^a_{\mathrm{D}}) \qquad \frac{dwr}{dt} = \frac{5gf}{2}\,Cos\,(\mu'+\lambda), \ldots (\mathrm{II}^a_{\mathrm{D}})$$

$$wr\left(\frac{v_1}{R} - \frac{d\lambda}{dt}\right) = \frac{5gf}{2}\,Sin\,(\mu'+\lambda), \ldots\ldots (\mathrm{III}^a_{\mathrm{D}})$$

$$(v - v_1)\,Sin\,\mu' = wr\,Sin\,(\mu'+\lambda); \ldots\ldots\ldots (\mathrm{IV}^a_{\mathrm{D}})$$

waarin nu ieder der onbekende grootheden eene beteekenis heeft, geheel onafhankelijk van den hoek γ. Zoo is namelijk μ de hoek van de wrijvingskracht met de richting van de beweging van het zwaartepunt; λ de hoek van de *axe instantanée* met den straal van de schijf, die door het zwaartepunt gaat; v_1 de snelheid van het zwaartepunt; w de snelheid van wenteling om het zwaartepunt.

Daaruit vindt men dan gemakkelijk

$$\frac{d(v_1 + wr)}{dt} = gf\left(Cos\,\mu' + \frac{5}{2}\,Cos\,(\mu'+\lambda)\right);$$

en dewijl de grootheid $v_1 + wr$ ten slotte gelijk aan v worden moet, zoo wordt de gevraagde tijd voorgesteld door

$$t = \int_0^v \frac{d.(v_1 + wr)}{gf(Cos\,\mu' + \frac{5}{2}\,Cos\,(\mu'+\lambda)};$$

door welke formule, in verbinding met de formulen $(\mathrm{I}^a_{\mathrm{D}})$, $(\mathrm{II}^a_{\mathrm{D}})$, $(\mathrm{III}^a_{\mathrm{D}})$, $(\mathrm{IV}^a_{\mathrm{D}})$ het vraagstuk stelkundig is opgelost.

§ 8. Wil men in een gegeven voorbeeld eene rekenkundige oplossing vinden, dan zal men wel niet beter kunnen doen dan den verlangden tijd af te deelen in kleine perioden, en zoo de beweging van oogenblik tot oogenblik na te gaan.

Als benaderingsformulen kunnen dan dienen

$$\Delta v_1 = gf\,Cos\,\mu'.\Delta t, \quad \Delta wr = \frac{5gf}{2}\,Cos\,(\mu'+\lambda).\Delta t,$$

$$\Delta\lambda = \left(\frac{v_1}{R} - \frac{5gf}{2wr}\,Sin\,(\mu'+\lambda)\right)\Delta t,$$

$$Tg\,\mu' = \frac{wr\,Sin\,\lambda}{v - v_1 - wr\,Cos\,\lambda};$$

waarbij men goed zal doen, in de beide laatste formulen liever de gemiddelde waarde van v_1 en wr gedurende de korte periode, die men beschouwt, in aanmerking te nemen; welke men vinden kan, daar, vóór men deze beide formulen toepast, Δv_1 en Δwr wel reeds vooraf zullen berekend zijn.

OVER DE ONTWIKKELING EENER FUNCTIE IN EENE REEKS VAN COSINUSSEN,

DOOR

D^R. V. A. JULIUS.

Om tot de ontwikkeling te komen

$$\left.\begin{array}{ll} & f(x) = a_1 \, Sin\, x + a_2 \, Sin\, 2x + \ldots + a_m \, Sin\, m x + \ldots \\ \text{voor} & \pi > x > 0, \\ \text{waarin} & a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha)\, Sin\, m \alpha \, d\alpha, \\ & 0 < m < \infty, \end{array}\right\} \quad . \, (1)$$

beschouwt men dikwijls het volgende vraagstuk. Van de uitdrukking

$$f(x) = a_1 \, Sin\, x + a_2 \, Sin\, 2x + \ldots + a_{n-1} \, Sin\, (n-1) x,$$

zijn de coëfficienten $a_1, \; a_2, \ldots a_{n-1}$ te bepalen, zoodanig dat zij, voor de $n-1$ waarden van x

$$x = \frac{\pi}{n}, \quad x = \frac{2\pi}{n}, \quad x = \frac{(n-1)\pi}{n},$$

eene gegeven grootte bezit.

De oplossing is bekend.

Wil men geraken tot de ontwikkeling

$$\left.\begin{array}{ll} & f(x) = b_0 + b_1 \, Cos\, x + b_2 \, Cos\, 2x + \ldots + b_m \, Cos\, m x + \ldots \\ \text{voor} & \pi > x > 0, \\ \text{waarin} & b_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha)\, d\alpha, \\ & b_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\alpha)\, Cos\, m \alpha \, d\alpha, \\ & 0 < m < \infty, \end{array}\right\} \quad (2)$$

dan pleegt men van (1) uit te gaan.

De vraag kwam bij mij op, of men regtstreeks vergelijking (2) kan verkrijgen; met andere woorden, of men van de uitdrukking

$$f(x) = b_0 + b_1 \operatorname{Cos} x + b_2 \operatorname{Cos} 2x + \ldots + b_n \operatorname{Cos} n x \ldots \quad (3)$$

de coëfficienten $b_0, b_1, \ldots b_n$, zoodanig kan bepalen dat zij, voor de $n+1$ waarden van x

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{n}, \quad x = \frac{2\pi}{n}, \quad x = \frac{(n-1)\pi}{n}, \quad x = \pi,$$

eene gegeven grootte bezit.

De oplossing, zelfs de vermelding van dit vraagstuk, heb ik nergens ontmoet; daarom geef ik ze hier.

Wij hebben

$$f(0) = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_k + \ldots + b_n,$$

$$f\left(\frac{\pi}{n}\right) = b_0 + b_1 \operatorname{Cos}\frac{\pi}{n} + b_2 \operatorname{Cos} 2\frac{\pi}{n} + \ldots + b_k \operatorname{Cos} k\frac{\pi}{n} + \ldots + b_n \operatorname{Cos} n\frac{\pi}{n},$$

$$f\left(\frac{2\pi}{n}\right) = b_0 + b_1 \operatorname{Cos}\frac{2\pi}{n} + b_2 \operatorname{Cos} 2\frac{2\pi}{n} + \ldots + b_k \operatorname{Cos} k\frac{2\pi}{n} + \ldots + b_n \operatorname{Cos} n\frac{2\pi}{n},$$

$$f\left(\frac{n\pi}{n}\right) = b_0 + b_1 \operatorname{Cos}\frac{n\pi}{n} + b_2 \operatorname{Cos} 2\frac{n\pi}{n} + \ldots + b_k \operatorname{Cos} k\frac{n\pi}{n} + \ldots + b_n \operatorname{Cos} n\frac{n\pi}{n}.$$

Vermenigvuldigen wij de eerste betrekking met 2, de tweede met $2 \operatorname{Cos} m\frac{\pi}{n}$, de derde met $2 \operatorname{Cos} m\frac{2\pi}{n}$ enz., de $n+1^{ste}$ met $2 \operatorname{Cos} m\frac{n\pi}{n}$, en sommeeren we, dan krijgen we

$$2\sum_{l=0}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) \operatorname{Cos} m\frac{l\pi}{n} = \sum_{k=0}^{k=n} b_k \sum_{l=0}^{l=n} 2 \operatorname{Cos} k\frac{l\pi}{n} \cdot \operatorname{Cos} m\frac{l\pi}{n}.$$

Maar

$$\sum_{l=0}^{l=n} 2 \operatorname{Cos} k\frac{l\pi}{n} \cdot \operatorname{Cos} m\frac{l\pi}{n} = \sum_{l=0}^{l=n} \operatorname{Cos} l\frac{k-m}{n}\pi + \sum_{l=0}^{l=n} \operatorname{Cos} l\frac{k+m}{n}\pi =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Sin}\left[(k-m)\pi + \frac{k-m}{n}\frac{\pi}{2}\right]}{2 \operatorname{Sin}\frac{k-m}{n}\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{Sin}\left[(k+m)\pi + \frac{k+m}{n}\frac{\pi}{2}\right]}{2 \operatorname{Sin}\frac{k+m}{n}\frac{\pi}{2}}.$$

Dus

$$\sum_{l=0}^{l=n} 2 \operatorname{Cos} k\frac{l\pi}{n} \cdot \operatorname{Cos} m\frac{l\pi}{n} = 0 \text{ als } k-m \text{ oneven;}$$

$$= 2 \text{ als } k-m \text{ even en } > 0 \text{ of } < 0;$$

$$= n+2 \text{ als } k = m > 0;$$

$$= 2n+2 \text{ als } k = m = 0.$$

A. Wij stellen n even.

Wanneer dan ook m even is en > 0, zoo is

$$\sum_{k=o}^{k=n} b_k \sum_{l=o}^{l=n} 2 \operatorname{Cos} k \frac{l\pi}{n} . \operatorname{Cos} m \frac{l\pi}{n},$$

$$= (n+2)\, b_m + 2\,(b_0 + b_2 + \ldots + b_{m-2} + b_{m+2} + \ldots + b_n)$$
$$= n b_m + 2\,(b_0 + b_2 + \ldots + b_{m-2} + b_m + b_{m+2} + \ldots + b_n).$$

Voor $m = 0$ heeft men

$$\sum_{k=o}^{k=n} b_k \sum_{l=o}^{l=n} 2 \operatorname{Cos} k \frac{l\pi}{n} . \operatorname{Cos} m \frac{l\pi}{n} = 2\,n\,b_0 + 2\,(b_0 + b_2 + \ldots + b_n).$$

Wanneer m oneven,

$$\sum_{k=o}^{k=n} b_k \sum_{l=o}^{l=n} 2 \operatorname{Cos} k \frac{l\pi}{n} . \operatorname{Cos} m \frac{l\pi}{n} = n b_m + 2(b_1 + b_3 + \ldots + b_{n-1}).$$

Dus, indien p een geheel getal voorstelt,

$$\left.\begin{aligned}
&2 \sum_{l=o}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) = 2 n b_0 + 2\,(b_0 + b_2 + \ldots + b_n);\\
&2 \sum_{l=o}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) \operatorname{Cos} 2p \frac{l\pi}{n} = n b_{2p} + 2\,(b_0 + b_2 + \ldots + b_n);\\
&2 \sum_{l=o}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) \operatorname{Cos} (2p-1) \frac{l\pi}{n} = n b_{2p-1} + 2(b_1 + b_3 + \ldots + b_{n-1});\\
&\qquad\qquad 0 < p \leqq \frac{n}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

B. Wij stellen n oneven. Dan hebben we, indien p een geheel getal is,

$$\left.\begin{aligned}
&2 \sum_{l=o}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) = 2 n b_0 + 2\,(b_0 + b_2 + \ldots + b_{n-1});\\
&2 \sum_{l=o}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) \operatorname{Cos} 2p \frac{l\pi}{n} = n b_{2p} + 2\,(b_0 + b_2 + \ldots + b_{n-1}),\\
&\text{waarin} \qquad 0 < p < \frac{n+1}{2};\\
&2 \sum_{l=o}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) \operatorname{Cos} (2p-1) \frac{l\pi}{n} = n b_{2p-1} + 2(b_1 + b_3 + \ldots + b_n),\\
&\text{waarin} \qquad 0 < p \leqq \frac{n+1}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

In het geval A is

$$2(b_0+b_2+\ldots+b_n) \quad =f(0)+f(\pi),$$
$$2(b_1+b_3+\ldots+b_{n-1})=f(0)-f(\pi).$$

In het geval B

$$2(b_0+b_2+\ldots+b_{n-1})=f(0)+f(\pi),$$
$$2(b_1+b_3+\ldots+b_n) \quad =f(0)-f(\pi).$$

De vergelijkingen (4) en (5) kunnen dus, wanneer p een geheel getal is, zamengevat worden in

$$\left.\begin{aligned}
b_0 &= \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) - \frac{1}{2n}[f(0)+f(\pi)];\\
b_{2p} &= \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) \operatorname{Cos} 2p\frac{l\pi}{n} - \frac{1}{n}[f(0)+f(\pi)],\\
\text{waarin} &\qquad 0<p\leqq\frac{n}{2};\\
b_{2p-1} &= \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{l=n} f\left(\frac{l\pi}{n}\right) \operatorname{Cos}(2p-1)\frac{l\pi}{n} - \frac{1}{n}[f(0)-f(\pi)],\\
\text{waarin} &\qquad 0<p\leqq\frac{n+1}{2}.
\end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

Hiermede is het vraagstuk opgelost.

Hoe men nu uit (3) en (6) kan komen tot (2), ligt voor de hand. Het blijkt dan tegelijk, dat (2) ook geldt voor $x=0$ en $x=\pi$.

MERKWAARDIGE EIGENSCHAPPEN VAN EENEN DETERMINANT VAN DEN DERDEN GRAAD,

DOOR

D. B. WISSELINK.

Als de determinant van den 3$^{\text{den}}$ graad

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

de eigenschap heeft, dat de som der producten van de overeenkomstige termen van elk paar horizontale rijen *nul* is, en de som der kwadraten van de termen in elke horizontale rij is *één*; d. w. z. als van den bovenstaanden determinant gegeven is

$$\begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0, \qquad & a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 &= 1, \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0, & a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 &= 1, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0, & a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 &= 1; \end{aligned}$$

dan vertoont die determinant de volgende eigenschappen.

1. *Het kwadraat van den determinant is één.*

$$\text{Uit } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

volgt, volgens de vermenigvuldigings-methode van twee determinanten,

$$D^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix};$$

en volgens hetgeen van den determinant D gegeven is, hebben wij

$$D^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Als gevolg dezer eerste eigenschap hebben wij nu nog $D = \pm 1$.

2. *In den gegeven determinant D is de coëfficient van elk element gelijk aan dat element zelf.*

Nemen wij $D = 1$

of
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1,$$

en vermenigvuldigen wij de leden dezer vergelijking met $a_1 b_1 c_1$, dan vinden wij

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 \\ a_1 a_2 & b_1 b_2 & c_1 c_2 \\ a_1 a_3 & b_1 b_3 & c_1 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_1 c_1,$$

of
$$\begin{vmatrix} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 & b_1^2 & c_1^2 \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_2 & c_1 c_2 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_1 b_3 & c_1 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_1 c_1;$$

dus
$$\begin{vmatrix} 1 & b_1^2 & c_1^2 \\ 0 & b_1 b_2 & c_1 c_2 \\ 0 & b_1 b_3 & c_1 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_1 c_1, \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} b_1 b_2 & c_1 c_2 \\ b_1 b_3 & c_1 c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_1 c_1;$$

en na deeling door $b_1 c_1$ is
$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.$$

Hadden wij genomen $D = -1$, dan zouden wij langs denzelfden weg gevonden hebben $a_1 = - \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

3. *Dezelfde betrekkingen, die er in den determinant D tusschen de overeenkomstige termen van elk paar horizontale rijen, of tusschen de termen eener zelfde horizontale rij gegeven zijn, bestaan ook voor de vertikale rijen.*

Stellen wij in den determinant D den coëfficient van a_1 door A_1, die van b_1 door B_1 voor, enz. dan hebben wij

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = D.$$

Voor $D = 1$ is $A_1 = a_1$, $A_2 = a_2$, $A_3 = a_3$;

dus
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Was $D = -1$, dan is $A_1 = -a_1$, $A_2 = -a_2$, $A_3 = -a_3$;

dus
$$-a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = -1,$$

of ook weer
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Op dezelfde wijze blijkt natuurlijk

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \text{ en } c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

Uit de theorie der determinanten is verder bekend, dat in den gegeven determinant is

$$a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 = 0,$$

doch weer is $\quad B_1 = b_1,\ B_2 = b_2,\ B_3 = b_3,$

of $\quad B_1 = -b_1,\ B_2 = -b_2,\ B_3 = -b_3;$

dus in elk geval $\quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0;$

en volkomen op dezelfde wijze, vindt men

$$a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0,$$

en $\quad b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0.$

4. Wij hebben in de ruimte drie assen (OX, OY, OZ), die twee aan twee loodrecht op elkander staan, en wij veranderen de richting der assen, zoodat de nieuwe assen OX_1, OY_1, OZ_1 weer loodrecht elkander snijden.

Noemen wij de cosinussen van de hoeken, die OX_1 met de oude assen maakt, a_1, b_1, c_1; de cosinussen van de hoeken, die OY_1 met de oude assen maakt, a_2, b_2, c_2; en de cosinussen van de hoeken, waaronder OZ_1 de oude assen snijdt, a_3, b_3, c_3; terwijl we de nieuwe ordinaten voorstellen door x_1, y_1, z_1; en de oorspronkelijke door x, y, z; dan hebben wij de transformatie-formulen

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$
$$y_1 = a_2 x + b_2 y + c_2 z,$$
$$z_1 = a_3 x + b_3 y + c_3 z;$$

terwijl we tusschen de cosinussen der gegeven hoeken de betrekkingen hebben

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1 \end{array}\right\} \ldots (1) \qquad \left.\begin{array}{l} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0 \end{array}\right\} \ldots (2)$$

De vergelijkingen (1) drukken uit, dat de oude assen, en de vergelijking (2), dat de nieuwe assen loodrecht op elkander staan.

Uit deze zes vergelijkingen moet dus kunnen worden afgeleid

$$\left.\begin{array}{l} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1 \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \end{array}\right\} \ldots (3) \qquad \left.\begin{array}{l} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0 \\ a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 = 0 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = 0 \end{array}\right\}; \ldots (4)$$

want (3) drukt uit, dat de nieuwe, en (4), dat de oude assen loodrecht op elkander staan.

Door eene teekening volgen dan ook (3) en (4) onmiddellijk uit (1) en (2), en omgekeerd; doch tevens kan deze waarheid als in § 3 reeds bewezen beschouwd worden.

5. Als wij drie punten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, op het oppervlak eener ellipsoïde als de eindpunten van drie toegevoegde halve middellijnen beschouwen, en wij het middelpunt der ellipsoïde O noemen; stellen wij verder

$$OP_1 = \rho_1, \quad OP_2 = \rho_2, \quad OP_3 = \rho_3;$$

en geven wij de cosinussen van de hoeken, die OP_1 met de assen maakt, door α_1, β_1, γ_1; die OP_2 met de assen maakt, door α_2, β_2, γ_2; en die OP_3 met de assen vormt, door α_3, β_3, γ_3; dan is bekend

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2}{a^2} + \frac{\beta_1 \beta_2}{b^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{\alpha_1 \alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_1 \beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_1 \gamma_3}{c^2} = 0,$$

$$\frac{\alpha_2 \alpha_3}{a^2} + \frac{\beta_2 \beta_3}{b^2} + \frac{\gamma_2 \gamma_3}{c^2} = 0;$$

doch we hebben

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{\rho_1}, \quad \beta_1 = \frac{y_1}{\rho_1}, \quad \gamma_1 = \frac{z_1}{\rho_1},$$

$$\alpha_2 = \frac{x_2}{\rho_2}, \quad \beta_2 = \frac{y_2}{\rho_2}, \quad \gamma_2 = \frac{z_2}{\rho_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{x_3}{\rho_3}, \quad \beta_3 = \frac{y_3}{\rho_3}, \quad \gamma_3 = \frac{z_3}{\rho_3};$$

zoodat de drie vergelijkingen overgaan in

$$\frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 0, \qquad \frac{x_1 x_3}{a^2} + \frac{y_1 y_3}{b^2} + \frac{z_1 z_3}{c^2} = 0,$$

en

$$\frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} + \frac{z_2 z_3}{c^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De punten P_1, P_2, P_3 liggen op het oppervlak der ellipsoïde, en voldoen dus ook aan

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1 \,. \, (2)$$

Beschouwen wij nu den determinant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \end{vmatrix},$$

dan zijn van dezen determinant D de betrekkingen (1) en (2) gegeven; dus is

$$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} \end{vmatrix} = \pm 1, \quad \text{of} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \pm abc.$$

We weten, dat de laatste determinant zesmaal den inhoud van de pyramide voorstelt, waarvan de hoekpunten zijn O, P_1, P_2, P_3; of ook den inhoud van het parallelopipedum, waarvan OP_1, OP_2, OP_3 de drie ribben zijn; terwijl het product abc het parallelopipedum voorstelt onder de halve assen; derhalve volgt uit die laatste vergelijking, dat het parallelopipedum op drie toegevoegde middellijnen gelijk is aan dat op de drie assen der ellipsoïde.

Uit den determinant D, in verband met (1) en (2), volgt nog

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{x_3^2}{a^2} = 1, \quad \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1 \quad \text{en} \quad \frac{z_1^2}{c^2} + \frac{z_2^2}{c^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1,$$

of $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2$, $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2$ en $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2$.

Door samenstelling dezer drie vergelijkingen vinden wij

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

of
$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

d. w. z. de som der kwadraten van drie toegevoegde middellijnen is gelijk aan de som der kwadraten van de assen.

Nu van den determinant D de betrekkingen (1) en (2) gegeven zijn, is ook

$$\left(\frac{z_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{z_2}{c}\right)^2 + \left(\frac{z_3}{c}\right)^2 = 1,$$

of, volgens het bewezene in § 2,

$$\begin{vmatrix} \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} \end{vmatrix}^2 = 1,$$

dus
$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 = a^2 b^2,$$

Bedenken wij, dat in het vlak XY de eerste dezer determinanten den dubbelen inhoud voorstelt van den driehoek, die tot hoekpunten heeft O, $(x_2\, y_2)$, en $(x_3\, y_3)$, of den inhoud van een parallelogram, dat op twee zijden van dezen driehoek beschreven is; dan geeft de laatste vergelijking ons de eigenschap: de som der kwadraten van de projectien op het XY-vlak van de drie parallelogrammen, geconstrueerd

op drie toegevoegde middellijnen eener ellipsoïde, is gelijk aan het kwadraat van den rechthoek onder de assen in het XY-vlak.

Deze zelfde opmerking geldt ook voor de beide andere projectievlakken; en gemakkelijk vinden we dan nog deze stelling: de som der kwadraten van de parallelogrammen op drie toegevoegde middellijnen is gelijk aan de som der kwadraten op de drie assen der ellipsoïde.

6. Denken wij eene scheeve kromme te hebben. Noemen wij de cosinussen van de hoeken, welke de raaklijn in een punt P met de onderling loodrechte assen maakt, α_1, β_1 en γ_1; de cosinussen van de hoeken, onder welke de hoofdnormaal in P de assen snijdt, α_2, β_2 en γ_2; en stellen wij eindelijk de cosinussen van de hoeken, welke de poolas in P met de assen maakt, door α_3, β_3 en γ_3 voor; zij R de kromtestraal; dan is vooreerst bekend, dat deze drie lijnen loodrecht op elkander staan, m. a. w. van den determinant

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

is gegeven $\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2 = 1$, $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0$, enz.

Verder is bekend $\alpha_1 = \frac{dx}{ds}$, $\beta_2 = \frac{dy}{ds}$, $\gamma_1 = \frac{dz}{ds}$,

$$\alpha_2 = R\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = R\,\frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^3}, \text{ enz.}$$

Uit (1) volgt nu

$$\alpha_3 = \pm \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \pm(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1),$$

of $$\alpha_3 = \pm R\left(\frac{dy}{ds} \times \frac{ds\,d^2z - dz\,d^2s}{ds^3} - \frac{dz}{ds} \times \frac{ds\,d\,y - dy\,d^2s}{ds^3}\right),$$

of $$\alpha_3 = \pm \frac{R}{ds^4}(dy\,ds\,d^2z - dz\,ds\,d^2y),$$

$$\alpha_3 = \pm \frac{R}{ds^3}(dy\,d^2z - dz\,d^2y),$$

eene betrekking, die in den regel langs veel grooteren weg gevonden wordt.

Aanleiding tot het bovenstaande was een verhandeling, die men vindt in de „Nouvelles Annales de Mathématiques", onder redactie van Gerono en Bourget.

REGISTER, NAAR DE ONDERWERPEN GERANGSCHIKT, OP EENIGE WISKUNDIGE TIJDSCHRIFTEN.

MECHANICA.

J. V. CR. B. 80, S. 315, 316. Zusatz zu der Abhandlung zur Theorie der inneren Reibung. Von *O. G. Meijer.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 177—211. Grundzüge einer neuen Moleculartheorie unter Voraussetzung Einer Materie und Eines Kraftprincipes. Von *O. Simony.*

CL. M. ANN. B. 8, S. 31—34. Note über die Rotation eines starren Körpers. Von *W. Frahm.*

N. A. DE M. T. 14, p. 165—167. Question de Mécanique. Par M. *A. Tourrettes.*

id. p. 316—318. Concours d'Agrégation (Année 1874). Question de Mécanique. Par M. *A. Tourrettes.*

id. p. 318—323. Concours d'Agrégation (Année 1874). Question de Mécanique élémentaire. Par M. *A. Tourrettes.*

J. DE L. T. 1, p. 7—42. Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe. Par M. *C. Jordan.*

id. p. 43—56. De la résistance un choc d'une chaîne à maillons plats. Par M. *H. Resal.*

id. p. 81—98. Sur de prétendues inadvertances, dans lesquelles Lagrange serait tombé, suivant Poinsot, relativement à deux points fondamentaux de la Mécanique analytique. Par M. *P. Breton de Champ.*

id. p. 121—140. Recherches sur la dispersion des éléments d'un obus à balles après l'explosion. Par M. *H. Resal.*

id. p. 181, 182. Réponse à l'article intitulé: Sur de prétendues inadvertances dans lesquelles Lagrange serait tombé etc. Par M. *J. Bertrand.*

id. p. 263, 264. Réponse à la Note de M. J. Bertrand relative à l'article: Sur de prétendues inadvertances de Lagrange. Par *P. Breton de Champ.*

id. p. 399—450. De la propogation des marées dans les rivières. Par M. *P. Guieusse.*

N. ARCH. Dl. 1, blz. 59—66. Over de beweging van een halven rechten cirkelvormigen kegel, die met eene zijner beschrijvende lijnen op een horizontaal vlak ligt. Door Dr. *H. J. Rink.*

id. blz. 189—193. Prijsvraag N⁰. 12. Opgelost door *H. A. Lorentz.*

id. blz. 200—205. Kromlijnige beweging van den biljardbal. Door Dr. *F. van Wageningen Jr.*

GR. ARCH. B. 58, S. 104—109. Zur Theorie der Anziehungsgesetze. Von *C. Bender,*

GR. ARCH. B. 58, S. 225—277. Untersuchung der Bahn eines Punktes, welches mit der Kraft $\frac{k}{r^4}$ angezogen oder abgestossen wird, wobei k eine Constante und r die Entfernung vom Kraftcentrum bedeutet. Vom *E. Kärger.*

MEETKUNDE (VLAKKE).

N. A. DE M. T. 14, p. 138—141. Question 1148. Par M. *C. Chadu.*
id. p. 175—178. Solution de la question de mathématiques élémentaires proposée au Concours d'agrégation de 1874. Par M. *C. Chadu.*
id. p. 286—288. Question 1166. Par M. *C. Chadu.*
id. p. 465—468. Question 1172. Par M. *H. Lez.*
id. p. 506, 507. Concours général de 1874. Troisième. Par M. *Moret-Blanc.*
GR. ARCH. B. 57, S. 204—208. Nouvelle expression de la surface du triangle, avec application au calcul en déterminant de cette surface en valeur des trois côtés du triangle. Par *G. Dostor.*
id. S. 216, 217. Kurze Notiz zu dem Aufsatse des Herrn H. Rath „Die rationalen Dreiecken (Archiv, T. 56. S. 188). Von *M. Curtze.*
id. S. 218, 219. Ueber Kreise im Dreieck. Von *E. Hain.*
id. S. 322—326. Verschiedene Sätze über das Dreieck. Von *E. Hain.*
id. S. 438—440. Ueber Parallеltransversalen. Von *E. Hain.*
id. S. 441. Ueber den Punkt der gleichen Paralleltransversalen. Von *E. Hain.*
id. S. 448. Neuer Beweis zu dem Satze, T. 55. N°. 28. 2. Von *E. Hain.*
id. B. 58, S. 90—95. Ueber die Winkelhalbirenden des Dreiecks. Von *E. Hain.*
id. S. 98. Function eines beliebigen Winkels mit Hülfe der gleichseitigen Hyperbel. Von *F. Kosch.*
id. B. 58, S. 164—169. Ueber den Spicher'schen Punkt. Von *E. Hain.*
id. S. 170—175. Ueber den Schwerpunkt des Dreiecks. Von *E. Hain.*
id. S. 176—179. Ueber Symmetriepunkte des Dreiecks. Von *E. Hain.*
id. S. 369—376. Einige Wünschen, die Planimetrie betreffend. Von *L. Gr. von Pfeil.*

MEETKUNDE IN DE RUIMTE.

N. A. DE M. T. 14, p. 377—381. Solution des questions de géométrie élémentaire proposées par M. Casimir Rey. Par M. *Moret-Blanc.*
id. p. 503, 504. Concours général de 1874. Philosophie. Par M. *Moret-Blanc.*
id. p. 505, 506. Concours général de 1874. Seconde. Par M. *Moret-Blanc.*
id. p. 561—563. Théorème de géométrie. Par M. *C. Chadu.*
GR. ARCH. B. 57, S. 334—336. Volumes des solides engendrés par la révolution des polygones réguliers autour d'un de leurs côtés. Par *G. Dostor.*
id. B. 58, S. 1—4. Relations entre les sinus des quatre trièdres formés par quatre droites issues d'un même point, avec application au tétraèdre. Par *G. Dostor.*

ONTWIKKELING VAN FUNCTIËN.

J. V. CR. B. 80, S. 204. Sur le developpement en une série d'exponenticlles. Par M. *Popoff.*

N. A. DE M. T. 14, p. 385—391. Démonstration élémentaire des formules qui donnent la somme des puissances *m* de deux nombres en fonction de la somme et du produit de ces nombres, et *Cos m a*, *Sin m a* en fonction d'une seule des deux lignes *Sin a* ou *Cos a*. Par M. *Desboves*.

GR. ARCH. B. 58, S. 431, 432. Transformation der Fonction $x^n e^{\lambda x^2}$. Von *S. Spitzer*.

OPPERVLAKKEN (THEORIE).

J. V. CR. B. 79, S. 159—175. Ueber algebraische Flächen, die zu einander apolar sind. Von *Th. Reye*.

id. B. 80, S. 280—300. Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen. Von *H. A. Schwarz*.

id. S. 301—314. Ueber diejenigen Minimalflächen, welche von einer Schaar von Kegeln zweiten Grades eingehüllt werden. Von *H. A. Schwarz*.

CL. M. ANN. B. 8, S. 54—135. Zur Theorie der windschiefen Flächen. Von *A. Voss*.

N. A. DE M. T. 14, p. 352—354. Note sur les centres de gravité des surfaces et des volumes de révolution. Par M. *B. Niewenglowski*.

GR. ARCH. B. 57, S. 385—391. Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Krümmungsmaass der Flächen. Von *G. Escherich*.

OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

N. A. D. M. T. 14, p. 66—68. Question 99. Par M. *F. C. Brocard*.

id. p. 85—87. Question 1130. Par M. *Chabanel*.

id. p. 87—89. Questions 1132 et 1133. Par M. *Bourguet*.

id. p. 133, 134. Question 1145. Par M. *Genty*.

id. p. 135—138. Question 1146. Par M. *C. Chabanel*.

id. p. 169—171. Déterminer le paramètre d'une section parabolique dans un hyperboloïde à une nappe. Par M. *H. Lemonnier*.

id. p. 183—185. Question 1187. Par M. *Moret-Blanc*.

id. p. 216—222. Foyers et directrices des surfaces du second ordre. Par M. *H. Lemonnier*.

id. p. 271—273. Sur la détermination analytique du centre d'une section plure faite dans une surface du second ordre. Par M. *Saltel*.

id. p. 332, 333. Question 142. Par M. *H. Brocard*.

id. p. 458—464. Sur la théorie des sections coniques. Par M. *E. Lucas*.

N. ARCH. Dl. 1, blz. 194—198. Over den stand der vlakken, die een middelpunts-oppervlak van den tweeden graad volgens gelijkzijdige hyperbolen snijden. Door *J. W. Tesch*.

GR. ARCH. B. 57, S. 191—203. Equation générale des deux tangentes menées d'un même point à une conique et équation du cône circonscrit à une surface du second degré. Par *G. Dostor*.

id. B. 58, S. 5—16. Application des Discriminants aux Courbes et Surfaces du second degré. Par *G. Dostor*.

OPPERVLAKKEN (BIJZONDERE).

J. DE L. T. 19, p. 307—318. Sur les surfaces isothermes paraboloïdales. Par M. *G. Lamé.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 163—172. Ueber eine allgemeine Classe von Flächen und die Flächen dritter Ordnung insbesondere. Von *F. E. Eckhardt.*

CL. M. ANN. T. 8, p. 1—30. Etudes des propriétés de situation des surfaces cubiques. Par *H. G. Zeuthen.*

GR. ARCH. B. 57, S. 328—334. Beispiel einer einseitigen Fläche. Von *R. Hoppe.*

id. B. 58, S. 17—22, 285—289. Application des Déterminants aux surfaces de révolution, et, en particulier, à celles du second degré. Par *G. Dostor.*

id. S. 293—300. Application des déterminants aux surfaces cylindriques, et en particulier aux cylindres du second degré. Par M. *G. Dostor.*

POTENTIAAL.

J. V. CR. B. 79, S. 1—16. Ueber die constante elektrische Strömung in ebenen Platten. Von *E. Heine.*

id. S. 265—303. Zur Theorie der Potentialflächen unter besonderer Rucksicht auf Körper, die von Flächen der zweiten Ordnung begrenzt sind. Von *W. Stahl.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 341—361. Ueber das logarithmische Potential. Von *Th. Kötteritzsch.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 45—48. Notiz über die Flächen constanten Potentiales. Von *L. Weber.*

id. S. 319—358. Untersuchungen im Gebiete des Logarithmischen Potentiales. Von *Meutzner.*

id. S. 555—566. Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz. Von *C. Neumann.*

GR. ARCH. B. 58, S. 113—126. Ueber das Potential des Ellipsoïds. Von *A. Oberbeck.*

REEKSEN.

J. V. CR. B. 79, S. 181—184. Ueber die Multiplicationsregel für zwei unendliche Reihen. Von *F. Mertens.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 369—376. Beweis einiger Sätze über Potenzenreihen. Von *O. Stolz.*

STELKUNDE.

N. A. DE M. T. 14, p. 97—120. Détermination des diviseurs à coefficients commensurables, d'un degré donné, d'un polynome entier en *x* à coefficients commensurables. Par M. *L. Maleyx.*

id. p. 235, 236. Question 28. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 349, 350. Théorème d'Algèbre. Par M. *J. de Virieu.*

id. p. 505, 506. Concours général de 1874. Seconde. Par M. *Mont-Blanc.*

SUBSTITUTIËN.

J. V. CR. B. 79, S. 248—258. Sur la limite du degré des groupes primitifs qui contiennent une substitution donnée. Par M. *C. Jordan.*

CL. M. ANN. B. 8, S. 495—533. Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. Zweiter Aufsatz. Von *M. Nöther.*

GR. ARCH. B. 57, S. 337—342. Der Transformationsfactor. Von *M. Greiner.*

id. B. 58, S. 342—352. Ueber eine besondere Art von successiven linearen Substitutionen. Von *W. Veltmann.*

SYNTHETISCHE MEETKUNDE.

BULL. M. T. 7, p. 142, 143. Note sur un théorème de M. G. Bruno. Par M. *Ed. Dewulf.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 1—16, 252. Weitere Beiträge zur Theorie der isogonalen Verwandtschaften. Von *G. Holzmüller.*

id. S. 17—58. Die harmonischen Mittelpunkte für ein Punktsystem von vier Punkten in Bezug auf einen gegebenen Punkt als Pol. Von *Milinowski.*

id. S. 118—144. Ueber das Strahlensystem erster Ordnung und erster Classe und dem linearen Strahlencomplex. Von *Silldorf.*

CL. M. ANN. B. 8, S. 145—214. Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit Würfen. Darstellung und Erweiterung der Staudt'scher Theorie. Von *J. Lüroth.*

GR. ARCH. B. 57, S. 316—321. Ueber Harmonikalen im Dreieck. Von *E. Hain.*

id. B. 58, S. 380—384. Ueber den Umkreis des Dreiecks. Von *E. Hain.*

id. S. 385—393. Ueber symmetrische Punktsysteme des Dreiecks. Von *E. Hain.*

id. S. 394—415. Ueber Bildung neuer Symmetriepunkten. Von *E. Hain.*

VEELHOEKEN.

ANN. EC. NORM. T. 4, p. 308—310. Sur les polygones réguliers. Par M. *E. Mathet.*

N. A. DE M. T. 14, p. 145—165. Propriétés des quadrilatères complets qui ressortent de la considération de leurs bissectrices. Par M. *L. Saccary.*

GR. ARCH. B. 57, S. 218. Ueber das Diagonalenfünfeck eines Kreisfünfeckes. Von *E. Hain.*

id. B. 58, S. 84—90. Ueber den Grebe'schen Punkt. Von *E. Hain.*

VEELVLAKKIGE LICHAMEN.

GR. ARCH. B. 57, S. 107. Bemerkung zu dem Beweise einer bekannten Formel für den Inhalt der Tetraeders, N^{0}. v, S. 17, im vorige Teile. Von *Oelschläger.*

id. S. 107, 108. Beweis desselben Satzes. Von *W. Stammer.*

id. S. 108—111. Bemerkung zu demselben Thema. Von *R. Hoppe.*

id. S. 113—190. Le trièdre et le tétraèdre, avec application des déterminants. Par M. *G. Dostor.*

GR. ARCH. B. 57, S. 392—419. Ueber die regulären und Poinsot'schen Körper und ihre Inhaltsbestimmung vermittelst Determinanten. Von *O. Löwe.*

id. B. 58, S. 180—184. Beiträge zur Lehre vom Tetraeder und von den Ecken. Von *C. Helling.*

id. S. 222—224. Bemerkung zum Aufsatze des Hernn Dostor über das Trieder. Von *F. Hora.*

id. S. 328—336. Minimum-Oberflächen der drei ersten Classen von Polyedern. Von *R. Hoppe.*

VERGELIJKINGEN MET EENE ONBEKENDE.

N. A. DE M. T. 14, p. 31—37. Discussion algébrique de l'équation en λ. Par M. *A. Picart.*

id. p. 37—40. Sur la séparation des racines des équations. Par M. *H. Laurent.*

id. p. 167, 168. Expression de s comme quotient de deux déterminants. Par M. *H. Lemonnier.*

id. p. 259—265. Expression de la somme des puissances semblables des racines d'une équation, en fonction des coefficients. Par M. *M. Pellet.*

id. p. 289—298, 424—427. Simples remarques sur les racines entières des équations cubiques. Par M. *S. Realis.*

id. p. 356—358. Sur l'équation du troisième degré. Par M. *D. André.*

N. ARCH. Dl. I, bl. 67—69. Herleiding van de formule van Cardanus in het onherleidbare geval. Door Dr. *A. Benthem Gzn.*

GR. ARCH. B. 57, S. 73—88, 350—365, B. 58, S. 127—146. Untersuchungen über algebraische Gleichungen. Von *A. Siebel.*

id. B. 58, S. 301—318. Neuer Beweis für die Realität der Wurzeln einer wichtigen Gleichung. Von *H. L. W. A. Gravelaar.*

VERGELIJKINGEN MET MEER ONBEKENDEN.

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 71—77. Ueber die numerische Auflösung zweier Gleichungen mit zwei Unbekannten. Von *H. Zimmermann.*

N. A. DE M. T. 14, p. 396—424. Sur la transformation des équations du second degré à deux et à trois variables. Par M. *H. Lemonnier.*

id. p. 481—487. Théorème pour la division d'un système de n équations du premier degré à n inconnues. Par M. *G. Fontené.*

GR. ARCH. B. 57, S. 240—254. Auflösung eines besonderen Systems linearer Gleichungen. Von *S. Günther.*

VERGELIJKINGEN (ONBEPAALDE).

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 97—111. Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei theilfremden Coefficienten. Von *K. Weihrauch.*

id. S. 159—163. Arithmetische Kleinigheiten. Von *Bachmann.*

id. S. 314—316. Anzahl der Auflörungen einer unbestimmten Gleichung für einer speciellen Fall von nicht theilerfremden Coefficienten. Von *K. Weihrauch.*

VERSCHIKKINGEN EN VERBINDINGEN.

N. A. DE M. T. 14, p. 299—308, 337—348. Permutations rectilignes de $2q$ lettres égales deux à deux, où trois lettres consécutives sont toujours distinctes. (Voir T. 13, p. 549). Par M. *Vachette.*

id. p. 438—457. Permutations rectilignes de $3q$ lettres égales trois à trois, quand deux lettres consécutives sont toujours distinctes. Par *M. Vachette.*

WAARSCHIJNLIJKHEIDS-REKENING.

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 145—152. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. Von *R. A. Mees.*

id. S. 300—303. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers aus einer endlichen Anzahl wahrer Beobachtungsfehler. Von *Helwert.*

J. DE L. T. 1, p. 75—80. Sur la méthode des moindres carrés. Par M. *H. Laurent.*

N. ARCH. Dl. 1, blz. 157—178. Over de waarschijnlijkheid van de verschillende mogelijke uitkomsten eener verkiezing, waarbij stemmers van tweerlei kleur zich bij loting in afdeelingen verdeelen. Door *D. J. Korteweg.*

id. blz. 179—188. Over het gebruik van determinanten bij de methode der kleinste kwadraten. Door *P. van Geer.*

WILLEKEURIGE FUNCTIËN.

J. V. CR. B. 79, S. 21—37. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. Von *P. du Bois-Reymond.*

J. DE L. T. 19, p. 1—18. Sur les séries dont le terme général dépend de deux angles et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données. Par M. *G. Darboux.*

WISKUNDE GRONDBEGRIPPEN.

J. DE L. T. 19, p. 193—220. Sur un nouveau principe de Mécanique relatif aux mouvements stationnaires. Par M. *R. Clausius.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 20, S. 445—456. Die Grundlagen der Geometrie. Von *J. C. Becker.*

N. A. DE M. T. 14, p. 433—437. De la Tachymétrie. Par M. *C. Rey.*

THEORIE DER BASCULE

DOOR

B. P. MOORS.

(*Vervolg van Dl.* III, *blz.* 57.)

§ 9.

Bascule-vormen, wier theorie met die der bascule van Quintenz overeenstemt.

1°. Indien met weglating van den hefboomsarm AB, fig. V, er op de verlengde hefboomsarm BD in R eene kracht werkt, in de rigting door het pijltje aangewezen, dan ontstaat in beginsel de bascule, door fig. VI voorgesteld. Deze bascule wordt voor het afwegen van zeer zware en uitgebreide lasten, bijv. geladen voertuigen, gebezigd.

De evenwigts-vergelijking is, in den stand door fig. VI voorgesteld,

$$\frac{L}{G} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{NP}} \cdot \frac{\mathrm{RB}}{\mathrm{BC}};$$

en tevens moet voldaan worden aan de gelijkheid

$$\frac{\mathrm{KH}}{\mathrm{KF}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}.$$

Wordt $\mathrm{MN} = 10\,\mathrm{NP}$ en $\mathrm{RB} = 10\,\mathrm{BC}$ genomen, dan is

$$L = 100\,G.$$

Zoodat deze bascule eene honderddeelige zou zijn.

Eene andere, meer dan de laatst bedoelde in gebruik zijnde, honderddeelige bascule bestaat uit de vereeniging van twee ramen $\mathrm{KFK_1}$ en $\mathrm{kFk_1}$, fig. VI^a, wier vlakken, bij den normaalstand der bascule, in een horizontaal vlak vallen; en wier toppunten F, zeer nabij

elkaar liggende, worden opgetrokken door twee stangen DF, die zamen in één kussen eindigen, dat op het mes D rust, hetwelk op den hefboom RB is vastgemaakt; de hefboom RB zelf rust in B op een vast kussen, en wordt in R door de stang RP opgetrokken; terwijl deze stang weer in P op den in het vast kussen N steunenden hefboom PM rust. De brug der bascule rust links op de punten H en H_1 van het raam KFK_1, en regts op de punten e en e_1 der trekstangen he en h_1e_1, die in h en h_1 aan het raam kFk_1 zijn opgehangen.

Is bij deze bascule NM.BR.Fk = 100.PN.BD.KH, dan is $L = 100\ G$.

Dat volgens de theorie deze bascule in geen anderen stand dan in den normaalstand aan de voorwaarden (2) en (5) voldoen *kan* — de wrijving buiten rekening latende — blijkt aldus.

Aannemende dat de ramen gelijk en gelijkvormig zijn, dan zijn de lengten der loodlijnen, respectievelijk uit H en h op KK_1 en kk_1 neergelaten, aan elkaar gelijk; terwijl die loodlijnen zich, bij de beweging van het punt D, met gelijke hoeksnelheid bewegen. Stellen wij verder, dat bij den horizontalen stand der ramen de punten F in elkaar vallen, en nemen wij, bij dien stand der ramen, de loodlijn uit F op KK_1 als X as en de verticaal, die door F gaat, als Y as aan; stellen wij den afstand van KK_1 en kk_1 gelijk aan $2r$, en den afstand van H tot KK_1, of van h tot kk_1, gelijk aan r_1; de standvastige lengten He $= m$ en he $= n$, en de coördinaten van het punt H, bij eenigen stand van het juk, gelijk aan (p, q); dan zijn de coördinaten van het punt h, bij dien zelfden stand van het juk, gelijk $(-p, q)$.

Het punt e beschrijft bij de beweging van het punt D eene kromme lijn, die de meetkunstige plaats is van het snijpunt der cirkels, uit H en h met de stralen m en n beschreven. De coördinaten der punten H en h moeten voldoen aan de vergelijking

$$(r-p)^2 + q^2 = r_1^2;$$

de vergelijkingen van de cirkels, uit H en h als middelpunten met de stralen m en n beschreven, zijn

$$(x-p)^2+(y-q)^2 = m^2 \quad \text{en} \quad (x+p)^2+(y-q)^2 = n^2;$$

zoodat wij drie vergelijkingen hebben, waaruit p en q kunnen geëlimineerd worden; de vergelijking in x en y, die alsdan overblijft, zal de vergelijking der meetkunstige plaats van het punt e zijn.

Bij oplossing zal blijken, dat deze vergelijking hooger dan van den

tweeden graad is; en dat bijgevolg de door het punt e beschreven kromme geen cirkel kan zijn. Deze kromme wordt door het vlak KK_1kk_1 in twee symmetrieke deelen verdeeld, en heeft ongeveer den vorm van de cijfer 8. De lijn He kan zich dus niet, bij de schommelingen van het juk, evenwijdig aan hare oorspronkelijke rigting bewegen; evenmin de brug. Uit § 8 volgt echter dat, indien zooals gebruikelijk is, r groot en r_1 klein wordt genomen, en ook de hoek van doorslag klein is, het verschil in gevoeligheid, indien de last op verschillende punten der brug wordt geplaatst, niet merkbaar wezen zal.

Gewoonlijk echter hangt de brug dezer bascule *niet* aan stangen of kettingen in h en h_1, maar ze rust ook in deze punten regtstreeks op de hefboomen kF en k_1F; waardoor noodwendig, bij elken hoek van doorslag, eene hoogst nadeelige slepende wrijving moet ontstaan van de kussens der brug op de messen, waarop zij steunen.

2°. Nemen wij, als in § 5, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ en $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, maar nu $e_1 > e$; dan vinden wij uit (18) en (23) natuurlijk weder

$$\frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e};$$

fig. VII stelt de doorsnede dezer bascule voor.

3°. Door zamenvoeging van twee vormen volgens fig. VII ontstaat de toonbank-bascule volgens fig. VIII.

4°. Aan (24) voldoet ook $\delta = \delta_1 + 180°$.

Stellen wij in (23) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ en $\delta = \delta_1 + 180°$; dan vinden wij

$$-\frac{s_1}{s} = \frac{e_1}{e};$$

waaruit, ingevolge de voorwaarde $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ volgt, dat óf e_1 en r_1 negatief en e en r positief, óf e_1 en r_1 positief en e en r negatief moeten zijn.

Voor e_1 en r_1 negatief ontstaat fig. IX, en voor e_1 en r_1 positief ontstaat fig. X.

5°. Door zamenvoeging van twee vormen volgens fig. IX ontstaat de toonbank-bascule volgens fig. XI.

6°. Door zamenvoeging van twee vormen volgens fig. X ontstaat de toonbank-bascule volgens fig. XII.

Worden hier de hefboomsarmen KF en KH aan elkaar gelijk

genomen, en daarenboven KF_1 gelijk aan KF, dan ontstaat de bascule, welke in fig. XIII is afgebeeld [1]).

7°. Aan (24) voldoet eveneens $\delta_1 = \delta + 180°$. Stellen wij, in (23), $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\delta_1 = 180° + \delta$ en $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$;

dan vinden wij $$-\frac{e_1}{s_1} = \frac{e}{s};$$

en derhalve moet, indien e, r_1, r en s positief zijn, s_1 negatief genomen worden; d. w. z. de brug moet in plaats van, zoo als in de vorige figuren, aan eene trekstang te hangen, op eene steunstang rusten, zooals in fig. XIV is voorgesteld.

Het is duidelijk, dat zulk een vorm weinig bruikbaar zou zijn; uit § 8 echter is gebleken, dat β — of, wat het zelfde is, dat de lengte van de steunstang — tamelijk willekeurig en ook negatief kan genomen worden, zonder dat dit op de bedoelde onafhankelijkheid van het evenwigt en van de gevoeligheid van merkbaren invloed is. Wij kunnen dus even goed de brug aan eene trekstang van willekeurige lengte als in fig. XV ophangen.

Ook hier zouden wij weer bijv. $e_1 > e$ kunnen nemen.

8°. Door zamenvoeging der beide vormen volgens fig. IX en fig. XV ontstaat de toonbank-bascule volgens fig. XVI.

De evenwigts-vergelijking van de vier laatste vormen is voor allen dezelfde, namelijk
$$\frac{L}{G} = \frac{B_1C_1}{BC};$$
en tevens moet voldaan worden aan de gelijkheid
$$\frac{BC}{BD} = \frac{KH}{KF} = \frac{B_1C_1}{B_1D_1} = \frac{K_1H_1}{K_1F_1}.$$
De verhoudingen $\frac{CE}{DF}$ en $\frac{C_1E_1}{D_1F_1}$ zijn, bij al de hier voorgestelde bascule-vormen, willekeurig, mits ze niet te klein worden genomen.

---

[1]) Stelsel „Pfitzer". Dit stelsel wordt in het Duitsche Rijk tot den ijk toegelaten, ook zonder de stangen CE en CE_1. Bij gemis van deze stangen moet noodwendig, bij de schommelingen van het juk, in de punten H en H_1, of C en C_1, slepende wrijving ontstaan. Zie „Instruktion in Ausführung der Eichordnung vom 16 Juli 1869, Berlin. W. Moeser" bl. 78.

De „Pfanzeder'sche Tafelwage", welke in Oostenrijk tot den ijk wordt toegelaten, heeft met de bascule volgens fig. XII groote overeenkomst, maar is evenmin juist. Zie „Instruction für die Aichämter der im Reichsrathe vertretenen Königreiche der Osterreichische-ungarische Monarchie; Wien 1872, L. W. Seidel & Sohn.

9°. Aan (24) voldoet ook $\gamma = 180° - \phi$.

Stellen wij dan in (23) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$, en $\gamma = 180° - \phi$, met inachtneming van (16), (17), (20) en (21); dan vinden wij $e = r$ en dus ook $e_1 = r_1$, onafhankelijk van de verhouding $\frac{s_1}{s}$ en van de hoeken β en δ_1. Fig. XVII geeft den hier bedoelden bascule-vorm aan.

Om tot de laatste uitkomst te komen, dienen wij in den loop der berekening aan te toonen, dat $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ is, indien $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ en $\gamma = 180° - \phi$ genomen wordt.

Nu volgt bij deze onderstelling uit (17)

$$\frac{d\beta}{d\phi} = \frac{(r e_1 - r_1 e) Sin(\delta_1 + \phi)}{b r Sin(\delta_1 - \beta)},$$

zoodat $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ blijkt te zijn voor alle waarden van δ_1 en β, die $Sin(\delta_1 - \beta)$ niet nul maken; terwijl voor $\beta = \delta_1$ de laatste gelijkheid overgaat in $\frac{d\beta}{d\phi} = \frac{0}{0}$. Maar indien $\beta = \delta_1$ is, dan gaat $\frac{d\beta}{d\phi}$ in $\frac{d\delta_1}{d\phi}$ over, en dan hebben wij, voor deze bijzondere waarde van β, blijkens (21),

$$(s_1 + b)\frac{d\beta}{d\phi} = s.\frac{d\beta}{d\phi} = 0;$$

waaruit volgt, dat ook, bij deze waarde van β, $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ moet wezen.

Nemen wij nu nog $e_1 = e$, en dus ook $r_1 = r$, dan volgt hieruit de bascule van Roberval, welke in de figuren XVII[a], XVII[b] en XVII[c] is voorgesteld.

Deze bascule bestaat uit een juk, waarin de drie messen A, B en D zijn aangebragt, die de volgende bestemming hebben. Het mes B rust op een vast gestel BK en draagt dus het juk; het mes D ondersteunt de brug, waarop de last L geplaatst moet worden; en het mes A draagt de schaal, die het gewigt G bevatten kan, dat evenwigt moet maken met den last L. — Het vast gestel is in K, en de brug is in F van een mes voorzien, welke messen door eene stang verbonden zijn, die het omslaan van de brug voorkomt.

Het is duidelijk, dat de lasten op de brug bij de bascule volgens fig. XVII[b] alleen regts, daarentegen op de bascule volgens fig. XVII[c]

alleen links van de plank DF geplaatst mogen worden; tenzij de stang FK zoodanig geconstrueerd is, dat ze als trek- of steunstang dienst doet, naar gelang de last regts of links van de plank DF op de brug rust.

10°. Dit laatste vindt plaats bij de toonbank-bascule van Roberval [1]), welke uit eene zamenvoeging bestaat van twee der vormen volgens fig. XVII^b of XVII^c. Deze toonbank-bascule wordt in fig. XVIII aangegeven.

Hierin stelt DD_1 het juk voor, dat in B op het statief BMN rust, en in D en D_1 de stangen DF en D_1F_1 draagt, waaraan de schalen zijn bevestigd. Deze stangen zijn aan de beneden-einden door den hefboom FF_1 verbonden.

Het statief loopt in twee spijlen M en N uit, die ter weerszijde van, doch digt bij, het verticaal vlak liggen, dat door B gaat en loodregt staat op het hefboomsvlak; tusschen deze spijlen beweegt zich de hefboom FF_1, die steeds met een der beide tanden, die in het midden van dien hefboom volgens een horizontaal vlak zijn aangebragt, tegen het verticaal op het juk staande binnenvlak van een der spijlen steunt.

De stang D_1F_1 is van onder, in de rigting van hare as, afgevijld volgens een vlak, dat loodregt staat op het hefboomsvlak; tegen dit afgevijld gedeelte is een gedeeltelijk open plaatje aangebragt, dat zoo wel dient tot steunplaats van den hefboom FF_1, als om dezen door te laten en te verhinderen zijwaarts af te wijken.

In het uiteinde F_1 van den hefboom FF_1 is eene opening gemaakt, bestemd om er het ondereind van de stang D_1F_1 door te laten, waardoor deze binnenwaarts tegen den hefboom steunen kan.

In het punt F van de stang DF en van den hefboom FF_1 is de constructie als in het overeenkomstig punt F_1.

Fig. XVIII^a stelt de doorsnede voor van den hefboom FF_1, de spijlen M en N, de stangen en de plaatjes, met een horizontaal vlak dat door de as van den hefboom gaat.

Fig. XVIII^b en XVIII^c stellen het verband voor van de stangen met de plaatjes, gezien in de rigting FF_1.

Fig. XVIII^d wijst aan, hoe de stangen aan het juk zijn opgehangen.

11°. Bij eenige bascule-vormen is het beginsel van de bascule van

---

[1]) Deze bascule is in het Duitsche Rijk en in Oostenrijk van den ijk uitgesloten; in België en in Frankrijk wordt ze toegelaten.

Roberval met dat van de bascule van Quintenz vereenigd. De bascule bijv., volgens fig. XIX, verschilt van die van Roberval hierin, dat de brug niet regtstreeks op het juk steunt, maar door middel van eene hefstang DF, die in D aan het juk hangt en in F de brug aangrijpt, gedragen wordt. Daarenboven is de brug door *twee* stangen, en wel door de trekstang $K_1 F_1$ en de steunstang KF, met het vaste steunstuk verbonden.

12°. Verwisselen in fig. XIX de steun- en de trekstang onderling van plaats, en wordt daarna de brug omgekeerd, dan ontstaat de bascule volgens fig. XX [1]).

Het is duidelijk, dat nog vele andere bascule-vormen uit de gevonden formulen afgeleid, en op zeer verschillende wijzen onderling verbonden kunnen worden. Wij zullen ons echter bij het voorgaande bepalen. Elke bascule, die uitsluitend op een stelsel van weinig buigbare en rekbare hefboomen en stangen berust, zal gemakkelijk aan de gevonden formulen getoetst, en daarvoor spoedig de voorwaarden bepaald kunnen worden, waaraan zij moet voldoen.

---

§ 10.

Verificatie der basculen van Quintenz en van Roberval.

a. *Bepaling van de grootte der fouten in de lengten der hefboomsarmen bij de bascule van Quintenz, door weging.*

Wij nemen aan, dat de lijn $K_1 K$, fig. I, loodregt staat op het hefboomsvlak; en dat in den normaalstand der bascule de messen van het juk, even als die van het onderste raam, nabij in een horizontaal vlak zijn gelegen; de stangen nabij verticaal zijn gerigt; en de last, rustende boven het punt M op de brug, met het gewigt in de schaal evenwigt maakt.

Moet er dan, indien de last in een ander punt der brug verschoven wordt, bij het gewigt in de schaal nog een overwigt gevoegd worden, om de bascule weer in den normaalstand in evenwigt te

---

1) Stelsel „Pfitzer"; eene der weinige in het Duitsche Rijk tot den ijk toegelaten basculen.

brengen; dan kan dit — de wrijving buiten rekening latende — blijkens § 8 alleen hiervan het gevolg zijn, dat de lengten van de hefboomsarmen der bascule niet voldoen aan de gelijkheid

$$\frac{\text{loodlijn uit H op } K_1K}{\text{loodlijn uit F op } K_1K} = \frac{\text{loodlijn uit } H_1 \text{ op } K_1K}{\text{loodlijn uit F op } K_1K} = \frac{BC}{BD}; \quad . \quad (28)$$

want werd aan deze gelijkheid wel voldaan, dan zou het verschuiven van den last op de brug geen merkbaren invloed hebben op het evenwigt.

De grootte der fouten in de lengten der hefboomsarmen kunnen wij opmaken uit *drie* wegingen, waarbij een zelfde last eens boven het punt H, eens boven het punt H_1, en eens in het hefboomsvlak in het punt M_1 geplaatst, en telkens in den normaalstand der bascule in evenwigt gebragt wordt door het noodige gewigt in de schaal te leggen.

Uit de twee eerste wegingen wordt de verbetering bepaald, welke een der loodlijnen uit H of H_1 op K_1K moet ondergaan, om die loodlijnen aan elkaar gelijk te maken; terwijl uit de derde weging de verbetering wordt berekend, welke aan de thans gelijke loodlijnen uit H_1 en H op K_1K, of aan een der grootheden BC, BD of de loodlijn uit F op K_1K, moet aangebragt worden, om aan de verhoudingen uit (28) dezelfde waarde te geven.

Stellen wij, dat de last L boven H met het gewigt G, boven H_1 met het gewigt $G+G_1$, en in M_1 met het gewigt $G+G_2$ evenwigt maakt; dat bij de laatste weging de verticaal, die door het zwaartepunt van den last gaat, op een afstand x van de lijn H_1H ligt; en $H_1h = h_1$, $hH = h$, en de loodlijnen uit H en H_1 op K_1K respectievelijk gelijk zijn aan r_1 en r_2; dan zijn de drukkingen bij de eerste weging: in $H = L$ en in H_1 en E nul,
bij de tweede weging: in $H_1 = L$ en in H en E nul,
en bij de derde: in $H = \dfrac{h_1}{h+h_1}\dfrac{b-x}{b}L$, in $H_1 = \dfrac{h}{h+h_1}\dfrac{b-x}{b}L$

en in $$E = \frac{x}{b}L.$$

De notatie van § 4 volgende, wordt, volgens het grondbeginsel der virtueele snelheden, de evenwigts-vergelijking tusschen L en G, $G+G_1$ en $G+G_2$ respectievelijk uitgedrukt door

$$Ld(r_1 Sin\gamma) - Gd\left\{aSin(\alpha+\alpha_1+\Phi)\right\} = 0,$$

$$Ld(r_2 Sin\gamma) - (G+G_1)d\left\{aSin(\alpha+\alpha_1+\Phi)\right\} = 0;$$

en

$$\frac{h_1}{h+h_1}\,\frac{b-x}{b}\,Ld(r_1\,Sin\,\gamma)+\frac{h}{h+h_1}\,\frac{b-x}{b}\,Ld(r_2\,Sin\,\gamma)+$$

$$+\frac{x}{b}\,Ld\left\{b\,Sin\,\beta+\frac{hr_2+h_1r_1}{h+h_1}\,Sin\,\gamma\right\}-(G+G_2)d\{a\,Sin(\alpha+\alpha_1+\Phi)\}=0;$$

of
$$Lr_1\,Cos\,\gamma\,\frac{d\gamma}{d\Phi}=Ga\,Cos(\alpha+\alpha_1+\Phi),$$

$$Lr_2\,Cos\,\gamma\,\frac{d\gamma}{d\Phi}=(G+G_2)a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\Phi),$$

en

$$\left\{\frac{h_1}{h+h_1}\,\frac{b-x}{b}\,r_1+\frac{h}{h+h_1}\,\frac{b-x}{b}\,r_2+\frac{x}{b}\,\frac{hr_2+h_1r_1}{h+h_1}\right\}L\,Cos\,\gamma\,\frac{d\gamma}{d\Phi}+$$

$$+xL\,Cos\,\beta\,\frac{d\beta}{d\Phi}=(G+G_2)\,a\,Cos(\alpha+\alpha_1+\Phi).$$

Deze vergelijkingen zijn algemeen, even als de waarden van $\frac{d\gamma}{d\Phi}$ en $\frac{d\beta}{d\Phi}$ uit (16) en (17). Stellen wij nu, dat α_1, α_2, α, Φ, β, γ, $\delta-90^\circ$ en δ_1-90° zeer klein zijn; dan gaan de drie evenwigts-vergelijkingen, met inachtneming van (16) en (17), over in

$$Lr_1\,\frac{e}{r}=Ga,$$

$$Lr_2\,\frac{e}{r}=(G+G_1)a,$$

en
$$L\,\frac{h_1r_1+hr_2}{h+h_1}\,\frac{e}{r}+L\,\frac{e_1r-r_1e}{br}\,x=(G+G_2)a.$$

Door de twee laatste vergelijkingen met de daarvoor gaande te verminderen, vinden wij

$$L(r_2-r_1)\frac{e}{r}=G_1a, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

en
$$L\,\frac{h(r_2-r_1)}{h+h_1}\,\frac{e}{r}+L\,\frac{e_1r-r_1e}{br}\,x=G_2a \;\ldots\ldots \quad (30)$$

Vooreerst moet nu een der punten H_1 of H verplaatst worden, om r_2 en r_1 aan elkaar gelijk te maken; wordt bijv. H_1 verplaatst, dan moet r_2 eene verbetering ondergaan, zoodat r_2 + verbetering $r_2=r_1$ is; of volgens (29)

$$\text{verbetering } r_2=-\frac{G_1ar}{Le}.$$

Na r_2 verbeterd te hebben, wordt $r_2=r_1$, waardoor (30) overgaat in

$$\frac{e_1}{e}=\frac{r_1}{r}+\frac{G_2ab}{Lex}\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

Er dient nu nog eene gemeenschappelijke „verbetering r_1” aan $r_2 = r_1$ te worden aangebragt, zoodanig dat $\frac{r_1 + \text{verbetering}\, r_1}{r} = \frac{e_1}{e}$ is, of $\frac{e_1}{e} - \frac{r_1}{r} = \frac{\text{verbetering}\, r_1}{r}$; en dus volgens (31)

$$\text{verbetering}\, r_1 = r\, \frac{G_2\, ab}{Lex}.$$

In plaats van eene gemeenschappelijke verbetering aan $r_2 = r_1$ aan te brengen, kan r of e verbeterd worden met

$$\text{verbetering}\, r = \frac{r}{r_1}\, r\, \frac{G_2\, ab}{Lex},$$

of

$$\text{verbetering}\, e = \frac{r}{r_1} \cdot \frac{G_2\, ab}{Lx}.$$

Er blijft nog over te voldoen aan de vergelijking

$$e_1 : a + \text{verbetering}\, a = G : L,$$

waaruit

$$\text{verbetering}\, a = \frac{L}{G}\, e_1 - a.$$

De grootheid e_1 is voor geen naauwkeurige meting vatbaar; uit (30) volgt echter

$$e_1 = \frac{G_2\, a}{Lx}\, b + \left\{ r_1 - \frac{bh\,(r_2 - r_1)}{x(h + h_1)} \right\} \frac{e}{r}.$$

b. ***Bepaling van de grootte der fouten in de lengten der hefbooms-armen bij de bascule van Quintenz, door hoekmeting.***

Indien aan de voorwaarden, in het begin dezer paragraaf gesteld, en tevens aan de gelijkheid (28) voldaan wordt, dan zal, volgens § 8, de brug zich bij de schommelingen van het juk, evenwijdig aan haar oorspronkelijken stand verplaatsen. Verplaatst zich dus, bij de schommeling van het juk, de brug der in het begin dezer § bedoelde bascule *niet* evenwijdig aan haar oorspronkelijken stand; dan bewijst dit, dat de afmetingen der hefbooms-armen niet voldoen aan de gelijkheid (28).

Nu volgt uit (16), dat, indien ϕ den hoek van doorslag van het juk voorstelt, en γ den standhoek, dien het vlak K_1FK maakt met zijne oorspronkelijke rigting, zeer nabij

$$Sin\, \gamma = \frac{e}{r}\, Sin\, \phi$$

is; derhalve is zeer nabij, de met den hoek van doorslag ϕ overeenkomende,

$$\text{rijzing} \quad H = r_1 \frac{e}{r} Sin\, \phi,$$

en $$\text{rijzing} \quad H_1 = r_2 \frac{e}{r} Sin\, \phi;$$

bijgevolg $$\text{rijzing} \quad h = \frac{h_1 r_1 + h r_2}{h + h_1} \frac{e}{r} Sin\, \phi.$$

Nog is zeer nabij rijzing $E = e_1 \, Sin\, \phi$.

Stellen wij nu, dat de hoek, dien de lijn hE maakt, bij een kleinen hoek van doorslag ϕ van het juk, met haar stand bij een hoek van doorslag nul, gelijk is aan δ; die der lijn HH_1 gelijk aan δ_1; en dat de brug in den normaalstand der bascule nabij horizontaal ligt; dan is

$$(h + h_1)\, Sin\, \delta_1 = \text{rijzing } H_1 - \text{rijzing } H = (r_2 - r_1) \frac{e}{r} \, Sin\, \phi, \quad . \; . \; (32)$$

en

$$b \, Sin\, \delta = \text{rijzing } E - \text{rijzing } H = \left(e_1 - \frac{h_1 r_1 + h r_2}{h + h_1} \frac{e}{r}\right) Sin\, \phi \; . \; (33)$$

Vooreerst moet nu r_2 eene verbetering r_2 ondergaan, zoodat weer $r_2 + \text{verbetering } r_2 = r_1$ is, of volgens (32), daar δ_1 en ook δ zeer klein worden ondersteld,

$$\text{verbetering } r_2 = - \frac{(h + h_1) r}{e} \frac{\delta_1}{\phi}.$$

Na r_2 verbeterd te hebben, verandert (33) in

$$b\,\delta = \left(e_1 - r_1 \frac{e}{r}\right) \alpha \; \text{ of } \; \frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r} + \frac{b}{e} \frac{\delta}{\phi} \quad . \; . \; . \; . \; (34)$$

Daar nu $\dfrac{r_1 + \text{verbetering} \, r_1}{r} = \dfrac{e_1}{e}$ dus $\dfrac{e_1}{e} - \dfrac{r_1}{r} = \dfrac{\text{verbetering } r_1}{r}$

moet zijn, zoo is ook de gemeenschappelijke verbetering aan $r_2 = r_1$

$$\text{verbetering } r_1 = r \frac{b}{e} \frac{\delta}{\phi}.$$

Uit (33) volgt

$$e_1 = b \frac{\delta}{\phi} + \frac{h_1 r_1 + h r_2}{h + h_1} \frac{e}{r}.$$

Om de hoeken δ en δ_1 te bepalen, kan o. a. gebruik worden gemaakt van een gevoelig waterpas.

c. *Verificatie der bascule van Roberval.*

Fig. XXI stelt de doorsnede van zulk eene bascule voor, waarvan de lengten der hefboomsarmen BD en FK en van de stang DF min

of meer onjuist zijn. De punten B en K zijn de vaste punten; de vierhoek BDFK is veranderlijk; de brug MM_1 is vast verbonden aan de lijn DF; in M rust de last L. De lengte der lijn BD is gelijk aan e; verder is $DF = s$, $EK = r$, $KB = n$ en $BA = a$; de hefbooms-armen AB en BD sluiten een hoek van $(180° - \alpha)$ in.

1°. *Voorwaarde voor de onafhankelijkheid van het evenwigt van de plaats van den last op de brug.*

In 9°, bl. 101, is aangetoond, dat, indien $\frac{e_1}{e} = \frac{r_1}{r}$ en $\gamma = 180° - \phi$ zijn, $\frac{d\beta}{d\phi} = 0$ is, onafhankelijk van de verhouding $\frac{e}{r}$; d. w. z. *het is voor de onafhankelijkheid van het* EVENWIGT, *in den bepaalden stand van het juk, voldoende, indien* BD *en* KF *evenwijdig loopen; de lengten zelf van* BD *en* KF *kunnen daarbij ongelijk zijn.*

2°. *Berekening van het verschil in helling van* BD *en* KF.

Zij, bij den hoek van doorslag ϕ van het juk, de last L in M in evenwigt met het gewigt G in de schaal. Brengen wij dan den last L in het punt M_1, dan zal, indien de hoeken γ en $180° - \phi$ niet aan elkaar gelijk zijn, het evenwigt verbroken wezen; en er zal bij G een overwigt G_1 moeten gevoegd worden, om de bascule weer, bij den zelfden hoek van doorslag ϕ van het juk, in evenwigt te brengen.

Zijn Mm en $M_1 m_1$ verticalen, en $mm_1 = x$, dan vinden wij, door de evenwigts-vergelijking van L in M van die van L in M_1 af te trekken,

$$L x \operatorname{Cos} \delta \frac{d\delta}{d\phi} = G_1 a \operatorname{Cos}(\alpha + \phi);$$

of, daar volgens (20)

$$\frac{d\delta}{d\phi} = \frac{e \operatorname{Sin}(\gamma + \phi)}{s \operatorname{Sin}(\gamma - \delta)}$$

is, wordt

$$\operatorname{Sin}(\gamma + \phi) = \frac{G_1 a s \operatorname{Cos}(\alpha + \phi) . \operatorname{Sin}(\gamma - \delta)}{L e x \operatorname{Cos} \delta}.$$

Stellen wij nu, dat $MM_1 = y$ zeer nabij horizontaal is, en elk der hoeken α, ϕ, $180° - \gamma$ en $\delta - 90°$ zeer klein zijn, dan is zeer nabij $x \operatorname{Cos} \delta = y$ en

$$\operatorname{Sin}(\gamma + \phi) = \frac{G_1 a s}{L e y};$$

of, stellende $\gamma = 180° - \gamma_1$, dan is

$$\operatorname{Sin}(\gamma_1 - \phi) = \frac{G_1 a s}{L e y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (35)$$

d. *Verificatie der toonbank-bascule van Roberval.*

Fig. XXII stelle de doorsnede van zulk eene bascule voor, waarvan de lengten der hefboomsarmen en stangen min of meer onjuist zijn. Er zij opgemerkt, dat de drie messen van het juk DBD_1 geacht worden loodregt op het hefboomsvlak te staan; evenzoo de drie messen van den hefboom FKF_1; tevens nog dat het punt K geen vast punt mag zijn, maar er, in dit punt, tusschen mes en kussen, eenige speling in verticale en horizontale rigting mogelijk moet wezen; omdat, in het tegengesteld geval, bij eene niet volkomen juiste constructie, geen beweging der bascule, zonder wringing, bestaanbaar is.

1°. *Onderzoek naar de gelijkheid der jukarmen* DB *en* BD_1.

De gelijkheid der jukarmen DB en BD_1 wordt onderzocht door twee gelijke gewigten G op de schalen te plaatsen, in de punten M en M_1, gelegen in de verticalen, die door D en D_1 gaan; de gewigten kunnen dan geacht worden in de punten D en D_1 aan te grijpen. Blijkt nu, dat in eene der schalen, bijv. in de schaal, die op de stang D_1F_1 rust, nog een overwigt G_1 moet worden gevoegd, om het juk denzelfden stand te geven, als vóór de belasting; dan is

$$Ge = (G + G_1)\, e_1;$$

en derhalve moet dan e_1 verbeterd worden, zoodat wij hebben

$$Ge = (G + G_1)\,(e - \text{verbetering}\; e_1);$$

waaruit

$$\text{verbetering}\; e_1 = \frac{G_1 r}{G + G_1} = \frac{G_1 e_1}{G},$$

onafhankelijk van de lengten der hefboomsarmen van den ondersten hefboom en van de lengten en den stand der stangen.

2°. *Onderzoek naar de evenwijdigheid van het juk en den ondersten hefboom.*

Belasten wij de bascule in M en M_1 met gelijke gewigten G; zij daarbij de hoek van doorslag Φ; en verschuiven wij daarna het gewigt in de linker schaal, van het punt M in het punt M_2; dan zal in het algemeen bij het gewigt G in M_2 een overwigt G_1 moeten gevoegd worden, om het juk weer denzelfden hoek van doorslag Φ te geven. Volgens (35) hebben wij dan, aannemende dat $e_1 - e$, Φ, γ_1, $\delta - 90°$ en $\delta_1 - 90°$ zeer klein zijn, zeer nabij

$$Sin(\gamma_1 - \Phi) = \frac{G_1}{G}\,\frac{s}{y};$$

waaruit, voor den bepaalden stand van het juk, de ligging van den ondersten hefboom, met betrekking tot het juk, is op te maken.

Wij kunnen de laatste proef ook met een paar gevoelige luchtbelbuizen nemen, die, in de rigting van het juk, op de schalen zijn geplaatst. Laten wij nl. het juk van uit den horizontalen stand een hoek van doorslag ϕ maken, dan hebben wij blijkens (20)

$$\frac{d\delta}{d\phi} = \frac{e\,Sin\,(\gamma + \phi)}{s\,Sin\,(\gamma - \delta)}.$$

Stellen wij nu het verschil der hoeken, die de linker schaal maakt bij $\phi = 0$ en $\phi = \phi$ door β voor; en zijn ϕ, $180^\circ - \gamma$ en $90 - \delta$ zeer klein, dan hebben wij zeer nabij

$$\frac{\beta}{\phi} = \frac{e}{s}\,Sin(\gamma + \phi),$$

of

$$Sin\,(\gamma_1 - \phi) = \frac{\beta}{\phi}\,\frac{s}{e};$$

waaruit blijken kan, of γ_1 van ϕ verschilt.

3°. *Onderzoek naar de gelijkheid in lengte der stangen* DF *en* D_1F_1.

Wij hebben gevonden

$$\frac{d\delta}{d\phi} = \frac{e\,Sin\,(\gamma + \phi)}{s\,Sin\,(\gamma - \delta)};$$

evenzoo is

$$\frac{d\delta_1}{d\phi_1} = \frac{e_1\,Sin\,(\gamma_1 + \phi_1)}{s_1\,Sin\,(\gamma_1 - \delta_1)},$$

of, daar $\gamma + \gamma_1 = 360^\circ$ en $\phi + \phi_1 = 0$ is, d. i. $\gamma_1 = -\gamma$, $\phi_1 = -\phi$ en $d\phi_1 = d\phi$, zoo is

$$\frac{d\delta_1}{d\phi} = \frac{e_1}{s_1}\,\frac{Sin\,(\gamma + \phi)}{Sin\,(\gamma + \delta_1)}.$$

Is nu γ niet gelijk aan $180^\circ - \phi$, dan vinden wij door deeling

$$\frac{d\delta}{d\delta_1} = \frac{e}{e_1}\,\frac{s_1}{s}\,\frac{Sin\,(\gamma + \delta_1)}{Sin\,(\gamma - \delta)};$$

en zijn verder $180^\circ - \gamma$, $90^\circ - \delta$, $90^\circ - \delta_1$ en $e_1 - e$ zeer klein, dan is zeer nabij

$$\frac{d\delta}{d\delta_1} = \frac{s_1}{s};$$

derhalve zal, bij de slingeringen van het juk, de schaal, welke aan de kleinste stang verbonden is, den grootsten hoek met haar oorspronkelijken stand maken.

Zijn s en s_1, d. w. z. de stangen even lang, dan zullen de hoeken, die de schalen met den horizon maken, *evenveel toenemen.*

Stellen wij het verschil der hoeken, die de schalen in B en D_1 maken, bij $\phi = 0$ en $\phi = \phi$ door β en β_1 voor, dan is

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \frac{s_1}{s} = \frac{s + \text{verbetering}\, s}{s},$$

of $$\text{verbetering}\, s = s\frac{\beta}{\beta_1} - s = s\left(\frac{\beta}{\beta_1} - 1\right).$$

4°. *Bepaling der hoeken, die de eindmessen van het juk met het middenmes maken.*

In fig. XXIII stellen bB het middenmes en dD en d_1D_1 de eindmessen voor. Zij $db = m$, $bd_1 = n$, $D_1B = q$, $BD = p$ en $bB = k$; de lengten dD, bB en d_1D_1 kunnen geacht worden gelijk te zijn.

Stellen wij nu, fig. XVIII[d], dat bij den horizontalen stand van het juk, een last L boven het punt d evenwigt maakt met een last L_1, boven het punt d_1 geplaatst; evenzoo een last L boven d met een last L_2 boven D_1; en eindelijk een last L_3 boven D met een last L_2 boven D_1; dan is

$$Lm = L_1 n, \text{ waaruit } n = \frac{L}{L_1} m;$$

$$Lm = L_2 q, \text{ waaruit } q = \frac{L}{L_2} m;$$

$$L_3 p = L_2 q = L_1 n = Lm, \text{ waaruit } p = \frac{L}{L_3} m.$$

Noemen wij de hoeken, die de lijnen dD en d_1D_1 met bB maken, ϕ en ϕ_1, dan is

$$k \operatorname{Sin} \phi = p - m = \left(\frac{L}{L_3} - 1\right) m, \text{ waaruit } \operatorname{Sin} \phi = \frac{m}{k} \frac{L - L_3}{L_3},$$

en $$k \operatorname{Sin} \phi_1 = q - n = \left(\frac{L}{L_2} - \frac{L}{L_1}\right) m, \text{ waaruit } \operatorname{Sin} \phi_1 = \frac{1}{k} \frac{mL}{L_1} \frac{L_1 - L_2}{L_2} =$$

$$= \frac{n}{k} \frac{L_1 - L_2}{L_2} \text{ of } \frac{1}{k} \frac{mL}{L_2} \frac{L_1 - L_2}{L_1} = \frac{q}{k} \frac{L_1 - L_2}{L_1}.$$

INHOUD.

THEORIE DER FUNCTIEN VAN VERANDERLIJKE COMPLEXE GETALLEN,

DOOR

D^{R}. A. BENTHEM Gzn.

(*Vervolg van Deel* II, *blz.* 134.)

VIERDE AFDEELING.

DE INTEGRALEN VAN FUNCTIËN VAN EENE COMPLEXE VERANDERLIJKE.

HOOFDSTUK VIII.

INLEIDING.

§ 31.

Overeenkomst en verschil tusschen de integralen van functiën van eene reëele en die van eene complexe veranderlijke.

139. De toepassing van de regels der differentiaal- en der integraalrekening op eene doorloopende functie van eene reëele veranderlijke $w = f(z)$, steunt op de à priori te bewijzen eigenschap van zulk eene functie, dat zij voor elke waarde van z eene afgeleide functie $\frac{dw}{dz}$ ten opzichte van z bezit, die in 't algemeen bepaald en eindig is, en alleen afhangt van z en niet van het teeken van de oneindig kleine aangroeiing van z, noch van de wijze, waarop men deze aangroeiing tot nul laat convergeeren.

Door de bepaling van afgeleide functie $\frac{dw}{dz} = \text{Grens}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$, voor Grens $\Delta z = 0$, te beschouwen als ook toepasselijk voor het geval, dat z eene complexe veranderlijke voorstelt (N°. 42), waren wij in staat in Hoofdstuk IV aan te toonen, dat de bovengenoemde grondeigenschap ook voor de functiën van eene complexe veranderlijke geldt (N°. 48). Breidt men dus de definitien van onbepaalde en

bepaalde integraal van functiën eener reëele veranderlijke ook uit over die van functiën eener complexe veranderlijke; dan kunnen op zulke functiën (die uitsluitend het onderwerp onzer beschouwing uitmaken, en niet verward moeten worden met de meer algemeene complexe functiën, zie N°. 45) ook dezelfde regels van differentieeren en integreeren worden toegepast als op de functiën van eene reëele veranderlijke; zoodat men van zulk eene functie de *afgeleide functie* of ook de *onbepaalde integraal* kan berekenen zonder er zich om te bekreunen, of de betrokken waarde der veranderlijke reëel of complexe is [1]).

140. Bij de *bepaalde integraal* $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ ondergaat echter deze beschouwing eene wijziging, doordat, ingeval z eene reëele veranderlijke is, ondersteld wordt, dat de overgang van z van z_0 naar Z slechts op ééne wijze kan geschieden; terwijl die overgang op oneindig vele wijzen kan plaats hebben, indien z eene complexe veranderlijke is; in dit laatste geval is dus de reeks der tusschengelegen waarden van z niet voorgeschreven, maar kan zij door de punten van elke willekeurige lijn van z_0 naar Z worden aangegeven. Van deze lijn hangt de waarde der integraal af, zoodat voorshands aan de functie $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ oneindig veel waarden moeten worden toegeschreven. Wij moeten derhalve onderzoeken, welk verband er bestaat tusschen de waarde dier bepaalde integraal en de verschillende wegen, die z van z_0 naar Z kan doorloopen. Voordat wij tot dat onderzoek overgaan, zullen wij eenige eigenschappen dier bepaalde integraal vermelden.

141. Is z eene complexe veranderlijke, die over eene willekeurige lijn overgaat van z_0 naar Z zoodanig, dat $f(z)$ voor geen enkel punt dier lijn oneindig groot of ondoorloopend wordt; en neemt men op die lijn eene reeks van punten, wier waarden achtereenvolgens door $z_1, z_2, z_3, \ldots\ldots z_n$ worden aangeduid; dan wordt de integraal tusschen de grenzen z_0 en Z van $f(z)\,dz$ gedefinieerd door de identieke vergelijking

---

[1]) Met dien verstande, dat men vooraf aantoone, dat de *Theorie der Grenswaarden* uit de algebraïsche analysis ook geldt voor complexe veranderlijken, en dat dus de formulen Grens $\frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} = m$, Grens $(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e$, Grens $\frac{Sin\, m\,\delta}{\delta} = m$, enz. gelden voor het geval, dat $\delta \doteq z \nearrow \zeta$ en Grens $\delta = 0$ is. (Zie Bierens de Haan, Overzicht van de Differentiaal-rekening, N°. 12).

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \text{Grens}\,[(z_1-z_0)f(z_0)+(z_2-z_1)f(z_1)+$$
$$+(z_3-z_2)f(z_2)+\ldots\ldots+(Z-z_n)f(z_n)], \quad \ldots\ldots (112)$$

wanneer de Grens van elke $z_k - z_{k-1} = 0$ is.

Uit deze bepaling, die volkomen overeenstemt met die, welke voor het geval van eene reëele veranderlijke wordt gegeven, volgen onmiddellijk deze eigenschappen.

1°. Is A een factor, die niet van z afhangt, dan is

$$\int_{z_0}^{Z} Af(z)dz = A\int_{z_0}^{Z} f(z)dz \quad \ldots\ldots\ldots (113)$$

2°. Bestaat $f(z)$ uit de som van een eindig aantal doorloopende functiën $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... dan is

$$\int_{z_0}^{Z} [f_1(z)+f_2(z)+\ldots]\,dz = \int_{z_0}^{Z} f_1(z)dz + \int_{z_0}^{Z} f_2(z)dz + \ldots \quad (114)$$

en algemeener

$$\int_{z_0}^{Z} [A_1 f_1(z)+A_2 f_2(z)+\ldots]dz = A_1\int_{z_0}^{Z} f_1(z)dz + A_2\int_{z_0}^{Z} f_2(z)dz + \ldots (115)$$

3°. Doorloopt z de lijn van z_1 naar Z in omgekeerde richting, dan verkrijgt de bepaalde integraal de tegengestelde waarde, dat is

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)dz \quad \ldots\ldots\ldots (116)$$

voor elke lijn, die z van z_0 naar Z doorloopt, in het bijzonder.

4°. Is z_1 een punt gelegen op de lijn, die z van z_0 naar Z doorloopt, dan is

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz + \int_{z_1}^{Z} f(z)dz; \quad \ldots\ldots (117)$$

waaruit volgt, dat eene integraal, wier beide grenzen standvastig of veranderlijk zijn, kan vervangen worden door de som van twee integralen, die elk eene veranderlijke en eene standvastige grens hebben.

5°. Is z_0 standvastig en Z veranderlijk en is dZ eene oneindig kleine verandering van Z, dan is

$$\int_{z_0}^{Z+dZ} f(z)dz = \text{Grens}\,[(z_1-z_0)f(z_0)+(z_2-z_1)f(z_1)+$$
$$+\ldots+(Z-z_n)f(z_n)+(Z+dZ-Z)f(Z)];$$

waarin Grens $(z_k - z_{k-1}) = 0$ en Grens $dZ = 0$ is. Vermindert men deze vergelijking term voor term met de vergelijking (112), dan verkrijgt men na deeling door dZ

$$\frac{\int_{z_0}^{Z+dZ} f(z)dz - \int_{z_0}^{Z} f(z)dz}{dZ} = \frac{\text{Grens}\, dZ f(Z)}{dZ},$$

en dus bij de Grens

$$\frac{d}{dZ}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = f(Z).$$

Evenzoo vindt men door toepassing van de 3e eigenschap, indien Z standvastig en z_0 veranderlijk is

$$\frac{d}{dz_0}\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -f(z_0).$$

Daar de differentiaal eener grootheid ten opzichte van eene veranderlijke, van welke zij niet afhangt, steeds gelijk is aan nul, moet de integraal $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ van Z afhangen, indien alleen z_0, en van z_0, indien alleen Z standvastig is, onverschillig langs welken weg z van z_0 naar Z overgaat; daar voorts $f(Z)$ onafhankelijk is van dZ, en $f(z_0)$ eveneens van dz_0, heeft men deze eigenschap. Is slechts eene der beide grenzen eener bepaalde integraal standvastig, dan is die integraal eene functie van de andere grens.

Uit het bovengezegde in de 4e eigenschap volgt nu, dat de waarde eener bepaalde integraal met veranderlijke grenzen eene functie moet zijn van beide grenzen.

§ 32.

Algemeene beschouwingen.

142. In de beide vorige Afdeelingen hebben wij gezien, dat, wanneer z langs twee verschillende wegen van z_0 naar Z overgaat, de waarden van $w = f(z)$ voor $z = Z$, die bij dezelfde beginwaarde $z = z_0$ behooren, al of niet in richtings-coëfficient zullen overeenkomen, naar gelang op of tusschen die wegen zekere punten P zijn gelegen, voor welke $f(z)$, of een factor, of in sommige gevallen een term dier functie, nul of oneindig groot wordt. Konden wij toen met het oog op de graphische voorstelling den invloed dier punten P, op de waarden van den richtings-coëfficient bij rationeele stelkundige functiën verwaarloozen, thans is dit niet meer geoorloofd, en moet die invloed wel degelijk in rekening worden gebracht; om deze reden zullen wij voorloopig de volgende onderscheiding in acht nemen.

143. Eene functie $w = f(z)$ wordt gezegd *doorloopend* (*stadig*, *continu*) te zijn in het punt $z = p$, indien zij in dit punt $z = p$, voor elke direkte of indirekte waarde van hetzelve in 't bijzonder, steeds dezelfde bepaalde eindige waarde verkrijgt, van welke zijde men dit punt p ook nadert; m. a. w. indien het verschil

$$f(p+dz)-f(p)$$

tegelijk met dz oneindig klein is, wat ook de richting zij van dz [1]); is zulks niet het geval, dan wordt de functie gezegd in het punt $z=p$ *ondoorloopend* (*onstadig*, *discontinu*) te zijn.

Dit ondoorloopend zijn kan op twee wijzen plaats hebben; of $f(z)$ kan in het punt $z=p$, van welke zijde z het punt p ook nadere, voor eenige direkte of indirekte waarde van p, oneindig groot, en dus de waarde van $\frac{1}{f(z)}$ nul zijn; en in dit geval spreekt men van *ondoorloopendheid der eerste soort* [2]). Of de waarde van $f(z)$, en dus ook die van $\frac{1}{f(z)}$, kan verschillen, naargelang men van de eene zijde of van de andere het punt $z=p$ nadert; zooals bijv. met $w=e^{\frac{1}{z}}$ het geval is, welke functie in $z=0$ de waarde nul of oneindig groot verkrijgt, naarmate men dit punt $z=0$ over het negatieve of positieve deel der as nadert; dit laatste geval wordt eene *ondoorloopendheid der tweede soort* genoemd.

Nemen wij nu de *vertakkingspunten* en de punten, in welke de functie *nul* of *ondoorloopend* wordt, samen onder den naam van *bijzondere punten* (*Ausnahme-Puncte*, *points critiques*), dan voert ons het gezegde in de vorige § tot de volgende beschouwingen.

144. In de leerboeken der integraal-rekening wordt aangetoond, dat

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z)-F(z_0) \quad \ldots\ldots\ldots (118)$$

is, indien z eene reëele veranderlijke voorstelt, $F(z)$ voor al de waar-

---

[1]) Men zegt dien ten gevolge, dat $f(z)$ op eene doorloopende wijze over een' willekeurigen, ononderbroken weg overgaat van z_0 naar Z, indien de waarden van $f(z)$ voor elke twee opeenvolgende punten van dien weg oneindig weinig verschillen. Men moet hierbij opmerken, dat als $p=r\diagup\alpha$ is, $p+dz=(r+\delta)\diagup(\alpha+\varepsilon)$ moet zijn, waarin δ en ε oneindig klein zijn, en tegelijk met dz tot nul convergeeren; $p+dz$ kan dan niet gelijk zijn aan $(r+\delta)\diagup(\alpha+2k\pi+\varepsilon)$.

[2]) Eene functie kan voor eenzelfde punt P doorloopend en ondoorloopend zijn, naar gelang de eene of andere waarde van dat punt P wordt beschouwd. Zoo is de functie $w=\frac{1}{1+\sqrt{z}}$ in $z=+1$ ondoorloopend voor $+1=1\diagup(4k+2)\pi$ en doorloopend voor $+1=1\diagup4k\pi$; in 't eerste geval is hare waarde voor dat punt ∞, in 't tweede geval $+\frac{1}{2}$. Dit punt $z=+1$ blijft men als een vertakkingspunt beschouwen. Een zelfde geval biedt de functie $w=\frac{1}{1+\sqrt{z-1}}$ aan.

den van z van z_0 tot en met Z doorloopend blijft, en $\frac{dF(z)}{dz} = f(z)$ is; — het bewijs dezer stelling gaat woordelijk door. 1°. indien z eene *complexe veranderlijke* is, en dus z_0 en Z willekeurige punten van het vlak voorstellen; mits de oneindig kleine aangroeiingen van z, dat is $z_k - z_{k-1}$, dezelfde richtingen hebben; derhalve in het geval, dat z van z_0 tot Z eene *rechte lijn* doorloopt, $F(z)$ voor al de punten dier lijn doorloopend is; en men voor de achtereenvolgende punten dier lijn de waarden van z neme, die met eene zelfde beginwaarde $z = z_0$ overeenstemmen; 2°. indien z eene *complexe richting* $\alpha \nearrow \nearrow \mathbf{a}$ voorstelt, en dus z_0 en Z willekeurige richtingen zijn (§ 29); en de oneindig kleine aangroeiingen van z, dat is de verschillen $z_k - z_{k-1}$ denzelfden standhoek $\mathbf{a}$ hebben; derhalve in het geval dat z van z_0 tot Z een *plat vlak* doorloopt, $F(z)$ voor al de doorloopen richtingen van dat vlak doorloopend is; en men voor de achtereenvolgende richtingen de waarden neme, die met eene zelfde beginwaarde $z = z_0$ overeenstemmen.

145. Laat men nu in

$$w = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (119)$$

z twee verschillende uit rechte lijnen bestaande wegen $P_1 P_3 P_2$ en $P_1 P_4 P_5 P_2$ doorloopen (Fig. 31) van $z_0 = P_1$ naar $Z = P_2$, waarbij aan de bovengenoemde voorwaarden wordt voldaan; en stelt men door $I(P_1 P_4)$ de waarde van de integraal $\int f(z)dz$ voor, voor het geval dat z over de *rechte* lijn $P_1 P_4$ van P_1 overgaat naar P_4; dan is langs den eenen weg $P_1 P_3 P_2$ de waarde van w

$$w_1 = I(P_1 P_2),$$

en langs den anderen weg $P_1 P_4 P_5 P_2$

$$w_2 = I(P_1 P_4) + I(P_4 P_5) + I(P_5 P_2).$$

Stelt nu $F(z)$ de onbepaalde integraal van $f(z)dz$ voor, en duidt men de waarde der punten aan door deze zelf; dan is volgens het bovengezegde

$$I(P_1 P_2) = F(P_2) - F(P_1),$$
$$I(P_1 P_4) = F(P_4) - F(P_1),$$
$$I(P_4 P_5) = F(P_5) - F(P_4),$$
en
$$I(P_5 P_2) = F(P_2) - F(P_5);$$

en dus, daar in deze gelijkheden P_4 en P_5 steeds dezelfde waarde voorstellen,

$$w_1 = F(P_2) - F(P_1)$$

en
$$w_2 = F(P_3) - F(P_1).$$

In deze beide vergelijkingen stelt P_1 dezelfde beginwaarde (z_0) voor; stelt dus ook P_2 in beide *dezelfde* waarde voor, dan is

$$w_1 = w_2,$$

en dus de integraal over beide wegen genomen dezelfde.

Daar deze beschouwing niet afhangt van het aantal tusschengekozen punten P_4, P_5, heeft men dus deze stelling [1]).

Doorloopt z van z_0 tot Z twee verschillende wegen, zoodanig dat op of tusschen die wegen geene bijzondere punten voorkomen, zoodat dan ook voor beide met dezelfde beginwaarde z_0 van z dezelfde eindwaarde Z van z overeenstemt; dan is de waarde van $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ langs beide wegen genomen, dezelfde;

of met andere woorden

De waarde van de bepaalde integraal $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ is zoolang onafhankelijk van den weg, dien z van z_0 naar Z doorloopt, als op of tusschen die wegen geene bijzondere punten voorkomen.

Neemt men nu in aanmerking, dat volgens N°. 141. 3°.

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = -\int_{Z}^{z_0} f(z)\,dz$$

is, dan volgen uit het voorgaande ook deze beide eigenschappen.

Doorloopt z een of meermalen eene gesloten lijn, die geene bijzondere punten bevat of insluit, zoodat het punt van uitgang na de verschillende omloopen weder volkomen dezelfde waarde verkrijgt, als het bij het begin der beweging had; dan is de waarde van w, dat is van de bepaalde integraal genomen over de gesloten lijn, gelijk nul.

en

Doorloopt z van eenzelfde punt z_0 uitgaande in denzelfden zin twee of meer gesloten lijnen, die op dezelfde wijze gelegen zijn ten opzichte van de bijzondere punten der functie; dan is de waarde der integraal, genomen over deze verschillende lijnen, dezelfde;

met andere woorden,

dan is de waarde van de bepaalde integraal w onafhankelijk van den vorm der gesloten lijn, die z een of meermalen doorloopt.

---

[1]) Een bewijs dezer stelling door toepassing van de variatie-rekening vindt men in Puiseux, t. a. p. N°. 8; dit bewijs steunt, evenals het fraaie bewijs van Riemann, dat in bijna alle nieuwe werken over de complexe getallen voorkomt, op gronden, die vreemd zijn aan het wezen der complexe grootheden.

146. Laat men nu z van P_1 uit k-maal in positieven zin [1]) eene gesloten lijn $P_1 Q R P_1$ doorloopen (Fig. 32), die een enkel bijzonder punt $P = p_1$ insluit; en beschrijft men om P een cirkel $P Q_1$; trekt men voorts de lijn $P_1 Q_1$; dan heeft volgens boven de integraal over $P_1 Q R P_1$ dezelfde waarde, als de integraal, genomen in denzelfden zin over de lijn $P_1 Q_1 R_1 Q_1 P_1$. Geeft men dus door $I_m (P_1 Q_1)$ aan de integraal over $P_1 Q_1$, genomen tusschen de grenzen P_1 en Q_1, bij den m^{en} omloop; en door $I_l (p_1)$ de integraal over den cirkel, die om p_1 is beschreven, bij den l^{en} omloop; dan is de waarde der integraal

$$w = I_1 (P_1 Q_1) + I_1 (p_1) + I_1 (Q_1 P_1) + I_2 (P_1 Q_1) + I_2 (p_1) + \\ + I_2 (Q_1 P_1) + I_3 (P_1 Q_1) + \ldots + I_k (P_1 Q_1) + I_k (p_1) + I_k (Q_1 P_1).$$

Nu is

$$I_m (Q_1 P_1) + I_{m+1} (P_1 Q_1) = 0,$$

en bijgevolg is ook

$$w = I_1 (P_1 Q_1) + \sum_1^k I_l (p_1) + I_k (Q_1 P_1) \quad \ldots . \quad (120)$$

Laat men nu de lengte van den straal $P Q_1$ voortdurend afnemen, dan heeft men dus deze eigenschap.

Doorloopt in $w = \int_{z_0} f(z)\,dz$ z van z_0 uit k-maal eene gesloten lijn, die slechts één bijzonder punt p_1 insluit; dan is de waarde dezer integraal dezelfde als die in denzelfden zin over den oneindig kleinen cirkel genomen, die uit p_1 als middelpunt is beschreven, vermeerderd met de som der beide (rechtlijnige) integralen $I_1 (P_1 Q_1)$ en $I_k (Q_1 P_1)$.

147. Voor de bepaling van de integraal w_1 over dien cirkel gaat men aldus te werk. Zij de straal van dezen cirkel r, dan is voor de punten van dien cirkel $z = p_1 + r \nearrow \phi$, en daar alleen ϕ verandert en bij een ondersteldeu k maligen positieven omloop van den cirkel toeneemt van α tot $\alpha + 2k\pi$, is ook $dz = r d\phi \nearrow \left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) =$ $= (z - p_1) d\phi \nearrow \frac{\pi}{2}$; en dus na substitutie in de gegeven integraal

$$w_1 = \int_{\alpha}^{\alpha + 2k\pi} (z - p_1) f(z) d\phi \nearrow \frac{\pi}{2} \quad \ldots \ldots . \quad (121)$$

Nadert r de grenswaarde nul, dan heeft zulks ook met $z - p_1$ plaats.

---

[1]) Doorloopt hier en in 't vervolg z de gesloten lijn l-maal in negatieven zin, of l-maal meer in negatieven dan in positieven zin, dan moet k gelijk $-l$ worden genomen.

In zeer vele gevallen verkrijgt Grens $(z-p_1)f(z)$, voor Grens $r=$ $=$ Grens $(z-p_1)=0$, eene bepaalde, *eindige* waarde λ, die niet van ϕ afhangt, en dus steeds dezelfde blijft, van welke zijde z het punt p_1 ook nadert; en in dat geval is

$$w_1=\int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi}\lambda d\phi \nearrow \frac{\pi}{2}=\left(\lambda\nearrow\frac{\pi}{2}\right)\int_{\alpha}^{\alpha+2k\pi}d\phi,$$

en dus ook

$$w_1=2k\pi\lambda\nearrow\frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (122)$$

waarin $\lambda=$ Grens $(z-p_1)f(z)$ is, voor Grens $z-p_1=0$.

Voor de gevallen, waarin, voor Grens $z-p_1=0$, Grens $(z-p_1)f(z)$ geene bepaalde, *eindige* waarde verkrijgt, stelt men ook de waarde van w_1 voor door $2k\pi\lambda\nearrow\frac{\pi}{2}$; de bepaling van λ wordt alsdan meer ingewikkeld. Voor ons doel is het voldoende te dien opzichte te verwijzen naar Houël, Théorie élémentaire des quantités complexes, Paris, Gauthier-Villars, 1868. N°. 141 en 288.

148. Doorloopt z van P_1 uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn, die twee of meer *geïsoleerde*, d. i. op eindige afstanden van elkander liggende, bijzondere punten insluit; dan trekt men uit P_1, naar verschillende punten dier lijn, lijnen zoodanig, dat elk der gesloten lijnen, die daardoor ontstaan, slechts één dier punten insluit. Zijn bijv. p_1 en p_2 die punten, dan trekt men (Fig. 33) de lijn P_1P_2; en nu volgt uit

$$I_m(P_2P_1)+I_m(P_1P_2)=0, \quad \ldots\ldots\ldots (123)$$

dat de waarde van $w=\int_{z_0} f(z)dz$ voor den m^{en} omloop genomen over de oorspronkelijke lijn $P_1P_3P_2P_4P_1$ gelijk is aan die integraal genomen over de lijn $P_1P_3P_2P_1$, vermeerderd met die integraal genomen over de lijn $P_1P_2P_4P_1$; of met andere woorden, dat

$$I_m(P_1P_3P_2P_4P_1)=I_m(P_1P_3P_2P_1)+I_m(P_1P_2P_4P_1);$$

en dus ook, dat de totale gezochte integraal gelijk is aan de som van de integralen, die men verkrijgt, door in $w=\int_{z_0} f(z)dz$ de z op *overeenkomstige* wijze kromme lijnen te laten doorloopen, die elk slechts een der beide punten p_1 en p_2 insluiten.

149. Op dezelfde wijze kan het geval, dat z van P_1 uit eene gesloten lijn doorloopt, die een eindig aantal, bijv. n geïsoleerde bijzondere punten insluit, teruggebracht worden tot het geval van

N°. 146. Men moet daarbij de volgorde dezer n gesloten lijnen in het oog houden; deze mag niet willekeurig worden veranderd, daar zulk eene verandering, zooals later (N°. 172) zal blijken, invloed kan hebben op de waarde der verkregen integralen. Doorloopt bijv. z van P_1 uit, in den zin van het pijltje de lijn $P_1 P_2 \ldots P_{13} P_1$ (Fig. 34), die de bijzondere punten $p_1, p_2, \ldots p_6$ insluit, dan moet men de integralen over $P\ P_2 P_3 P_1$, $P_1 P_3 P_4 P_1$, enz. nemen in de volgorde, waarin de oorspronkelijk doorloopen kromme lijn telkens een deel uitmaakt van de nieuwe gesloten lijnen, wijl alleen dan formule (123) geldt. Zoo zal de integraal over de lijn $P_1 P_2 \ldots P_{13} P_1$ gelijk zijn aan

$$I(P_1 P_2 P_3 P_1) + I(P_1 P_3 P_4 P_1) + I(P_1 P_4 P_5 P_1) + I(P_1 P_5 P_6 P_1) +$$
$$+ I(P_1 P_6 P_7 P_1) + I(P_1 P_7 P_8 P_1) + I(P_1 P_8 P_9 P_1) + I(P_1 P_9 P_{10} P_1) +$$
$$+ I(P_1 P_{10} P_{11} P_1) + I(P_1 P_{11} P_{12} P_1) + (P_1 P_{12} P_{13} P_1).$$

Liggen twee of meer bijzondere punten met $P_1 = z_0$ in eene rechte lijn, zoodat de verdeeling door rechte lijnen van z_0 uit niet mogelijk is; dan neemt men de integraal van een punt $z_0 + \delta$ uit aan de eene zijde, en van een punt $z_0 - \delta$ uit aan de andere zijde van z_0 op de gesloten lijn gelegen. Geven deze beide integralen voor Grens $\delta = 0$ dezelfde waarden, dan is deze waarde ook die van de gezochte integraal. Geven zij verschillende waarden, dan blijft de waarde der gezochte integraal onbepaald, en kan zij alleen in enkele bijzondere gevallen bepaald worden (zie N°. 153).

150. De vorige beschouwingen gelden ook voor het geval, dat z eene *complexe richting* voorstelt, en dus de richtingen doorloopt, die aangegeven worden door de achtereenvolgende beschrijvende lijnen van een kegel, wiens top in O valt. De bijzondere punten p_l worden hierbij *bijzondere richtingen* π_l, de oneindig kleine cirkel om p_l wordt een cirkelvormige kegel met een oneindig kleinen tophoek, waarvan de bijzondere richting π_l de as is. Met deze wijzigingen gelden ook nu de volgende beschouwingen.

HOOFDSTUK IX.

DE INTEGRALEN VAN EEN- EN VEELZINNIGE FUNCTIËN.

§ 33.

Synektische en Asynektische functiën.

151. In de vorige § hebben wij steeds gesproken van *bijzondere* punten, zonder ons om den aard dier punten te bekreunen. Nemen wij dien in aanmerking, dan moeten wij in de eerste plaats het geval, dat deze punten vertakkingspunten zijn, en dus $f(z)$ eene meerzinnige functie is van z, scheiden van dat, waarin $f(z)$ eenzinnig (monodrom) is. Beschouwen wij vooreerst alleen het laatste geval, dan worden daarbij de voorgaande algemeene beschouwingen aanmerkelijk vereenvoudigd.

Neemt men namelijk in aanmerking, dat als $f(z)$ eene *eindige* waarde heeft, de aangroeiing

$$F(z+\Delta z)-F(z)=[f(z)+\varepsilon]\Delta z,$$

voor Grens $\varepsilon=0$, gelijktijdig met Δz, oneindig klein zal zijn; dat, als $f(z)$ eenzinnig is, Δz bij den overgang van een punt tot het volgende slechts ééne waarde heeft; en dat bij stelkundige functiën het al of niet voorkomen van z onder het wortelteeken de meerzinnigheid en eenzinnigheid der functie bepaalt; dan komt men tot deze eigenschap.

Is eene functie $f(z)$ eenzinnig en doorloopend op en tusschen twee lijnen, dan zal de onbepaalde integraal $\int f(z)dz$ geene veelzinnige, of op of tusschen die lijnen ondoorloopende stelkundige functie kunnen zijn [1]).

In verband met N°. 141 volgt hieruit onmiddellijk, dat, ingeval $f(z)$ eenzinnig is, in N°. 146

$$I_1(P_1Q_1)+I_k(Q_1P_1)=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (124)$$

is; want komt nu aldaar in $w_1=f(z)$ bij den eersten omloop van z met een willekeurig punt van P_1Q_1 overeen de waarde w_0 van w_1, dan zal bij den $(k+1)^{en}$ omloop met datzelfde punt van P_1Q_1 over-

[1]) Men mag niet zeggen, dat de onbepaalde integraal eenzinnig en doorloopend moet zijn op en tusschen die lijnen; zij kan ook oneindig veelzinnig zijn, zooals uit $\int\frac{dz}{z}$, $\int\frac{dz}{1+z^2}$, enz. blijkt (zie § 28 en § 30).

eenkomen (N°. 58) de waarde $w_0 . 1\nearrow 2k\pi$ van w_1, zoodat men volgens de bepaling van bepaalde integraal heeft $I_{k+1}(P, Q_1) = I_1(P, Q_1) . 1\nearrow 2k\pi$, en dus ook (N°. 146) $I_1(P_1 Q_1) + I_k(Q_1 P_1) = [1 - 1\nearrow 2k\pi] . I_1(P_1 Q_1) = 0$. Hierdoor wordt form. (120)

$$w = \sum_1^k I_l(p), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (125)$$

zoodat de stelling van N°. 146 overgaat in deze

Is $f(z)$ eene eenzinnige functie van z, en doorloopt z van z_0 uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn, die slechts één bijzonder punt $P = p$ insluit; dan is de waarde der integraal $w = \int_{z_0} f(z)dz$ dezelfde, als die in denzelfden zin genomen over den oneindig kleinen cirkel, die uit dat punt P als middelpunt wordt beschreven, dat is gelijk aan $2k\pi\lambda\nearrow\frac{\pi}{2}$.

In dit geval hangt dus de waarde van w evenmin af van den *vorm* der gesloten lijn, als van de *ligging* (d. i. de waarde) van het uitgangspunt van z op die lijn.

152. Voorts kunnen nu de punten, voor welke $f(z) = 0$ is, buiten beschouwing blijven; want wordt voor $z = p$, $f(z) = 0$, dan wordt ook voor Grens $z = p$, $\lambda =$ Grens $(z - p) f(z) = 0$; zoodat deze punten geen invloed hebben op de waarde van w. Men heeft dus alleen die punten in acht te nemen, voor welke $f(z)$ ondoorloopend wordt. Hierdoor komt men tot deze onderscheiding.

De eenzinnige functie $f(z)$ kan voor al de punten *op* en *tusschen* de beide wegen, die z van z_0 naar Z doorloopt (op en binnen de gesloten lijn), doorloopend zijn, hetgeen men uitdrukt door te zeggen, dat $f(z)$ binnen die wegen *synektisch* is (Cauchy, Comptes rendus, A. 1855, p. 447), om daardoor aan te duiden, dat de beschouwing van § 17 voor al de punten op en tusschen de beide wegen geldt;

of ook $f(z)$ kan in een eindig aantal geïsoleerde punten *tusschen* die beide wegen (of binnen de gesloten lijn) ondoorloopend of, zoo als men het noemt, *asynektisch* worden;

of eindelijk kan dit ondoorloopend worden plaats hebben voor één of meer punten *van* een dier beide wegen;

welk laatste geval buiten beschouwing zou moeten blijven, indien het ontstaan dier wegen niet bekend is; vergelijk N°. 70.

153. In dit laatste geval geldt echter de definitie van bepaalde integraal niet meer, zoodat zij voor dit geval aldus wordt gewijzigd: doorloopt z eene lijn van z_0 naar Z, die $f(z)$ achtereenvolgens in de

punten p_1, p_2, ... p_k ondoorloopend maakt; en zijn $p_1 - c_1 \varepsilon$, $p_1 + c'_1 \varepsilon$, $p_2 - c_2 \varepsilon$, $p_2 + c'_2 \varepsilon$, enz. punten van de doorloopen lijn aan weerszijden van p_1, p_2, enz. gelegen; zoodat z bij de beweging over de lijn van z_0 naar Z eerst in $p_1 - c_1 \varepsilon$, dan in p_1, daarna in $p_1 + c'_1 \varepsilon$, enz. komt; dan wordt de integraal genomen over de genoemde lijn tusschen de grenzen z_0 en Z gedefinieerd door de vergelijking

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)dz = \int_{z_0}^{p_1 - c_1 \varepsilon} f(z)dz + \int_{p_1 + c'_1 \varepsilon}^{p_2 - c_2 \varepsilon} f(z)dz + .. + \int_{p_k + c'_k \varepsilon}^{Z} f(z)dz \quad (126)$$

voor Grens $\varepsilon = 0$.

(Deze wijziging der definitie geldt ook voor het geval, dat $f(z)$ eene veelzinnige functie is, en een of meer der punten p_1, p_2, ... p_k vertakkingspunten zijn.)

154. In verband met het vroeger behandelde kunnen wij hieraan de volgende opmerkingen verbinden.

1°. Is $f_n(z)$ eene geheele rationeele stelkundige functie van z en wel

$$f_n(z) = A_n z^n + A_{n-1} z^{n-1} + \ldots + A_1 z + A_0;$$

dan zijn de functiën $f_n(z)$, $e^{f_n(z)}$, $f_n(z).e^{f_n(z)}$, $Cos f_n(z)$, $Sin f_n(z)$, $f_n(z).Cos f_n(z)$, enz. over het geheele vlak (en voor z eene complexe richting over de geheele ruimte) synektisch.

2°. Is $f(z) = \dfrac{\Phi(z)}{F(z)}$ eene zooveel mogelijk herleide gebroken rationeele stelkundige functie van z, dan zijn de functiën $f(z)$, $e^{f(z)}$, enz. asynektisch in de punten van het vlak (in de richtingen in de ruimte), die aangeduid worden door de wortels der vergelijking $F(z) = 0$; terwijl de functiën $Cotg f(z)$ en $Cosec f(z)$ bovendien asynektisch zijn in de punten (richtingen), die door de wortels der vergelijking $\Phi(z) = 0$ worden aangewezen.

§ 34.

De integralen van synektische functiën.

155. Houden wij ons vooreerst alleen met de integralen van synektische functiën bezig, dan hebben wij uit N°. 145 onmiddellijk deze stellingen.

1°. *Is de functie $f(z)$ synektisch binnen de wegen $P_1P_2P_3$ en $P_1P_4P_3$* (*Fig.* 18), *dan heeft de bepaalde integraal* $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)dz$ *langs beide wegen genomen dezelfde waarde,*
of met andere woorden

De waarde van deze bepaalde integraal is zoolang onafhankelijk van den weg, dien z van z_0 naar Z doorloopt, als $f(z)$ binnen die wegen synektisch blijft.

In verband met N°. 141. 3° volgt hieruit

2°. *Is de functie $f(z)$ synektisch binnen de gesloten lijn, die z van z_0 uit een of meermalen doorloopt, dan is*

$$w = \int_{z_0} f(z)\,dz = 0,$$

wat ook de vorm der gesloten lijn moge zijn.

Voorts volgt uit het gezegde in N^{os} 151 en 152

3°. *Is $f(z)$ synektisch tusschen den weg, dien z van z_0 naar Z doorloopt, en de rechte lijn, die z_0 en Z vereenigt, dan is ook over de eerstgenoemde lijn de waarde van de integraal*

$$w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = F(Z) - F(z_0),$$

indien $F(z)$ de onbepaalde integraal van $f(z)\,dz$ voorstelt.

Men verkrijgt dus in dit geval, en derhalve ook steeds, wanneer $f(z)$ over het geheele vlak synektisch is, de waarde van de bepaalde integraal op volkomen dezelfde wijze uit de onbepaalde integraal, als in het geval, dat z eene reëele veranderlijke voorstelt.

156. De voorgaande beschouwingen kunnen op verschillende wijzen worden dienstbaar gemaakt ter bepaling van de waarde van bepaalde integralen tusschen reëele grenzen. Een paar wijzen zullen wij hier vermelden.

I. Zij in

$$w = \int_0^Z f(z)\,dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (127)$$

Z een punt P_1 van de as (Fig. 35), en $f(z)$ synektisch binnen het vlak, dat begrensd wordt door het deel van de as OP_1 en door den halven cirkel, op OP_1 als middellijn boven de as beschreven; alsdan zal de waarde dier integraal dezelfde zijn, of z de rechte lijn, of wel den halven cirkel van O uit doorloopt. In dit laatste geval wordt $z = Z\,Cos\,\phi \nearrow \phi$, $dz = Z d\phi \nearrow \left(2\phi + \frac{\pi}{2}\right)$, terwijl ϕ overgaat van $\frac{\pi}{2}$ tot 0. De substitutie dezer waarden geeft

$$w = Z\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(Z\,Cos\,\phi \nearrow \phi)\,d\phi \nearrow \left(2\phi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \ldots\ldots \quad (128)$$

welke integraal, door toepassing van de formule

$$p \nearrow \alpha = p\,Cos\,\alpha + \sqrt{-1}\,.\,p\,Sin\,\alpha,$$

in twee deelen kan gesplitst worden, wier waarde door vergelijking met de gegeven integraal (127) wordt bepaald.

Zij bijv. $f(z) = (1-z)^{a-1} z^{b-1}$, en dus de integraal de β—functie

$$w = \int_0^1 (1-z)^{a-1} z^{b-1} dz = \frac{1^{a/1}}{b^{a/1}.a}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; (129)$$

dan is hierin $f(z)$ voor elke geheele waarde van a en b grooter dan 0 in het geheele vlak synektisch. Daar nu $Z = 1$ en $1 - z =$ $= 1 - Cos\,\phi \nearrow \phi = Sin\,\phi \nearrow \left(\frac{3\pi}{2} + \phi\right)$ is, wordt deze integraal, over den halven cirkel genomen,

$$w = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{a-1}\phi\,.\,Cos^{b-1}\phi\, d\,\phi \nearrow \left[(a+b)\phi + \frac{3a-2}{2}\pi\right],$$

en dus ook

$$w = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{a-1}\phi . Cos^{b-1}\phi . Cos \left[(a+b)\phi + \frac{3a\pi}{2}\right] d\phi +$$
$$+ \sqrt{-1}. \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{a-1}\phi . Cos^{b-1}\phi . Sin \left[(a+b)\phi + \frac{3a\pi}{2}\right] d\phi,$$

waaruit door vergelijking met (129) volgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{a-1}\phi . Cos^{b-1}\phi . Cos \left[(a+b)\phi + \frac{3a\pi}{2}\right] d\,\phi = \frac{1^{a/1}}{b^{a/1}.a} \; . \; . \; (130)$$

en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^{a-1}\phi . Cos^{b-1}\phi . Sin \left[(a+b)\phi + \frac{3a\pi}{2}\right] d\phi = 0; \quad (131)$$

welke beide formulen voor elke geheele waarde van a en b grooter dan nul gelden, en voor $a = 1, = 2$, en $b = 1$, meer bekende formulen opleveren.

157. II. Zijn in

$$w = \int_{-Z}^{+Z} f(z)\, dz \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (132)$$

$+Z$ en $-Z$ punten P_1 en P_2 van de as (Fig. 36), en is $f(z)$ synektisch binnen het vlak, besloten tusschen het deel $P_1 P_2$ der as en den halven cirkel uit O op $P_1 P_2$ als middellijn beschreven; dan is weder de waarde der integraal dezelfde, of z de rechte lijn $P_2 P_1$ of den halven cirkel van P_2 uit doorloopt. In het laatste geval is $z = Z \nearrow \phi$ en $dz = Z d \phi \nearrow \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$, terwijl ϕ doorloopend van π tot 0 overgaat. De substitutie dezer waarden in (132) geeft

$$w = Z\int_{\pi}^{0} f(Z\nearrow\phi)\, d\phi \nearrow \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right), \ldots\ldots \quad (133)$$

welke integraal weder even als boven in twee andere kan worden gesplitst.

Eene eenvoudige toepassing dezer methode is de volgende.

Uit
$$\int_{0}^{1} z^{2a-1}(1-z^{2b})^{c}\, dz = \int_{0}^{-1} z^{2a-1}(1-z^{2b})^{c}\, dz,$$
volgt voor a, b en c geheel, en $a > 0$ en b en $c > -1$,

$$w_1 = \int_{-1}^{1} z^{2a-1}(1-z^{2b})^{c}\, dz = 0; \ldots\ldots \quad (134)$$

en evenzoo uit

$$\int_{0}^{1} z^{2a}(1-z^{2b})^{c}\, dz = -\int_{0}^{-1} z^{2a}(1-z^{2b})^{c}\, dz,$$

volgt voor a, b en c geheel, en > -1,

$$w_2 = \int_{-1}^{1} z^{2a}(1-z^{2b})^{c}\, dz = \frac{2(2b)^{c}\, 1^{c/1}}{(2a+1)^{c+1/2b}} \ldots \quad (135)$$

Zijn nu a, b en c zulke geheele getallen, dan kan men $z = 1\nearrow\phi$ stellen; daardoor wordt

$$dz = d\phi\nearrow\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right),\quad 1 - z^{2b} = 2\,Sin\, b\phi\nearrow\left(b\phi + \frac{3\pi}{2}\right),$$

en verkrijgt men na substitutie in de boven opgegeven waarden van w_1 en w_2

$$w_1 = \int_{\pi}^{0} 2^{c}\, Sin^{c}\, b\phi\, d\phi\nearrow\left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right],$$

en

$$w_2 = \int_{\pi}^{0} 2^{c}\, Sin^{c}\, b\phi\, d\phi\nearrow\left[(2a+bc+1)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right].$$

Door splitsing vindt men hieruit, voor $a > 0$ en b en $c > -1$,

$$\int_{0}^{\pi} Sin^{c}\, b\phi . Cos\left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\phi = 0 \quad . . \quad (136)$$

en

$$\int_{0}^{\pi} Sin^{c}\, b\phi . Sin\left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\phi = 0, \quad . . \quad (137)$$

en, voor $a > -1$, $b > -1$ en $c > -1$,

$$\int_{0}^{\pi} Sin^{c}\, b\phi . Cos\left[(2a+bc+1)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\phi = -\frac{2b^{c}\, 1^{c/1}}{(2a+1)^{c+1/2b}} \quad (138)$$

en

$$\int_{0}^{\pi} Sin^{c}\, b\phi . Sin\left[(2a+bc+1)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\phi = 0 \quad . . \quad (139)$$

158. III. Is in

$$w = \int_0^Z f(z)\,dz \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(140)$$

Z weder een punt P_1 der as (Fig. 37), en $f(z)$ synektisch in alle punten van het cirkelquadrant, dat door de as en de loodlijn OP_2 van den uit O met OP_1 als straal beschreven cirkel wordt afgesneden; dan is de waarde dier integraal dezelfde, of z de rechte lijn OP_2 en daarna den cirkelboog P_2PP_1, of wel alleen de rechte lijn OP_1 doorloopt. Voor de punten van den cirkelboog is weder $z = Z \nearrow \phi$, en $dz = Zd\phi \nearrow \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$, terwijl ϕ daarbij overgaat van $\frac{\pi}{2}$ op 0; zoodat men ook heeft

$$w = \int_0^Z f(z)\,dz = \int_0^{Z\nearrow\frac{\pi}{2}} f(z)\,dz + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(Z\nearrow\phi)Zd\phi \nearrow \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right).$$

Door substitutie van $z = z_1 \nearrow \frac{\pi}{2}$ gaat de eerste term van het laatste lid over in $\int_0^Z f\left(z \nearrow \frac{\pi}{2}\right).dz \nearrow \frac{\pi}{2}$; zoodat de voorgaande vergelijking overgaat in

$$w = \int_0^Z f(z)dz = \int_0^Z f\left(z\nearrow\frac{\pi}{2}\right).dz\nearrow\frac{\pi}{2} + Z\int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(Z\nearrow\phi).d\phi\nearrow\left(\phi+\frac{\pi}{2}\right).(141)$$

Is bijvoorbeeld

$$w = \int_0^1 z^{2a-1}(1-z^{2b})^c\,dz = \frac{2^c b^c 1^{c/1}}{(2a)^{c+1/2b}}, \;\ldots\ldots \;(142)$$

dan is $Z=1, dz = d\phi \nearrow \left(\phi + \frac{\pi}{2}\right)$ en $1-z^{2b} = 2\,Sin\,b\phi \nearrow \left(b\phi + \frac{3\pi}{2}\right)$; zoodat men door substitutie vindt

$$w = \int_0^1 z^{2a-1}(1-z^{2b}\nearrow b\pi)^c.dz\nearrow a\pi + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 2^c Sin^c b\phi.d\phi \nearrow \left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right].$$

Zijn nu a en b even, dan is de eerste term van het tweede lid gelijk aan het tweede lid van (142); en dus

$$w_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\phi.d\phi \nearrow \left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] = 0;$$

is b even en a oneven, dan wordt

$$w_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\phi.d\phi \nearrow \left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] = -\frac{2b^c 1^{c/1}}{(2a)^{c+1/2b}},$$

enz., waaruit volgt, voor a en b beide even,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\phi . Cos\left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\phi = 0; \quad . . (143)$$

en voor b even en a oneven,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\phi . Cos\left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\phi = -\frac{2b^c 1^{c|1}}{(2a)^{c+1|2b}}; \quad (144)$$

en voor b even, maar a willekeurig, mits geheel en > 0,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin^c b\phi . Sin\left[(2a+bc)\phi + \frac{3c+1}{2}\pi\right] d\phi = 0 \quad . . (145)$$

159. Het is voldoende deze methoden hier te hebben aangegeven. De eerste en tweede worden met nog een paar andere methoden van Cauchy vermeld in Houël, t. a. p. N°. 225 en volg. Zie ook Schlömilch, Compendium der höheren Analysis. II. S. 54.

§ 35.

De integralen van asynektische functiën.

160. Gaan wij thans over tot de asynektische functiën, dan hebben wij vooreerst, volgens het gezegde in N°. 151, deze stelling.

Doorloopt z van z_0 uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn, die slechts één punt P insluit, voor hetwelk $f(z)$ asynektisch wordt; dan is de waarde der integraal $w = \int_{z_0} f(z)\,dz$ dezelfde als die, waarbij z in denzelfden zin den oneindig kleinen cirkel doorloopt, die uit dat punt P als middelpunt wordt beschreven; en dus is die waarde ook gelijk aan $2k\pi\lambda\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, indien voor Grens $z = p_1$, Grens $(z - p_1)f(z) = \lambda$ is.

161. Doorloopt nu z van P_1 uit k-maal in positieven zin de gesloten lijn $P_1 P_3 P_2 P_4 P_1$ (Fig. 33), die twee punten p_1 en p_2 insluit, voor welke $f(z)$ asynektisch is; dan is volgens N^{os}. 148 en 160 de waarde der integraal $w = \int_{z_0} f(z)dz$ gelijk aan de som der integralen, die men verkrijgt, wanneer men $\int_{z_0} f(z)dz$ neemt over den oneindig kleinen cirkel die om p_1, en daarna dezelfde integraal over den oneindig kleinen cirkel, die om p_2 als middelpunt is be-

schreven, en wel aldus k-maal achtereenvolgens; is daarbij de waarde der eerste integraal $2\pi\lambda_1 \nearrow \frac{\pi}{2}$, en die der tweede $2\pi\lambda_2 \nearrow \frac{\pi}{2}$, dan is de waarde van w

$$w = 2k\pi(\lambda_1 + \lambda_2) \nearrow \frac{\pi}{2}.$$

Neemt men nu in aanmerking, dat over zulk een cirkel genomen de bepaalde integraal $\int_{c_0} f(z)\,dz$ voor elken omloop dezelfde waarde $2\pi\lambda \nearrow \frac{\pi}{2}$ heeft, en dat dus de volgorde van de verschillende omloopen om de verschillende punten p geen invloed heeft op de waarde van w; dan heeft men, met inachtneming van N°. 141. 8°, deze stelling.

Doorloopt z van een willekeurig punt z_0 uit eene gesloten lijn, die een eindig aantal, bijv. n, geïsoleerde punten p_l insluit, voor welke $f(z)$ asynektisch is, en wel zoo, dat z het punt p_l l-maal meer in positieven dan in negatieven zin omloopt; dan is de waarde van de integraal $w = \int_{z_0} f(z)\,dz$,

$$w = 2\pi \sum_1^n l\lambda_l \nearrow \frac{\pi}{2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (146)$$

indien voor Grens $z = p_l$, Grens $(z - p_l)f(z) = \lambda_l$ is.

162. Om voorts de algemeene waarde W te bepalen van $W = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, vereenigt men de punten $P_1 = z_0$ en $P_2 = Z$ door eene rechte lijn P_1P_2 (Fig. 38) en door eene gebogen lijn P_1LP_2, zoodanig, dat de daardoor verkregen gesloten lijn de n geïsoleerde punten p_l, in welke $f(z)$ asynektisch is, insluit, en wel zoo, dat z bij het doorloopen dier gesloten lijn het punt p_l l-maal omloopt.

Nu is volgens boven over deze gesloten lijn

$$\int_{z_0} f(z)\,dz = 2\pi \sum_1^n l\lambda_l \nearrow \frac{\pi}{2},$$

en dus ook, daar

$$W = \int_{z_0} f(z)\,dz - I_k(P_2P_1)$$

is,

$$W = 2\pi \sum_1^n l\lambda_l \nearrow \frac{\pi}{2} - I_k(P_2P_1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (147)$$

waarbij P_1 en P_2 in $I_k(P_2P_1)$ moeten worden genomen in de

werkelijke richting, welke z in deze punten na den omloop der bijzondere punten heeft verkregen.

Zij als voorbeeld

$$W_1 = \int_{+1}^{z} \frac{dz}{z}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (148)$$

dan is $f(z)$ asynektisch in $z = 0$; waarbij men vindt $\lambda = 1$, en dus $2k\pi\lambda \nearrow \frac{\pi}{2} = 2k\pi \nearrow \frac{\pi}{2}$. Voorts is $I_k(P_2 P_1) = l(+1) - l(z)$, en dus

$$w_1 = l(z) - l(+1) + 2k\pi \nearrow \frac{\pi}{2}.$$

Is nu de direkte waarde van P_2 $z = r \nearrow a$, en is in $W_1 = \int_{+1}^{z} \frac{dz}{z}$ de waarde van het beginpunt $+1 = 1 \nearrow 2k_1\pi$; dan zal na den k-maligen omloop van het punt $z = 0$, de waarde van het eindpunt zijn $z = r \nearrow [\alpha + 2(k + k_1)\pi]$. Komt dus met een willekeurig punt van $P_2 P_1$ overeen de waarde w_0 van $f(z) = \frac{1}{z}$, indien de waarde van z voor dit punt in wording (ontstaan, omloop) overeenstemt met de beginwaarde van P_1; dan zal na den omloop met datzelfde punt overeenkomen de waarde $w_0 . 1 \nearrow -2k\pi$ van $f(z)$; zoodat men volgens de bepaling van bepaalde integraal heeft, [indien $I(P_2 P_1)$ de integraal voorstelt voor het geval, dat alleen de waarden van z worden genomen, die met de beginwaarde van P_1 in wording overeenkomen], $I_k(P_2 P_1) = 1 \nearrow -2k\pi . I(P_2 P_1) = 1 \nearrow -2k\pi . [l(z) - (l+1)] = l(z) \nearrow -2k\pi$; waarin z wordt genomen in de richting overeenkomende met die van de beginwaarde van P_1; men verkrijgt dus

$$W_1 = \int_{+1}^{z} \frac{dz}{z} = l(z) \nearrow -2k\pi + 2k\pi \nearrow \frac{\pi}{2} \quad \ldots . \quad (149)$$

De overeenkomst in vorm van het tweede lid van $l((z)) = l(z) + \sqrt{-1} . 2k\pi$ met het laatste lid van (149) is oorzaak, dat men $l((z))$ somtijds door de vergelijking

$$l((z)) = \int_{+1}^{z} \frac{dz}{z}$$

definieert.

Voor meer voorbeelden en voor de toepassing van de meeste methoden der voorgaande § op integralen van asynektische functiën, zie men Houël en Schlömilch, t. a. p. Men zie ook de beschouwingen der volgende §.

§ 36.

De integralen van veelzinnige functiën.

163. Is $f(z)$ eene veelzinnige functie van z, dan kunnen wij voor de beschouwing van de integraal $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ met betrekking tot de punten, voor welke $f(z)$ nul, ondoorloopend of oneindig wordt, zonder dat deze punten vertakkingspunten van $f(z)$ zijn (zie N°. 143 en 151), naar de voorgaande §§ verwijzen; zoodat wij voorloopig die punten geheel buiten beschouwing laten, of liever alleen die veelzinnige functiën beschouwen, waarin geene factoren $z-p$ bij de termen voorkomen, die voor $z=p$ geen vertakkingspunt geven.

Uit N°. 145 volgen nu vooreerst deze stellingen.

1°. *De waarde van de bepaalde integraal* $w = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ *is onafhankelijk van den weg, dien z van z_0 naar Z doorloopt, mits deze wegen geene vertakkingspunten bevatten of insluiten;*

en

2°. *Doorloopt z van z_0 uit een- of meermalen eene gesloten lijn, die geen vertakkingspunt bevat of insluit, dan is*

$$w = \int_{z_0} f(z)\,dz = 0.$$

Verder zagen wij in N°. 146, dat, indien z van P_1 uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn doorloopt, die een vertakkingspunt $P = p_1$ insluit, dan is de waarde van de bepaalde integraal $w = \int_{z_0} f(z)\,dz$ gelijk aan $I_1(P_1 Q_1) + \sum_1^k I(p_1) + I_k(Q_1 P_1)$.

164. Zij nu in de eerste plaats $f(z) = \sqrt[n]{(z-p_1)}$, en dus

$$w = \int_{z_0} \sqrt[n]{(z-p_1)}\,dz, \quad \dots\dots\dots\dots \quad (150)$$

dan is voor Grens $z = p_1$,

$$\lambda = \text{Grens}\,(z-p_1)\sqrt[n]{(z-p_1)} = 0;$$

en dus ook

$$\sum_1^k I_l(p_1) = 0,$$

en bijgevolg

$$w = I_1(P_1 Q_1) + I_k(Q_1 P_1) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (151)$$

Komt nu in $w_1 = \sqrt[n]{(z-p_1)}$ bij den eersten omloop met een willekeurig punt van $P_1 Q_1$ overeen de waarde w_0 van w_1, dan zal (N°. 78) na den k^{en} omloop met datzelfde punt van $P_1 Q_1$ overeenkomen de waarde $w_0 . 1 \nearrow \frac{2k\pi}{n}$ van w_1; zoodat men volgens de bepaling van bepaalde integraal heeft, indien door $I(P_1 Q_1)$ de integraal over $P_1 Q_1$ wordt voorgesteld, voor het geval, dat alleen de waarden van z worden genomen, die met de beginwaarde van P_1 in wording (ontstaan, omloop) overeenkomen, $I_k(Q_1 P_1) = I(Q_1 P_1) . 1 \nearrow \frac{2k\pi}{n}$; en dus door substitutie in (151)

$$w = \left[1 - 1 \nearrow \frac{2k\pi}{n}\right] . I(P_1 Q_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

waarin (even als in 't vervolg) k aanwijst hoeveel positieve omloopen z om het punt p_1 meer heeft volbracht dan negatieve, en dus k alle geheele (positieve, nul en negatieve) waarden kan hebben.

Voor k gelijk nul, n of een veelvoud van n wordt $w = 0$.

165. Nemen wij nu $f(z) = \sqrt[n]{(z-p_1)(z-p_2) \ldots (z-p_m)}$, en dus

$$w = \int_{z_0} \sqrt[n]{(z-p_1)(z-p_2) \ldots (z-p_m)} . dz, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

dan is voor elk der m vertakkingspunten, voor Grens $z = p_g$,

$$\lambda_g = \text{Grens } (z - p_g) f(z) = 0,$$

en bijgevolg ook

$$\sum_1^k I_l (p_g) = 0.$$

Doorloopt derhalve z van P_1 uit k-maal eene gesloten lijn, die één enkel vertakkingspunt p_g bevat, dan is over die lijn

$$w = I_1 (P_1 Q_g) + I_k (Q_g P_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (154)$$

waarin Q_g (even als in 't vervolg) een punt is van den oneindig kleinen cirkel, om p_g als middelpunt beschreven; men vindt dus, even als boven (N°. 164),

$$w = \left[1 - 1 \nearrow \frac{2k\pi}{n}\right] . I(P_1 Q_g) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

Doorloopt verder z van P_1 uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn, die twee (en niet meer) vertakkingspunten p_g en p_h insluit, dan is volgens N°. 148, wijl $\lambda_g = \lambda_h = 0$ is,

$$w = I_1(P_1 Q_g) + I_1(Q_g P_1) + I_1(P_1 Q_h) + I_1(Q_h P_1) + \\ + I_2(P_1 Q_g) + \ldots + I_k(Q_h P_1) \quad \ldots \ldots \quad (156)$$

Nu is echter, in verband met N°. 91 en N°. 164,

$$I_2(P_1 Q_g) = I(P_1 Q_g).1 \nearrow \frac{4\pi}{n};\ I_l(P_1 Q_g) = I(P_1 Q_g).1 \nearrow \frac{4(l-1)\pi}{n};$$

$$I_l(Q_g P_1) = I(Q_g P_1).1 \nearrow \frac{4(l-1)\pi + 2\pi}{n};\ I_1(P_1 Q_h) =$$

$$= I(P_1 Q_h).1 \nearrow \frac{2\pi}{n};\ I_l(P_1 Q_h) = I_l(P_1 Q_h).1 \nearrow \frac{4(l-1)\pi + 2\pi}{n};$$

$$I_1(Q_h P_1) = I(Q_h P_1).1 \nearrow \frac{4\pi}{n};\ \text{en}\ I_l(Q_h P_1) = I(Q_h P_1).1 \nearrow \frac{4l\pi}{n};$$

zoodat men door substitutie in (156) voor de waarde van w vindt,

$$w = \left[1 - 1 \nearrow \frac{2\pi}{n} + 1 \nearrow \frac{4\pi}{n} - 1 \nearrow \frac{6\pi}{n} + \ldots + 1 \nearrow \frac{4(k-1)\pi}{n} - 1 \nearrow \frac{(4k-2)\pi}{n}\right].I(P_1 Q_g) +$$

$$+ \left[1 \nearrow \frac{2\pi}{n} - 1 \nearrow \frac{4\pi}{n} + 1 \nearrow \frac{6\pi}{n} - 1 \nearrow \frac{8\pi}{n} + \ldots + 1 \nearrow \frac{(4k-2)\pi}{n} - 1 \nearrow \frac{4k\pi}{n}\right].I(P_1 Q_h).(157)$$

Indien z vooreerst n_1-maal het punt p_g, vervolgens n_2-maal het punt p_h, daarna weder n'_1-maal het punt p_g, enz. omloopt, dan is evenzoo de waarde der bepaalde integraal

$$w = I_1(P_1 Q_g) + I_{n_1}(Q_g P_1) + I_{n_1}(P_1 Q_h) + I_{n_1+n_2}(Q_h P_1) + \\ + I_{n_1+n_2}(P_1 Q_g) + I_{n_1+n_2+n'_1}(Q_g P_1) + I_{n_1+n_2+n'_1}(P_1 Q_h) + \ldots (158)$$

Nu is echter $I_{n_1}(Q_g P_1) = I(Q_g P_1).1 \nearrow \frac{2n_1\pi}{n};\ I_{n_1}(P_1 Q_h) =$

$$= I(P_1 Q_h).1 \nearrow \frac{2n_1\pi}{n};\ I_{n_1+n_2}(Q_h P_1) = I(Q_h P_1).1 \nearrow \frac{2(n_1+n_2)\pi}{n};$$

$$I_{n_1+n_2}(P_1 Q_g) = I(P_1 Q_g).1 \nearrow \frac{2(n_1+n_2)\pi}{n};\ \text{enz. en dus}$$

$$w = \left[1 - 1 \nearrow \frac{2n_1\pi}{n} + 1 \nearrow \frac{2(n_1+n_2)\pi}{n} - 1 \nearrow \frac{2(n_1+n_2+n'_1)\pi}{n} + \ldots\right] I(P_1 Q_g) +$$

$$+ \left[1 \nearrow \frac{2n_1\pi}{n} - 1 \nearrow \frac{2(n_1+n_2)\pi}{n} + 1 \nearrow \frac{2(n_1+n_2+n'_1)\pi}{n} - \ldots\right] I(P_1 Q_h)\ (159)$$

Doorloopt in 't algemeen z van P_1 uit eene gesloten lijn, die k vertakkingspunten $p_1, p_2, \ldots p_k$ insluit, en wel zoo dat z eerst n_1-maal p_1, daarna n_2-maal p_2, enz. tot n_k-maal p_k, vervolgens n'_1-maal p_1, enz. in positieven zin omloopt; dan verkrijgt men op bovenstaande wijze voor de waarde der bepaalde integraal

$$w=\left[1-1\nearrow\frac{2n_1\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+\ldots+n_k)\pi}{n}-1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+\ldots+n_k+n^1{}_1)\pi}{n}+\ldots\right]I(P_1Q_1)+$$

$$+\left[1\nearrow\frac{2n_1\pi}{n}-1\nearrow\frac{2(n_1+n_2)\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+\ldots+n_k+n^1{}_1)\pi}{n}-\ldots\right]I(P_1Q_2)+$$

$$+\left[1\nearrow\frac{2(n_1+n_2)\pi}{n}-1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+n_3)\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+\ldots+n'_2)\pi}{n}-\ldots\right]I(P_1Q_3)+$$

$$+\ldots\ldots$$

$$+\left[1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})\pi}{n}-1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+\ldots+n_k)\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1+n_2+\ldots+n'_{k-1})\pi}{n}-\right]I(P_1Q_k)$$

$$\ldots\ (160)$$

166. Welke waarde de bepaalde integraal aanneemt voor het geval, dat twee of meer vertakkingspunten (mits dit aantal minder dan n bedrage) samenvallen, blijkt onmiddellijk uit het voorgaande in verband met N°. 89. Zij bijv. $f(z)=\sqrt[3]{(p+qz)^2}$ en dus

$$w=\int_{z_0}\sqrt[3]{(p+qz)^2}\,.\,dz;\ \ldots\ldots\ldots\ (161)$$

dan is $-\frac{p}{q}$ het eenige vertakkingspunt der functie; laat nu z van $P_1=z_0$ uit eene gesloten lijn doorloopen, die dit vertakkingspunt k-maal omloopt, dan wordt de waarde der integraal

$$w=\left(1-1\nearrow\frac{4k\pi}{3}\right).I(P_1Q_1);$$

en dus, daar

$$I(P_1Q_1)=\int_{z_0}^{-\frac{p}{q}+\delta}(p+qz)^{\frac{2}{3}}dz=\frac{3}{5q}\left[(p+qz)^{\frac{5}{3}}\right]_{z_0}^{-\frac{p}{q}+\delta}$$

voor Grens $\delta=0$ is,

$$w=-\left(1-1\nearrow\frac{4k\pi}{3}\right)\frac{3}{5q}(p+qz_0)^{\frac{5}{3}};\ \ldots\ldots\ (162)$$

voor $k=1,\ 4,\ 7,\ldots\ 3m+1$, wordt deze waarde

$$w=-\frac{1}{2}(3+\sqrt{-3})\frac{3}{5q}(p+qz_0)^{\frac{5}{3}};$$

voor $k=2,\ 5,\ 8,\ldots\ 3m+2$, wordt zij

$$w=-\frac{1}{2}(3-\sqrt{-3})\frac{3}{5q}(p+qz_0)^{\frac{5}{3}};$$

en voor $k=0,\ 3,\ 6,\ 9,\ldots\ 3m$, wordt zij

$$w=0.$$

167. Zij verder $f(z) = \frac{1}{\sqrt[n]{(z-p_1)}}$ en dus

$$w = \int_{z_0} \frac{dz}{\sqrt[n]{(z-p_1)}}; \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (163)$$

en omloopt z k-maal het vertakkingspunt p_1, dan is weder voor Grens $z = p_1$,

$$\lambda = \text{Grens}\ \frac{z-p_1}{\sqrt[n]{(z-p_1)}} = 0,$$

en bijgevolg ook

$$\sum_1^k I_l(p_1) = 0;$$

zoodat men ook nu vindt

$$w = I_1(\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1) + I_k(\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1) \ldots \ldots \ldots \quad (164)$$

Komt nu in $w_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{(z-p_1)}}$ bij den eersten omloop met een willekeurig punt van $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ overeen de waarde w_0 van w_1, dan zal (N°. 91) na den k^{en} omloop met datzelfde punt van $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ overeenkomen de waarde $w_0 . 1 \nearrow - \frac{2k\pi}{n}$ van w_1; zoodat $I_k(\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_1) = \left(-1 \nearrow - \frac{2k\pi}{n}\right) I(\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1)$ is, en men heeft

$$w = \left[1 - 1 \nearrow - \frac{2k\pi}{n}\right] . I(\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1) \ldots \ldots \quad (165)$$

De vergelijking van deze waarde met die in N°. 164 verkregen, toont aan dat de k-malige positieve omloop van een vertakkingspunt, dat betrekking heeft op een factor, die in den noemer voorkomt, gelijk staat met den k-maligen negatieven omloop van een vertakkingspunt, dat betrekking heeft op een factor, die in den teller voorkomt. Dit volgt trouwens reeds uit het gezegde in N°. 91.

168. Is dus $f(z) = \frac{1}{\sqrt[n]{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_m)}}$ en derhalve

$$w = \int_{z_0} \frac{dz}{\sqrt[n]{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_m)}}, \quad \ldots \quad (166)$$

dan is weder

$$\lambda_g = \text{Grens}\ (z-p_g) f(z) = 0,$$

en dus, indien z van P_1 uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn doorloopt, die slechts één enkel vertakkingspunt p_g insluit, dan is overeenkomstig formule (155)

$$w=\left(1-1\nearrow-\frac{2k\pi}{n}\right).\,I(P_1Q_g)\;\ldots\ldots\;(167)$$

Doorloopt z echter van P_1 uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn, die twee (en niet meer) vertakkingspunten p_g en p_h insluit, dan is evenzoo, overeenkomstig formule (157)

$$w=\left[1-1\nearrow-\frac{2\pi}{n}+1\nearrow-\frac{4\pi}{n}-1\nearrow-\frac{6\pi}{n}+\ldots+1\nearrow-\frac{4(k-1)\pi}{n}-1\nearrow-\frac{(4k-2)\pi}{n}\right].I(P_1Q_g)+$$

$$+\left[1\nearrow-\frac{2\pi}{n}-1\nearrow-\frac{4\pi}{n}+1\nearrow-\frac{6\pi}{n}-1\nearrow-\frac{8\pi}{n}+\ldots+1\nearrow-\frac{(4k-2)\pi}{n}-1\nearrow-\frac{4k\pi}{n}\right]I(P_1Q_h).(168)$$

Evenzoo moeten nu in de formulen (159) en (160) $n_1, n_2, \ldots n_k$, $n^1{}_1$, enz. negatief worden genomen.

169. Is verder $f(z)=\sqrt[n]{\frac{(z-p_1)(z-p_2)\ldots.(z-p_m)}{(z-p_r)(z-p_s)\ldots.(z-p_u)}}$ en dus

$$w=\int_{z_0}\sqrt[n]{\frac{(z-p_1)(z-p_2)\ldots.(z-p_m)}{(z-p_r)(z-p_s)\ldots.(z-p_u)}}\,dz,\;\ldots\;(169)$$

en doorloopt z van P_1 uit eene gesloten lijn, die k vertakkingspunten insluit, en wel zoo, dat z eerst n_1-maal p_1, daarna n_r-maal p_r, vervolgens n_2-maal p_2, n_s-maal p_s, ... enz., eindelijk weder $n^1{}_1$-maal p_1, enz. in positieven zin omloopt; dan zal men derhalve verkrijgen voor de waarde der bepaalde integraal

$$w=\left[1-1\nearrow\frac{2n_1\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+n_2-n_s+\ldots\mp n_k)\pi}{n}-\right.$$

$$\left.-1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+n_2-n_s+\ldots\mp n_k+n^1{}_1)\pi}{n}+\ldots\right]I(P_1Q_1)+$$

$$+\left[1\nearrow\frac{2n_1\pi}{n}-1\nearrow\frac{2(n_1-n_r)\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots+n^1{}_1)\pi}{n}-\right.$$

$$\left.-1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+n_2-n_s+\ldots+n^1{}_1-n^1{}_r)\pi}{n}+\ldots\right]I(P_1Q_r)+$$

$$+\left[1\nearrow\frac{2(n_1-n_r)\pi}{n}-1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+n_2)\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots-n^1{}_r)\pi}{n}-\right.$$

$$\left.-1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots-n^1{}_r+n^1{}_2)\pi}{n}+\ldots\right]I(P_1Q_2)+$$

$$+\ldots..$$

$$+\left[1\nearrow\frac{2(n_1-n_2+\ldots)\pi}{n}-1\nearrow\frac{2(n_1-n_2+\ldots\mp n_k)\pi}{n}+1\nearrow\frac{2(n_1-n_r+\ldots+n'_2-n'_s+\ldots)\pi}{n}-\right.$$

$$\left.-1\nearrow\frac{2(n_1-n_.+\ldots+n'_2-n'_s+\ldots\mp n'_k)\pi}{n}+\ldots\right]I(P_k Q_k); \quad (170)$$

en wel $-$ of $+$, naargelang het vertakkingspunt p_k betrekking heeft op een factor in den noemer of in den teller.

170. Neemt men nu in aanmerking, dat de integralen van meertermige functiën steeds tot de som van die van eentermige functiën kunnen worden herleid, dan is het hier gezegde in verband met de beschouwingen van Hoofdstuk V voldoende, om *de waarde van de bepaalde integraal,* $w=\int_{z_0} f(z)\,dz$, *waarin* $f(z)$ *eene gegevene willekeurige stelkundige functie van* z *voorstelt, en* z *eene willekeurige gesloten lijn van* z_0 *uit doorloopt, terug te brengen tot de rechtlijnige integralen* $I(P_1 Q_1)$, $I(P_1 Q_2)$, *enz.*

Het eenige, wat hierbij bezwaar kan opleveren, is de bepaling van λ voor Grens $z=p_l$, indien, behalve onder het wortelteeken, ook factoren $z-p_l$ voor het wortelteeken voorkomen. Om niet te uitvoerig te zijn, moeten wij te dien aangaande naar het gezegde in N°. 147 verwijzen. Dat overigens zulke voor het wortelteeken voorkomende factoren de bepaling der bepaalde integraal niet verzwaren, blijkt uit het volgende voorbeeld.

Zij $$f(z)=\frac{(z-p_1)^m}{(z-p_2)\sqrt{(z-p_3)(z-p_4)}},$$

en dus $$w=\int_{z_0}\frac{(z-p_1)^m\,dz}{(z-p_2)\sqrt{(z-p_3)(z-p_4)}}, \quad \ldots\ldots (172)$$

en laat z van $z_0=P_1$ uit k-maal in positieven zin eene gesloten lijn doorloopen, die de punten p_1, p_2, p_3 en p_4 insluit; dan is vooreerst

$$\lambda_1=\lambda_3=\lambda_4=0 \text{ en } \lambda_2=\frac{(p_2-p_1)^m}{\sqrt{(p_2-p_3)(p_2-p_4)}},$$

en dus $$\sum_1^k I_l(p_1)=\sum_1^k I_l(p_3)=\sum_1^k I_l(p_4)=0,$$

en $$w_1=\sum_1^k I_l(p_2)=-\frac{2k\pi(p_2-p_1)^m}{\sqrt{(p_2-p_3)(p_2-p_4)}}\nearrow\frac{\pi}{2};$$

bijgevolg ook

$$w = w_1 + [1 - 1 \nearrow 2m\pi + 1 \nearrow (2m-4)\pi - 1 \nearrow (4m-4)\pi + \ldots]\, l(P_1 Q_1) +$$
$$+ [1 \nearrow 2m\pi - 1 \nearrow (2m-2)\pi + 1 \nearrow (4m-4)\pi - 1 \nearrow (4m-6)\pi + \ldots.]\, l(P_1 Q_2) +$$
$$+ [1 \nearrow (2m-2)\pi - 1 \nearrow (2m-3)\pi + 1 \nearrow (4m-6)\pi - 1 \nearrow (4m-7)\pi + ..]\, l(P_1 Q_3) +$$
$$+ [1 \nearrow (2m-3)\pi - 1 \nearrow (2m-4)\pi + 1 \nearrow (4m-7)\pi - 1 \nearrow (4m-8)\pi + ..]\, l(P_1 Q_4),$$

of

$$w = w_1 + [1 \nearrow 0 - 1 \nearrow \pi + 1 \nearrow 0 - 1 \nearrow \pi + \ldots]\, l(P_1 Q_3) + [1 \nearrow \pi - 1 \nearrow 0 + 1 \nearrow \pi - 1 \nearrow 0]\, l(P_1 Q_4),$$

of ook voor elke (geheele) waarde van k,

$$w = \frac{2k\pi(p_2 - p_1)^m}{\sqrt{(p_2 - p_3)(p_2 - p_4)}} \nearrow \frac{\pi}{2} + 2k[l(P_1 Q_3) - l(P_1 Q_4)] \quad (173)$$

171. Met inachtneming van het gezegde in Hoofdstuk VI en VII gelden de voorgaande beschouwingen ook voor het geval dat $f(z)$ eene transcendente functie, of z een bicomplexe getal voorstelt.

---

172. Om eindelijk de *algemeene waarde* W te bepalen van $W = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, vereenigt men de punten $P_1 = z_0$ en $P_2 = Z$ door eene rechte lijn (Fig. 38) $P_1 P_2$ en door eene gebogen lijn $P_1 L P_2$, zoodanig dat de daardoor verkregen gesloten lijn de n vertakkingspunten p_l insluit, en wel zoo dat z bij het doorloopen dier gesloten lijn het punt p_l l-maal omloopt. Nu is

$$W = \int_{z_0} f(z)\,dz - I_k(P_2 P_1), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (174)$$

waarin nu voor P_2 en P_1 in $I_k(P_2 P_1)$ de werkelijke richtingen moeten worden genomen, die z in deze punten na den omloop der vertakkingspunten heeft verkregen.

De waarde van $\int_{z_0} f(z)\,dz$ is in de voorgaande N^os^ algemeen bepaald en tot rechtlijnige integralen teruggebracht; zoodat steeds, indien $I_k(P_2 P_1)$ bepaald kan worden, — hetgeen onder anderen het geval is, indien de onbepaalde integraal $F(z)$ bekend is, — de algemeene waarde van $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ kan worden gevonden.

173. Bepalen wij bijv. de algemeene waarde van de elliptische integraal

$$W = \int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}}\,; \quad \ldots\ldots \quad (175)$$

hierin is $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$; doorloopt dus z van $P_1 = z_0 = = r_1 \nearrow \alpha_1$ uit eene gesloten lijn, die de vertakkingspunten p_1, p_2, p_3 en p_4 insluit, en wel zoo, dat z achtereenvolgens n_1-maal p_1, n_2-maal p_2, n_3-maal p_3, n_4-maal p_4, voorts weder n'_1-maal p_1, enz. in positieven zin omloopt; dan is de waarde van $w = \int_{z_0} f(z)\,dz$,

$$\begin{aligned}
w = {} & [1 - 1\nearrow -n_1\pi + 1\nearrow -l_1\pi - 1\nearrow -(l_1+n'_1)\pi + ..]\, I(P_1Q_1) + \\
& + [1\nearrow -n_1\pi - 1\nearrow -(n_1+n_2)\pi + 1\nearrow -(l_1+n'_1)\pi - \\
& \qquad - 1\nearrow -(l_1+n'_1+n'_2)\pi + ..]\, I(P_1Q_2) + \\
& + [1\nearrow -(n_1+n_2)\pi - 1\nearrow -(n_1+n_2+n_3)\pi + 1\nearrow -(l_1+n'_1+n'_2)\pi - \\
& \qquad - 1\nearrow -(l_1+n'_1+n'_2+n'_3)\pi + ..]\, I(P_1Q_3); \\
& + [1\nearrow -(n_1+n_2+n_3)\pi - 1\nearrow -l_1\pi + 1\nearrow -(l_1+n'_1+n'_2+n'_3)\pi - \\
& \qquad - 1\nearrow -(l_1+n'_1+n'_2+n'_3+n'_4)\pi]\, I(P_1Q_4), \quad \ldots\ldots \quad (176)
\end{aligned}$$

waarin l_1 staat voor $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$.

De bepaling der waarde van w is dus teruggebracht tot die van vier rechtlijnige integralen (N°. 144), wier Grenzen achtereenvolgens zijn $r_1 \nearrow \alpha_1$ en $p_1 + \rho_1$, $r_1 \nearrow \alpha_1$ en $p_2 + \rho_2$, $r_1 \nearrow \alpha_1$ en $p_3 + \rho_3$, $r_1 \nearrow \alpha_1$ en $p_4 + \rho_4$, voor Grens $\rho_l = 0$. Voor de bepaling van $I_k(P_2P_1)$ redeneeren wij aldus. Is $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n'_1 + .. = h$, en komt met een willekeurig punt van P_2P_1 overeen de waarde w_0 van $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}}$, indien de waarde van z voor dit punt in wording overeenstemt met de beginwaarde van P_1, dan zal met datzelfde punt na den omloop overeenkomen de waarde $w_0 . 1\nearrow -h\pi$ van $f(z)$; zoodat, overeenkomstig het gezegde in N°. 162, $I_k(P_2P_1) = 1\nearrow -h\pi . I(P_2P_1)$ is, en dus

$$W = w - 1\nearrow -h\pi . I(P_2P_1),$$

in welke laatste integraal $I(P_2P_1)$ de waarden van z voor de punten van P_2P_1 zoodanig moeten worden genomen, dat zij in wording overeenstemmen met de beginwaarde van P_1.

Is h even, dan is dus $I_k(P_2P_1) = -I(P_1P_2)$, terwijl voor h oneven $I_k(P_2P_1) = +I(P_1P_2)$ wordt.

Men vindt derhalve

$$W = w \pm I(P_1\,P_2), \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (177)$$

waarbij het teeken $+$ of $-$ moet worden genomen, naargelang k even of oneven is.

Gaat men de waarden na, die w in formule (176) kan verkrijgen, dan ziet men, dat voor elke waarde van n_1, n_2, enz. steeds een *even* aantal termen tusschen de haken voorkomt, en dat de som van twee opeenvolgende termen $+2$, 0 of -2 moet zijn; zoodat de algemeene waarde van w wordt uitgedrukt door

$$w = 2\,m_1\,i_1 + 2\,m_2\,i_2 + 2\,m_3\,i_3 + 2\,m_4\,i_4, \ldots\ldots \quad (178)$$

waarin m_1, m_2, m_3 en m_4 geheele getallen (ook nul) voorstellen en i_v voor $I(P_1\,Q_v)$ staat.

Men heeft dus voor de gezochte algemeene waarde

$$W = 2\,m_1\,i_1 + 2m_2\,i_2 + 2m_3\,i_3 + 2\,m_4\,i_4 \pm I(P_1\,P_2), \ldots \quad (179)$$

en wel $+$ of $-$, naargelang k even of oneven is.

INHOUD.

NB. De bladzijden behooren hier tot de afzonderlijke overdrukken; zij zijn niet anders aangegeven, omdat deze verhandeling over verschillende stukken en deelen van dit tijdschrift moest verdeeld worden.

DE ALGEMEENE STERFTETAFEL DER NATIONALE LEVENSVERZEKERING-BANK,

DOOR

DAVID J. A. SAMOT.

In Augustus 1875 is door mij, met goedvinden van de Directie der Nationale Levensverzekering-Bank, aan de boekerij van het Genootschap een exemplaar van de „Algemeene Sterftetafel" dier Bank toegezonden. Naar aanleiding van de belangstelling, waarmede deze tafel van verschillende zijden is ontvangen, geloof ik mijnen medeleden geen ondienst te doen, door haar, na enkele bekortingen te hebben aangebracht, in het Nieuw Archief te plaatsen.

Groepeering der gegevens.

In de eerste plaats komt in aanmerking de wijze, waarop ik de uitkomsten, bereids door de statistische verzameling verkregen, heb vereenigd, ten einde de getallen te vinden, die voor de berekeningen noodig waren. Deze getallen waren voornamelijk die, welke het aantal levenden en het aantal dooden voor iederen waargenomen ouderdom aanwezen. Ter opheldering geef ik hier een afschrift van eene bladzijde uit de boekjes der Maatschappij, welke het aantal waarnemingen doen kennen.

TARIEF: ....

Ouderdom 37 jaren.

	Mannen.				Vrouwen [1]).			
Jaren van waarneming.	l_m	a_m	b_m	c_m	l_v	a_v	b_v	c_v
1863	—	9	1	—	—	1	—	—
64	3	18	3	—	3	—	—	—
65	17	8	1	1	—	—	—	—
66	24	6	3	—	—	—	—	—
67	33	5	1	—	6	—	—	—
68	43	8	6	—	7	2	—	—
69	39	5	1	—	3	—	1	—
70	36	10	1	—	4	1	—	—
71	37	4	2	1	6	—	—	—
72	41	3	2	—	1	—	—	—
Totaal	273	76	21	2	30	4	1	—

In de kolommen l_m en l_v vindt men het aantal personen, die bij den aanvang van het waargenomen jaar verzekerd waren, en toen den ouderdom van 37 jaren hadden bereikt; in de kolommen a_m en a_v dat van hen, die in den loop des jaars verzekerd werden, en toen 37 jaren oud waren; in de kolommen b_m en b_v dat van hen, die de Maatschappij in den loop des jaars, hetzij wegens opzegging, hetzij wegens afloop van hun contract, verlieten; in de kolommen c_m en c_v eindelijk dat van hen, die in den loop des jaars stierven. Ook zij, die de Maatschappij verlieten, of stierven, waren op dat tijdstip 37 jaren oud.

De wijze waarop de getallen l_m en l_v gevonden zijn, blijkt uit het volgend tafeltje.

[1]) m en v wijzen den ouderdom aan; m, waar het mannen, v waar het vrouwen betreft. l_m beteekent dus een aantal van l mannen van den m-jarigen ouderdom, l_v een aantal van l vrouwen van den v-jarigen ouderdom.

TARIEF: ....

Mannen.

Jaren van waarneming.	m	l_m	a_m	b_m	c_m	l_{m+1}
1863	28	—	4	—	—	4
64	29	4	6	4	—	6
65	30	6	6	—	1	11
66	31	11	16	—	—	27
67	32	27	4	3	—	28
68	33	28	10	3	—	35
69	34	35	—	1	—	34
70	35	34	2	2	—	34
71	36	34	7	—	—	41
72	37	41	—	—	—	—

In den loop van het jaar 1863 werden derhalve verzekerd 4 28-jarige personen, die allen nog aanwezig waren aan het einde des jaars. Alstoen werden zij ondersteld allen gemiddeld den ouderdom van 29 jaren te hebben bereikt, en overgebracht naar de kolom l_m voor het jaar 1864. In den loop van dit jaar werden verzekerd 6 29-jarige personen, terwijl 4 personen van dien ouderdom de Maatschappij verlieten. Bijgevolg waren er aan het einde van 1864, dat is aan het begin van 1865, over 6 personen, die ondersteld werden allen gemiddeld den ouderdom van 30 jaren te hebben bereikt. In den loop van het jaar 1865 werden verzekerd 6 30-jarige personen, terwijl 1 persoon van dien ouderdom vóór het einde des jaars overleed. Alzoo waren er aan het einde van 1865, dat is, aan het begin van 1866, verzekerd 11 personen, enz.

Als proef op de achtereenvolgende bewerkingen, waardoor het getal 41 gevonden is, heeft men

$$(4 + 6 + 6 + 16 + 4 + 10 + 2 + 7) - (4 + 3 + 3 + 1 + 2 + 1) = 41;$$

zijnde 41 het verschil tusschen al de ingeschreven personen en zij, die de Maatschappij verlieten, of die, terwijl zij nog verzekerd waren, overleden.

Nadat op de bovenstaande wijze de verschillende getallen voor ieder jaar van waarneming afzonderlijk gevonden waren, heb ik hen door optelling vereenigd, en wel omdat men de uitkomsten, door de verschillende jaren van waarneming geleverd, te zamen kan beschou-

wen als de uitkomst van een enkel jaar van waarneming. Immers, men kan de getallen, in het jaar 1863 gevonden, beschouwen als zijnde verstrekt door eene Maatschappij A, die welke gevonden werden in het jaar 1864, als verstrekt door eene Maatschappij B, enz. Men vergelijke het tafeltje op blz. 146.

De groepeering der gegevens is door mij voor ieder tarief der Maatschappij afzonderlijk geschied, waardoor de mogelijkheid is ontstaan, om voor zoodanig tarief, als een genoegzaam aantal gegevens zal hebben opgeleverd, eene eigen sterftetafel op te maken.

De getallen eindelijk, die gediend hebben om de sterftetafel samen te stellen, zijn gevonden door optelling der overeenkomstige getallen door de verschillende tarieven geleverd. Men vindt hen vereenigd in Tafel A, die, te zamen met Tafel B, al de noodige elementen ter berekening der sterftewaarschijnlijkheden aanbiedt.

Afleiding der formulen voor de berekening der levens- en sterftewaarschijnlijkheden.

De formule, volgens welke de levens- en sterftewaarschijnlijkheden zijn berekend, stemt in hoofdzaak overeen met die, voor wier afleiding Heym in Masius' Rundschau 1858, S. 341, de noodige wenken gegeven heeft. In het door mij gebezigde teekenschrift overgebracht is nl. die van Heym

$$W_x = \left(1 - \frac{b_x + c_x}{l_x}\right)^{\frac{c_x}{b_x + c_x}};$$

terwijl door mij gebruikt is

$$W_x = \left(1 - \frac{b_x + c_x - a_x}{l_x}\right)^{\frac{c_x}{b_x + c_x - a_x}};$$

zijnde W_x de waarschijnlijkheid voor een persoon, x jaren oud, om aan het einde des jaars nog in leven te zijn.

Zij l_x het aantal personen, verzekerd aan het begin des jaars;

a_x het aantal personen, dat in den loop des jaars verzekerd wordt;

b_x het aantal personen, dat de Maatschappij in den loop des jaars verlaat, en

c_x het aantal personen, dat vóór het einde des jaars overlijdt; al deze personen x jaar oud zijnde.

Veronderstellen wij verder, dat a_x, b_x en c_x zich gelijkelijk over het jaar verdeelen, dan is, als wij het jaar in n even groote deelen verdeelen, voor elk n^{de} deel,

$$\frac{a_x}{n},\ \frac{b_x}{n} \text{ en } \frac{c_x}{n};$$

zoodat men na verloop van een aantal y van deze n^{de} deelen heeft

$$\left.\begin{array}{l} y \times \frac{a_x}{n} \text{ ingeschreven} \\ y \times \frac{b_x}{n} \text{ geschrapte} \\ y \times \frac{c_x}{n} \text{ overleden} \end{array}\right\} \text{personen;}$$

dat is

$$l_x + y \cdot \frac{a_x}{n} - y \cdot \frac{b_x}{n} - y \cdot \frac{c_x}{n}$$

nog verzekerd zijnde personen.

Van deze personen zullen er in het volgend n^{de} deel overlijden $\frac{c_x}{n}$, zoodat de waarschijnlijkheid om in het volgend n^{de} deel te overlijden wordt uitgedrukt door de breuk

$$\frac{\frac{c_x}{n}}{l_x + \frac{y}{n}(a_x - b_x - c_x)}$$

en de waarschijnlijkheid om aan het einde van dit n^{de} deel nog in leven te zijn, door het verschil

$$1 - \frac{\frac{c_x}{n}}{l_x + \frac{y}{n}(a_x - b_x - c_x)}.$$

Stelt men in deze laatste uitdrukking voor y achtereenvolgens in de plaats 0, 1, 2, 3 enz. $(n-1)$, dan vindt men de levenswaarschijnlijkheid voor elk opvolgend n^{de} deel. De levenswaarschijnlijkheid voor al deze n^{de} deelen, dat is, voor het geheele jaar, is bijgevolg gelijk aan het produkt

$$\left(1-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x}\right) \times \left(1-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^1/n(a_x-b_x-c_x)}\right) \times \left(1-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^2/n(a_x-b_x-c_x)}\right)$$

$\times$ enz. tot n factoren. Noemt men dus deze waarschijnlijkheid W_x en

neemt men aan beide zijden den neperiaanschen logarithmus, dan is

$$LW_x = L\left(1-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x}\right)+L\left(1-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^1/n(a_x-b_x-c_x)}\right)+$$

$$+L\left(1-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^2/n(a_x-b_x-c_x)}\right)+\text{ enz.}$$

of

$$LW_x = \sum_{y=o}^{y=n-1} L\left(1-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+y/_n(a_x-b_x-c_x)}\right).$$

Om de waarde dezer uitdrukking te vinden, maken wij gebruik van de reeks

$$L(1-z) = -z-{}^1/_2\,z^2-{}^1/_3\,z^3-{}^1/_4\,z^4-\text{enz. } (0<z<1).$$

Daar nu z achtereenvolgens gelijk wordt aan

$$\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x},\ \frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^1/n(a_x-b_x-c_x)},\ \text{enz.},$$

zoo is

$$LW_x = -\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x}-{}^1/_2\left(\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x}\right)^2-{}^1/_3\left(\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x}\right)^3-\text{enz.}$$

$$-\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^1/n(a_x-b_x-c_x)}-{}^1/_2\left(\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^1/n(a_x-b_x-c_x)}\right)^2-{}^1/_3\left(\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+{}^1/n(a_x-b_x-c_x)}\right)^3-\text{enz.}$$

$$\text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.}$$

$$= -\sum_{y=o}^{y=n-1}\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+y/_n(a_x-b_x-c_x)}-{}^1/_2\sum_{y=o}^{y=n-1}\left(\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+y/_n(a_x-b_x-c_x)}\right)^2-$$

$$-{}^1/_3\sum_{y=o}^{y=n-1}\left(\frac{c_x\,{}^1/n}{l_x+y/_n(a_x-b_x-c_x)}\right)^3-\text{enz.}$$

Zij nu $\frac{y}{n}=y'$ en ${}^1/n=\Delta y'$, dan wordt voor $n=\infty$, $\frac{1}{n}=\Delta y'$ oneindig klein, en nadert dus de waarde voor LW_x tot de integraal

$$-\int_0^1\frac{c_x\,dy'}{L_x+(a_x-b_x-c_x)y'};$$

waaruit na integratie

$$LW_x = -\frac{c_x}{a_x-b_x-c_x}\,l(l_x+a_x-b_x-c_x) =$$

$$= -\frac{c_x}{a_x-b_x-c_x}\,L\left(1+\frac{a_x-b_x-c_x}{l_x}\right),$$

of $$W_x = \left(1 - \frac{b_x + c_x - a_x}{l_x}\right)^{\frac{c_x}{b_x + c_x - a_x}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

Ontwikkelt men de macht

$$\left(1 - \frac{b_x + c_x - a_x}{l_x}\right)^{\frac{c_x}{b_x + c_x - a_x}}$$

volgens het binomium van Newton, dan is

$$W_x = 1 - \frac{c_x}{b_x + c_x - a_x} \times \frac{b_x + c_x - a_x}{l_x} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{c_x}{b_x + c_x - a_x}\right)\left(\frac{c_x}{b_x + c_x - a_x} - 1\right)}{1 \qquad 2} \times \left(\frac{b_x + c_x - a_x}{l_x}\right)^2 - \text{enz.}$$

Blijven wij bij dezen term staan, dan is na herleiding

$$W_x = 1 - \frac{c_x}{l_x} + \frac{c_x(a_x - b_x)}{2 l_x^2},$$

en dus de sterftewaarschijnlijkheid

$$S_x = \frac{c_x}{l_x} - \frac{c_x(a_x - b_x)}{2 l_x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Deze formule kan gebruikt worden, wanneer geene al te groote nauwkeurigheid vereischt wordt. Zij geeft voor het overige de sterftewaarschijnlijkheid te klein of te groot, al naardat $a_x >$ of $< b_x$.

Schrijven wij de formule (II) in den vorm

$$S_x = \frac{c_x - \left(\frac{c_x}{l_x} \times \frac{a_x - b_x}{2}\right)}{l_x},$$

waardoor de betrekkingen, die er tusschen de verschillende grootheden bestaan, beter in het oog vallen, dan is het mogelijk uit deze formule eene andere af te leiden, die dezen algemeen bekenden vorm heeft

$$S_x = \frac{c_x}{l_x + \frac{a_x - b_x}{2}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

waarbij valt op te merken, dat zij bij gemakkelijker toepassing veel juister uitkomsten geeft dan formule (II).

Ter toelichting geef ik hier een paar berekeningen van sterftewaarschijnlijkheden volgens de formules (I), (II) en (III).

Voor den ouderdom van 0 jaren is volgens Tafel A en Tafel B

$$a_0 = 9421,$$
$$b_0 = 736,$$
$$c_0 = 1762,$$
$$l_0 = 12422 - 9421 = 3001.$$

Volgens formule (I) is dus

$$W_0 = \left(1 - \frac{736 + 1762 - 9421}{3001}\right)^{\frac{1762}{736+1762-9421}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{9924}{3001}\right)^{\frac{1762}{6923}}};$$

$$\log\left[\left(\frac{9924}{3001}\right)^{\frac{1762}{6923}}\right] = \frac{1762}{6923}\log\frac{9924}{3001}$$

$$\log 9924 = 3{,}9966868$$
$$\text{〃}\ 3001 = 3{,}4772660$$
$$0{,}5194208$$
$$= \log\frac{9924}{3001}.$$

Stelt men

$$\log\left[\frac{1762}{6923}\log\frac{9924}{3001}\right] = \log y;$$

dan is

$$\log y = \log 1762 + \log 0{,}5194208 + \text{colog}\ 6923$$

$$\log 1762 = 3{,}2460059$$
$$\log 0{,}5194208 = 9{,}7155194 - 10$$
$$\text{colog}\ 6923 = 6{,}1597057 - 10$$
$$9{,}1212310 - 10 = \log y;$$

$$\text{dus } y = 0{,}1321998 = \frac{1762}{6923}\log\frac{9924}{3001} = \log\left[\left(\frac{9924}{3001}\right)^{\frac{1762}{6923}}\right]$$

$$\log\frac{1}{\left(\frac{9924}{3001}\right)^{\frac{1762}{6923}}} = \log 1 - \log\left[\left(\frac{9924}{3001}\right)^{\frac{1762}{6923}}\right] = 9{,}8678002 - 10.$$

$$\text{Num log } 9{,}8678002 - 10 = 0{,}7375648 = W_0,$$
$$1 - W_0 = 0{,}2624352 = S_0.$$

Volgens de formule (II) is

$$S_0 = \frac{c_0}{l_0} - \frac{c_0(a_0 - b_0)}{2l_0^2} =$$

$$= \frac{1762}{3001} - \frac{1762\ (9421 - 736)}{2.3001^2},$$

$$2 \times 3001^2 = 2 \times 9006001 = 18012002$$

$9421 - 736 = 8685$

$$\log \frac{1762 \times 8685}{18012002} = \log 1762 + \log 8685 + \text{colog}\, 18012002,$$

$$\begin{aligned}
\log 1762 &= 3{,}2460059 \\
{}_{''}\ 8685 &= 3{,}9387698 \\
\text{colog}\, 18012002 &= 2{,}7444880 - 10 \\
&\overline{\ 9{,}9292187 - 10\ }
\end{aligned}$$

$$\log \frac{1762}{3001} = \log 1762 - \log 3001$$

$$\begin{aligned}
\log 1762 &= 3{,}2460059 \\
{}_{''}\ 3001 &= 3{,}4772660 \\
&\overline{\ 9{,}7687399 - 10\ }
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Num}\log 9{,}7687399 - 10 &= 0{,}5871376 \\
{}_{''}\quad {}_{''}\quad 9{,}9292187 - 10 &= 0{,}8495984 \\
&\overline{-0{,}2624608} = S_0.
\end{aligned}$$

Formule (II) geeft dus hier zelfs eene negatieve, dus volstrekt onbruikbare waarde.

Formule (III) geeft

$$W_0 = \frac{1762}{3001 + \dfrac{9421 - 736}{2}}$$

$$\frac{9421 - 736}{2} = \frac{8685}{2} = 4342{,}5$$

$$4342{,}5 + 3001 = 7343{,}5$$

$$\begin{aligned}
\log 1762 &= 3{,}2460059 \\
{}_{''}\ 7343{,}5 &= 3{,}8659031 \\
\text{Num}\log\ &\overline{9{,}3801028} - 10 = 0{,}2399401 = S_0.
\end{aligned}$$

Men ziet, dat het verschil tusschen deze waarde en die, door formule (I) geleverd, nog vrij groot is. Het gestelde geval was echter weinig gunstig voor de toepassing van de formulen (II) en (III).

Voor den ouderdom van 30 jaren geeft Tafel A met Tafel B

$$\begin{aligned}
a_{30} &= 1355, \\
l_{30} &= 7057 - 1355 = 5702, \\
b_{30} &= \ \ 602, \\
q_{30} &= \ \ \ \ 78.
\end{aligned}$$

Volgens formule (I) is

$$W_{30} = \left(1 - \frac{602 + 78 - 1355}{5702}\right)^{\frac{78}{602+78-1355}} = \frac{1}{\left(\frac{6377}{5702}\right)^{\frac{78}{675}}},$$

$$\begin{aligned}
\log 6377 &= 3,8046164 \\
\text{〃}\ \ 5702 &= 3,7560272 \\
\log \overline{0,0485892} &= 8,6865398 - 10 \\
\log 78 &= 1,8920946 \\
\text{colog } 675 &= 7,1706962 - 10 \\
&\overline{\ 7,7493306 - 10\ }
\end{aligned}$$

$$\text{Num log } 7,7493306 - 10 = 0,0056148$$

$$\begin{aligned}
\log 1 &= 0, \\
&\ \ 0,0056148 \\
\text{Num log } &\overline{9,9943852 - 10} = 0,9871548 = W_{30},
\end{aligned}$$

$$1 - W_{30} = S_{30} = 0,0128452.$$

Volgens formule (II) is

$$S_{30} = \frac{c_{30}}{l_{30}} - \frac{c_{30}(a_{30} - b_{30})}{2 l_{30}^2},$$

$$2 \times 5702^2 = 32512804 \times 2 = 65025608 = 2 l_{30}^2,$$

$$78 \times (1355 - 602) = 78 \times 753 = 58734$$

$$\begin{aligned}
\log 58734 &= 4,7688896 \\
\log 65025608 &= 7,8130844 \\
\text{Num log } &\overline{6,9558052} - 10 = 0,0009032
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 78 &= 1,8920946 \\
\text{〃}\ \ 5702 &= 3,7560272 \\
\text{Num log } &\overline{8,1360674} - 10 = 0,0136794 \\
&\qquad\qquad\qquad\quad 0,0009032 \\
&\qquad\qquad S_{30} = \overline{0,0127762}
\end{aligned}$$

Volgens formule (III) is

$$S_{30} = \frac{78}{5702 + \frac{1355 - 602}{2}}$$

$$\frac{1355 - 602}{2} = \frac{753}{2} = 376,5$$

$$376,5 + 5702 = 6078,5$$

$$\frac{78}{6078,5} = 0,0128321 = S_{30}.$$

Voor den 60-jarigen ouderdom vindt men volgens de formulen (I), (II) en (III) achtereenvolgens

$$S_{60} = 0{,}0297696,$$
$$S_{60} = 0{,}0296919,$$
$$S_{60} = 0{,}0297619.$$

Samenstelling van de Sterftetafel n°. 1.

De levenswaarschijnlijkheden, die men in de kolom achter de ouderdommen vindt, zijn allen berekend volgens de formule (I).

Wat de aantallen levenden betreft, deze zijn gevonden uit de achtereenvolgende optellingen van de logarithmen der levenswaarschijnlijkheden bij den logarithmus van 100000. Het zal ter opheldering voldoende zijn, den aanvang der berekening te doen zien.

$$\begin{array}{lll}
\log 100000 & = 5{,}0000000 & = \log l_0 \\
\log W_0 & = \underline{9{,}8678002} - 10 & \\
 & 4{,}8678002 & = \log l_1 \\
\log W_1 & = \underline{9{,}9592523} & \\
 & 4{,}8270525 & = \log l_2 \text{ enz.}
\end{array}$$

De gemiddelde, zoowel als de waarschijnlijke leeftijden zijn op de gewone wijze gevonden.

De tafel strekt zich niet verder uit dan tot 85 jaar. Boven dien ouderdom toch waren er geene gegevens aanwezig.

Samenstelling der Sterftetafel n°. 2.

De grondslag van deze tafel is de kolom aantallen dooden.

De in deze kolom voorkomende getallen zijn door interpolatie afgeleid uit die, welke in tafel n°. 1 aanwijzen, hoeveel personen er op iederen ouderdom zijn overleden. Voor de interpolatie van de, voor de ouderdommen 10 tot en met 79 gegeven aantallen dooden, heb ik mij bediend van de formule

$$d'_{x+1} = \frac{d_{x-3} + 2d_{x-2} + 3d_{x-1} + 4d_x + 5d_{x+1} + 4d_{x+2} + 3d_{x+3} + 2d_{x+4} + d_{x+5}}{25}$$

d'_{x+1} gelijk zijnde aan het geinterpoleerde aantal dooden, dat bij het door de waarneming gevonden getal d_{x+1} behoort.

Zoo was voor den 60-jarigen ouderdom

$$
\begin{aligned}
1 \times d_{x-3} &= 1 \times 860 = 860 \\
2 \times d_{x-2} &= 2 \times 755 = 1510 \\
3 \times d_{x-1} &= 3 \times 864 = 2592 \\
4 \times d_{x} \phantom{{}_{+1}} &= 4 \times 713 = 2852 \\
5 \times d_{x+1} &= 5 \times 909 = 4545 \\
4 \times d_{x+2} &= 4 \times 798 = 3192 \\
3 \times d_{x+3} &= 3 \times 1172 = 3516 \\
2 \times d_{x+4} &= 2 \times 1115 = 2230 \\
1 \times d_{x+5} &= 1 \times 1324 = 1324
\end{aligned}
$$

$$25 / \overline{22621} \mid 904{,}84 = 905 = d''_{x+1}$$

Wat de getallen voor de overige ouderdommen betreft, die voor de ouderdommen 80 tot en met 85, en die voor de ouderdommen 5 tot en met 9 zijn gevonden door de in tafel n°. 1 gegevene getallen gelijk te stellen aan eene rekenkundige reeks van de tweede orde; terwijl die voor de ouderdommen 86 tot en met 100, op enkele afwijkingen na, eene reeks van dezelfde orde vormen.

De aantallen dooden voor de ouderdommen 0, 1, 2 en 3 zijn niet geinterpoleerd.

Na de berekeningen voor de interpolatie ten einde te hebben gebracht, heb ik de verkregene uitkomsten op de bekende wijze door graphische lijnen voorgesteld, waardoor het mij mogelijk werd enkele kleine onregelmatigheden op te sporen en te verbeteren.

Tafel A.

Aantal waargenomen personen op iederen ouderdom van 0 tot en met 85 jaren.

(Getallen, die tot berekening van de Sterftetafel hebben gediend).

Ouderdom.	Ingeschreven Personen.	Personen, die bij leven de Bank verlaten hebben.	Overledenen.	Ouderdom.	Ingeschreven Personen.	Personen, die bij leven de Bank verlaten hebben.	Overledenen.
0	9421	736	1762	44	926	354	76
1	2779	875	663	45	836	342	70
2	2315	891	388	46	837	361	82
3	1851	961	229	47	775	293	64
4	1714	835	183	48	778	290	60
5	1421	716	132	49	738	278	60
6	2860	899	125	50	717	262	74
7	2144	829	102	51	595	216	76
8	2201	758	96	52	574	199	73
9	1887	821	58	53	542	194	75
10	1965	779	77	54	476	177	60
11	1754	729	57	55	450	161	63
12	1720	738	72	56	410	146	76
13	1620	707	59	57	410	157	63
14	1500	625	59	58	367	143	68
15	1172	581	52	59	393	129	53
16	1131	560	51	60	309	107	65
17	1075	512	53	61	311	92	55
18	1025	561	51	62	285	91	78
19	995	470	73	63	297	85	72
20	1061	561	68	64	324	71	87
21	1026	533	58	65	267	64	76
22	1163	519	65	66	131	69	69
23	1208	634	65	67	126	38	69
24	1253	636	66	68	127	33	75
25	1372	643	42	69	95	35	74
26	1490	688	51	70	81	18	52
27	1359	626	64	71	61	29	49
28	1517	657	45	72	53	12	47
29	1323	619	49	73	42	11	33
30	1355	602	78	74	51	9	32
31	1266	591	78	75	29	2	43
32	1172	548	65	76	6	8	39
33	1300	544	55	77	7	6	34
34	1355	581	70	78	1	4	17
35	1194	537	75	79	6	4	9
36	1230	532	77	80	1	—	12
37	1133	514	78	81	—	2	8
38	1219	487	79	82	1	—	6
39	1143	536	70	83	—	—	1
40	1225	481	91	84	—	1	3
41	1025	463	55	85	—	—	1
42	999	422	73				
43	973	437	79	Totaal	84346	32467	8137

Tafel B.

Getallen, ontstaan uit de optelling van de aan het begin van ieder der tien jaren aanwezige personen, vermeerderd met de in den loop van ieder jaar verzekerde personen.

(Getallen, die tot berekening van de Sterftetafel hebben gediend).

Ouderdom.	Personen.	Ouderdom.	Personen.	Ouderdom.	Personen.	Ouderdom.	Personen.
0	12422	22	6651	44	6003	66	1616
1	9243	23	6483	45	5847	67	1432
2	9674	24	6274	46	5682	68	1253
3	9829	25	6389	47	5494	69	1100
4	9891	26	6655	48	5256	70	949
5	9777	27	6670	49	4978	71	827
6	11163	28	6882	50	4757	72	673
7	11535	29	6940	51	4488	73	537
8	11677	30	7057	52	4223	74	469
9	12058	31	7053	53	3988	75	420
10	12113	32	6937	54	3719	76	321
11	11809	33	6994	55	3506	77	238
12	11603	34	7119	56	3261	78	158
13	11320	35	7002	57	3030	79	123
14	11035	36	6958	58	2783	80	90
15	10405	37	6814	59	2586	81	65
16	9817	38	6737	60	2392	82	49
17	9186	39	6687	61	2247	83	24
18	8601	40	6662	62	2107	84	18
19	7973	41	6573	63	1978	85	4
20	7467	42	6459	64	1943	86	1
21	6989	43	6258	65	1824	87	1

N°. 1.

Algemeene Sterftetafel. Mannen en Vrouwen.

x	W_x	l_x Aantal Levenden.	d_{x+1} Aantal Dooden.	Gemiddelde leeftijd.	Waarschijnlijke leeftijd.
0	0,7375648	100000	26244	33,38	27,42
1	0,9104421	73756	6605	44,08	50,41
2	0,9518684	67151	3232	47,37	54,19
3	0,9728000	63919	1739	48,74	55,19
4	0,9787507	62180	1321	49,09	55,24
5	0,9848370	60859	923	49,14	55,13
6	0,9864909	59936	809	48,89	54,64
7	0,9898368	59127	601	48,55	54,09
8	0,9905720	58526	552	48,05	53,47
9	0,9945774	57974	314	47,50	52,81
10	0,9928248	57660	414	46,75	52,01
11	0,9946023	57246	309	46,09	51,18
12	0,9930552	56937	396	45,34	50,32
13	0,9941875	56541	328	44,65	49,48
14	0,9940805	56213	333	43,91	48,62
15	0,9945412	55880	305	43,17	47,77
16	0,9943136	55575	316	42,40	46,90
17	0,9936830	55259	349	41,64	46,03
18	0,9934666	54910	359	40,90	45,19
19	0,9899145	54551	550	40,17	44,35
20	0,9897800	54001	552	39,57	43,60
21	0,9906557	53449	499	38,98	42,84
22	0,9888033	52950	593	38,34	42,06
23	0,9883055	52357	613	37,77	41,28
24	0,9876050	51744	641	37,21	40,51
25	0,9921849	51103	399	36,67	39,76
26	0,9908233	50704	466	35,95	38,91
27	0,9887145	50238	567	35,28	38,09
28	0,9922218	49671	386	34,68	37,34
29	0,9917827	49285	405	33,95	36,51
30	0,9871548	48880	628	33,22	35,68
31	0,9872543	48252	615	32,65	34,95
32	0,9892964	47637	510	32,06	34,23
33	0,9909318	47127	427	31,41	33,46
34	0,9886073	46700	532	30,69	32,66
35	0,9877691	46168	565	30,04	31,90
36	0,9873184	45603	578	29,40	31,15
37	0,9869705	45025	587	28,77	30,40
38	0,9865600	44438	597	28,15	29,64
39	0,9880209	43841	525	27,52	28,90
40	0,9843184	43316	679	26,85	28,10
41	0,9905584	42637	403	26,27	27,35
42	0,9872932	42234	537	25,52	26,49
43	0,9857657	41697	593	24,84	25,68

Vervolg N°. 1.

Algemeene Sterftetafel. Mannen en Vrouwen.

x	W_x	l_x Aantal Levenden.	d_{x+1} Aantal Dooden.	Gemiddelde leeftijd.	Waarschijnlijke leeftijd.
44	0,9858189	41104	583	24,19	24,90
45	0,9866800	40521	540	23,53	24,10
46	0,9838600	39981	645	22,84	23,29
47	0,9870891	39336	508	22,21	22,51
48	0,9872850	38828	494	21,49	21,68
49	0,9865684	38334	515	20,76	20,85
50	0,9826484	37819	656	20,04	20,04
51	0,9813759	37163	692	19,38	19,34
52	0,9809630	36471	694	18,74	18,65
53	0,9792725	35777	742	18,10	17,97
54	0,9823069	35035	620	17,47	17,30
55	0,9803080	34415	677	16,77	16,58
56	0,9745151	33738	860	16,10	15,88
57	0,9770534	32878	755	15,51	15,24
58	0,9730942	32123	864	14,86	14,55
59	0,9771895	31259	713	14,26	13,90
60	0,9702304	30546	909	13,58	13,24
61	0,9730987	29637	798	12,98	12,69
62	0,9593469	28839	1172	12,33	12,08
63	0,9596936	27667	1115	11,83	11,64
64	0,9501296	26552	1324	11,30	11,12
65	0,9541607	25228	1157	10,87	10,58
66	0,9544918	24071	1095	10,37	9,99
67	0,9488996	22976	1174	9,84	9,36
68	0,9360824	21802	1394	9,34	8,75
69	0,9285330	20408	1458	8,94	8,21
70	0,9422054	18950	1095	8,59	7,68
71	0,9373585	17855	1119	8,09	7,05
72	0,9266538	16736	1227	7,60	6,62
73	0,9353800	15509	1003	7,16	6,40
74	0,9271372	14506	1057	6,62	6,14
75	0,8937869	13449	1428	6,10	5,67
76	0,8757782	12021	1493	5,77	5,48
77	0,8531482	10528	1546	5,51	5,48
78	0,8906310	8982	983	5,38	5,26
79	0,9237440	7999	610	4,98	5,87
80	0,8659562	7389	990	4,35	5,20
81	0,8749020	6399	801	3,94	4,71
82	0,8763404	5598	692	3,43	
83	0,9583333	4906	204	2,85	
84	0,8282121	4702	808	1,95	
85	0,7500000	3894	974	1,25	
		2920			

N°. 2.

Algemeene Sterftetafel. Mannen en Vrouwen.

x	d_{x+1} Aantal Dooden.	l_x Aantal Levenden.	W_x	Gemiddelde leeftijd.	Waarschijnlijke leeftijd.
0	26244	100000	0,7375600	33,42	27,34
1	6605	73756	0,9104479	44,14	50,21
2	3232	67151	0,9518698	47,43	53,97
3	1739	63919	0,9727936	48,80	55,07
4	1228	62180	0,9802509	49,15	55,14
5	930	60952	0,9847420	49,13	54,87
6	724	60022	0,9879375	48,89	54,39
7	625	59298	0,9894602	48,48	53,79
8	542	58673	0,9907623	47,99	53,12
9	471	58131	0,9918975	47,43	52,41
10	416	57660	0,9927855	46,81	51,65
11	375	57244	0,9934491	46,15	50,87
12	355	56869	0,9937575	45,45	50,06
13	341	56514	0,9939661	44,73	49,23
14	337	56173	0,9940007	44,00	48,39
15	341	55836	0,9938930	43,27	47,56
16	359	55495	0,9935309	42,53	46,72
17	384	55136	0,9930353	41,80	45,89
18	421	54752	0,9923107	41,09	45,08
19	467	54331	0,9914045	40,41	44,27
20	508	53864	0,9905689	39,75	43,48
21	532	53356	0,9900291	39,13	42,71
22	549	52824	0,9896068	38,51	41,96
23	554	52275	0,9894023	37,91	41,20
24	540	51721	0,9895595	37,31	40,44
25	513	51181	0,9899768	36,70	39,59
26	501	50668	0,9901120	36,07	38,81
27	497	50167	0,9900932	35,42	38,11
28	491	49670	0,9901148	34,77	37,32
29	496	49179	0,9899143	34,12	36,53
30	516	48683	0,9894009	33,46	35,73
31	524	48167	0,9891211	32,81	34,95
32	524	47643	0,9890016	32,17	34,17
33	530	47119	0,9887518	31,52	33,38
34	541	46589	0,9883880	30,87	32,60
35	546	46048	0,9881427	30,23	31,82
36	559	45502	0,9877149	29,59	31,05
37	566	44943	0,9874061	28,95	30,28
38	568	44377	0,9872007	28,31	29,51
39	563	43809	0,9871488	27,67	28,74
40	561	43246	0,9870277	27,02	27,97
41	549	42685	0,9871382	26,37	27,19
42	553	42136	0,9868759	25,71	26,41
43	558	41583	0,9865811	25,05	25,63
44	560	41025	0,9863498	24,38	24,86
45	556	40465	0,9862598	23,71	24,08
46	562	39909	0,9859180	23,03	23,31
47	561	39347	0,9857423	22,36	22,53
48	568	38786	0,9853557	21,67	21,76
49	589	38218	0,9845884	20,99	20,99
50	617	37629	0,9836032	20,31	20,23

Vervolg N°. 2.

Algemeene Sterftetafel. Mannen en Vrouwen.

x	d_{x+1} Aantal Dooden.	l_x Aantal Levenden.	W_x	Gemiddelde leeftijd.	Waarschijnlijke leeftijd.
51	642	37012	0,9826541	19,64	19,49
52	671	36370	0,9815509	18,97	18,76
53	695	35699	0,9805316	18,32	18,03
54	714	35004	0,9796023	17,68	17,33
55	733	34290	0,9786234	17,03	16,63
56	760	33557	0,9773520	16,39	15,93
57	778	32797	0,9762784	15,76	15,25
58	810	32019	0,9747025	15,13	14,58
59	847	31209	0,9728604	14,51	13,92
60	905	30362	0,9701929	13,90	13,27
61	963	29457	0,9673082	13,32	12,65
62	1036	28494	0,9636416	12,75	12,05
63	1093	27458	0,9601938	12,21	11,48
64	1150	26365	0,9563816	11,70	10,92
65	1189	25215	0,9528456	11,21	10,39
66	1215	24026	0,9494296	10,74	9,86
67	1230	22811	0,9460787	10,28	9,35
68	1247	21581	0,9422176	9,84	8,85
69	1237	20334	0,9391659	9,41	8,37
70	1206	19097	0,9368487	8,99	7,89
71	1191	17891	0,9334302	8,56	7,44
72	1190	16700	0,9287424	8,14	6,98
73	1199	15510	0,9226951	7,72	6,60
74	1223	14311	0,9145413	7,33	6,25
75	1245	13088	0,9048746	6,97	5,97
76	1237	11843	0,8955502	6,65	5,76
77	1186	10606	0,8881765	6,36	5,59
78	1088	9420	0,8845012	6,10	5,42
79	959	8332	0,8849014	5,83	5,20
80	859	7373	0,8834940	5,53	4,89
81	780	6514	0,8802578	5,19	4,54
82	727	5734	0,8732124	4,83	4,14
83	699	5007	0,8603954	4,46	3,90
84	695	4308	0,8386723	4,10	3,38
85	663	3613	0,8164958	3,79	3,10
86	607	2950	0,7942373	3,53	2,89
87	494	2343	0,7891591	3,32	2,74
88	419	1849	0,7733909	3,07	2,45
89	350	1430	0,7552449	2,83	2,33
90	288	1080	0,7333332	2,58	2,12
91	231	792	0,7083334	2,34	1,91
92	181	561	0,6773618	2,09	1,72
93	138	380	0,6368422	1,85	1,53
94	98	242	0,5950412	1,62	1,34
95	68	144	0,5277778	1,38	1,10
96	42	76	0,4473684	1,17	0,90
97	22	34	0,3529411	1,00	0,77
98	8	12	0,3333334	0,92	0,75
99	3	4	0,2500000	0,75	0,67
100	1	1	0,0000000	0,50	0,50

OVER EENIGE GEVALLEN VAN BEWEGING IN EENE ONSAMENDRUKBARE VLOEISTOF,

DOOR

D^R^. G. J. MICHAËLIS.

De hydrodynamische vergelijkingen, in den vorm, waarin Euler ze gegeven heeft, zijn

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=\frac{\partial(V-P)}{\partial x},\\
\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=\frac{\partial(V-P)}{\partial y},\\
\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=\frac{\partial(V-P)}{\partial z},\\
\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}&=0.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(1)$$

Kirchhoff p. 165.

Hierin beteekenen u, v en w de componenten der snelheid van eenig deeltje eener onsamendrukbare vloeistof volgens drie onbewegelijke coördinaat-assen; V stelt de potentiaal der krachten voor, welke op de vloeistof werken; terwijl P de drukking in het beschouwde punt is; de dichtheid is gelijk aan de eenheid aangenomen.

In het algemeen zullen de deeltjes, behalve eene voortgaande, ook eene beweging om eene as hebben. Noemen wij de componenten der hoeksnelheid p, q en r, dan is

$$\left.\begin{aligned}
2p&=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\\
2q&=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\\
2r&=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Helmholtz [1]) heeft bewezen, dat indien een vloeistofdeeltje op eenig oogenblik geene wentelende beweging bezit, het deze ook nimmer verkrijgen zal; en dat eene lijn, welke op een bepaald tijdstip samenvalt met de omwentelings-as der deeltjes, welke zij snijdt, voortdurend met deze as zal overeenstemmen. Zulk eene lijn gaf hij den naam van *wervellijn*. De vereeniging der wervellijnen, welke door de punten van den omtrek van eenig vlakte-element gaan, heet *werveldraad*.

Men kan de beweging onderzoeken van de werveldraden, welke steeds door dezelfde punten der vloeistof gaan. De theorie dier bewegingen is zeer belangrijk; en men heeft vooral omtrent de *wervelringen* zeer merkwaardige uitkomsten afgeleid.

Wij zullen hier alleen een paar algemeene formulen afleiden, welke op deze zaak betrekking hebben, en de overeenkomst aanwijzen, welke zij hebben met de uitdrukkingen, die men vindt voor de magnetische werkingen van een electrischen stroom.

Uit de laatste der vergelijkingen (1) volgt, dat u, v en w uitgedrukt kunnen worden in drie functiën F, G en H door de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Volgens (2) is ook

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial z} = 2p;$$

maar tevens is

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \text{ [2]});$$

dus

$$\Delta F = -2p, \quad \Delta G = -2q, \quad \Delta H = -2r.$$

Neemt men nu in aanmerking, dat de eerste differentiaal-quotienten der functiën F, G en H in de geheele ruimte continu zijn, en in

---

[1]) Zie Borchardt's Journal, Band 55.

[2]) Zie Kirchhoff. Vorl. über math. Physik, II Lieferung. pag. 253

het oneindige nul worden; dan vindt men voor de oplossingen dezer vergelijkingen de waarden

$$\left.\begin{aligned} F &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{p\,dm}{\rho}, \\ G &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{q\,dm}{\rho}, \\ H &= \frac{1}{2\pi}\int\frac{r\,dm}{\rho}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

De integratie moet uitgestrekt worden over de geheele ruimte, welke de werveldraden beslaan. In deze formulen beteekent dm het volumen-element van een werveldraad, en ρ is de afstand van dat element tot het beschouwde punt.

De levende kracht der vloeistof is gegeven door de uitdrukking

$$T = \frac{1}{2}\int(u^2 + v^2 + w^2)\,dm =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left\{u\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}\right) + v\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}\right) + w\left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right)\right\} dm,$$

of ook

$$T = \int(Fp + Gq + Hr)\,dm \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

Een electrische stroom oefent, zooals bekend is, magnetische werkingen uit. De arbeid der magneet-kracht langs een gesloten kromme lijn, binnen welke de stroom zich bevindt is $4\pi s$, als door s de intensiteit van den stroom wordt aangeduid. Hieruit heeft men afgeleid [1]), dat, indien de componenten van een stroom volgens de coördinaat-assen u_1, v_1, w_1 worden genoemd, en die van de kracht, welke op een magneetpool wordt uitgeoefend λ_1, λ_2 en λ_3 zijn, de volgende vergelijkingen bestaan

$$\left.\begin{aligned} 4\pi u_1 &= \frac{\partial\lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial z}, \\ 4\pi v_1 &= \frac{\partial\lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial\lambda_3}{\partial x}, \\ 4\pi w_1 &= \frac{\partial\lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial\lambda_1}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial\lambda_2}{\partial y} + \frac{\partial\lambda_3}{\partial z} = 0.$$

---

[1]) Zie o. a. Maxwell. On Electricity and Magnetism II.

Uit de laatste dezer vergelijkingen volgt, dat λ_1, λ_2 en λ_3 in drie functiën F_1, G_1 en H_1 kunnen worden uitgedrukt op de volgende wijze

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial y} - \frac{\partial G_1}{\partial z}, \\ \lambda_2 &= \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial H_1}{\partial x}, \\ \lambda_3 &= \frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Gebruik makende van de eerste drie vergelijkingen (6), vindt men volkomen op dezelfde manier als bij de hydrodynamische vergelijkingen

$$\Delta F_1 = -4\pi u_1, \quad \Delta G_1 = -4\pi v_1, \quad \Delta H = -4\pi w_1,$$

en aangezien ook hier de functiën F_1, G_1 en H_1 met hunne differentiaal-quotienten in de geheele ruimte gestadig moeten veranderen, en in het oneindige verdwijnen, zal men ook in dit geval voor die functiën de oplossingen verkrijgen

$$\ldots\ldots\ldots \quad \left.\begin{aligned} F_1 &= \int \frac{u_1\, dm}{\rho}, \\ G_1 &= \int \frac{v_1\, dm}{\rho}, \\ H_1 &= \int \frac{w_1\, dm}{\rho}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

dm is het element van den electrischen stroom, ρ is de afstand van dat element tot een bepaald punt in de ruimte. De energie van het stelsel wordt

$$T = \frac{1}{2}\int (F_1 u_1 + G_1 v_1 + H_1 w_1)\, dm \ldots\ldots\ldots (9)$$

Er wordt gelijk men ziet, eene gelijke wiskundige behandeling vereischt voor de oplossingen der vraagstukken, welke betrekking hebben op de wervelbewegingen in een onsamendrukbare vloeistof, en die omtrent de magnetische werkingen van den galvanischen stroom. In alle gevallen, waarin bij de hydrodynamische problemen de functiën F, G en H kunnen worden berekend, kan men bij analoge electrische vraagstukken de functiën F_1, G_1 en H_1 vinden, van welke de oplossing dier vraagstukken afhangt.

Hebben de vloeistofdeeltjes op een oogenblik geene hoeksnelheid,

dan zullen zij die nimmer verkrijgen. Dan volgt uit de vergelijkingen (2), dat

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

waardoor de vergelijkingen der beweging de eenvoudige gedaante aannemen

$$\left.\begin{aligned} & u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\ & V - P = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2\right] + C, \\ & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (10)$$

C is eene grootheid, die in het algemeen eene functie is van den tijd, doch van de coördinaten onafhankelijk is.

De bepaling der functie Φ (door Helmholtz snelheidspotentiaal genoemd), geschiedt dus door oplossing van de laatste der vergelijkingen (10). Zij geldt, zooals gemakkelijk te bewijzen is, zoowel ten opzichte van het vaste coördinaten-stelsel, als ten opzichte van een bewegelijk stelsel, dat met het eerste verbonden is door de betrekkingen

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y_1 &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z_1 &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z; \end{aligned}$$

α, β, γ, zijn op eenig oogenblik de coördinaten van den oorsprong van het bewegelijke stelsel; α_1, β_1 enz. zijn de richtings-cosinussen. Gebruik makende van de voorwaarden

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1, \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1, \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1, \\ \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0, \\ \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3 &= 0, \\ \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$

vindt men namelijk, dat

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_1^2} = 0.$$

Deze vergelijking speelt ook in de mathematische physica een grooten rol. Het is gebruikelijk, haar aldus te schrijven

$$\Delta \Phi = 0.$$

Wordt de potentiaal der aantrekkingskracht van een lichaam in een uitwendig punt U genoemd, dan is ook, naar de vergelijking van Laplace

$$\Delta U = 0.$$

En evenzoo voldoet de potentiaal van electrische en magnetische krachten aan dezelfde vergelijking. Is dus de grondvergelijking in de genoemde takken der physica dezelfde als in de hydrodynamica, zoo kan het niet bevreemden, dat de oplossingen hier weder in vele gevallen groote overeenkomst vertoonen. Wij zullen die analogie, waar zij voorkomt, telkens aanwijzen.

Laat ons in de eerste plaats de beweging der vloeistof onderzoeken, in de onderstelling, dat zij al hare beweging ontleent aan een vast lichaam, en overigens onbegrensd is.

Aan de oppervlakte van het lichaam is dan $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ (de component der snelheid in de richting der normaal) gegeven, terwijl $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$, $\frac{\partial \phi}{\partial z}$, in het oneindige verdwijnen moeten, en in de geheele ruimte een gestadig veranderende waarde hebben. In dit geval is de snelheidspotentiaal, behalve een grootheid, die van den tijd afhangt, bepaald [1]).

Voordat wij ϕ in bijzondere omstandigheden gaan berekenen, beschouwen wij eerst het differentiaal-quotiënt der potentiaal U van de aantrekkingskracht eens lichaams naar eene der coördinaat-assen. Indien de dichtheid m van het lichaam als standvastig worde aangenomen, vindt men

$$U' = \frac{\partial U}{\partial x} = \int m \frac{dS}{\rho} \, Cos\,(nx) \, ; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

wanneer dS het oppervlakte-element en ρ den afstand van dit element tot het beschouwde punt beteekent. U' is de potentiaal eener massa, welke met de dichtheid $m \, Cos\,(nx)$, gelijkmatig over de oppervlakte is uitgebreid.

Aan de oppervlakte wordt, zooals uit de leer der potentiaalfunctiën bekend is, $\frac{\partial U'}{\partial n}$ ongestadig, en moet daar voldoen aan de voorwaarde

$$\frac{\partial U'}{\partial n_u} + \frac{\partial U'}{\partial n_i} = 4\pi m \, Cos\,(n_u x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

De eerste grootheid is het differentiaal-quotient ten opzichte van het deel der normaal, dat zich buiten het lichaam bevindt, terwijl

[1]) Kirchhoff, Vorl. über math. Physik, Seite 190.

de tweede betrekking heeft op het gedeelte der normaal, dat binnen het lichaam gelegen is.

Zij het nu een bol, die zich in een onbegrensde vloeistof verplaatst, met de snelheid u_1 in de richting der x-as, dan moet de snelheidspotentiaal, volgens het boven meegedeelde, voldoen aan de voorwaarden, dat $\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ en $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ gestadig zijn, en in het oneindige verdwijnen, en dat aan de oppervlakte van den bol

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u_1 \, Cos(n\,x) \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots (13)$$

Aan al die voorwaarden wordt voldaan door de oplossing

$$\phi = C\,U' + \text{standvastige};$$

zijnde C eene grootheid, welker waarde bepaald kan worden door (13) in verband met (12). Men verkrijgt namelijk

$$u_1 \, Cos(n x) + C \frac{\partial U}{\partial n_i} = 4 \pi \, C \, Cos(n x),$$

zoo de dichtheid der vloeistof, even als vroeger $= 1$ worde gesteld. Voor een bolvormig lichaam is echter

$$U = \frac{4}{3} \pi \frac{R^3}{r},$$

als door R de straal des bols en door r de afstand van zijn middelpunt tot eenig punt (x, y, z) worde voorgesteld. Deze waarde overbrengende in bovenstaande vergelijking wordt

$$C = \frac{3}{8\pi} u_1.$$

Hieruit volgt, dat indien een bol zich beweegt met eene snelheid, welker componenten u_1, v_1 en w_1 zijn, de snelheidspotentiaal den vorm aanneemt

$$\phi = -\frac{R^3}{2r^3} (u_1 x + v_1 y + w_1 z) + \text{standvastige} \quad \ldots \ldots (14)$$

Nu herinnere men zich, dat naar de theorie van Poisson de potentiaal van een lichaam, hetwelk in de richting der x-as, met de intensiteit u_1 gelijkmatig gemagnetiseerd is, gelijk is aan $- u_1 \, U'$. Men zal dan inzien, dat de snelheidspotentiaal van een bolvormig lichaam, dat in eene willekeurige richting met de snelheid S in een onbegrensde vloeistof zich beweegt, gelijk is aan $-\frac{8\pi}{3}$ vermenigvuldigd met de magnetische potentiaal van dien bol, als hij volgens dezelfde richting met de intensiteit S gemagnetiseerd is.

Daar ondersteld is, dat het lichaam geene wentelende beweging om eene as heeft, worden de componenten der relatieve snelheid van eenig vloeistofdeeltje

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{\partial\phi}{\partial x}-u_1,\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial\phi}{\partial y}-v_1,\\ \frac{dz}{dt}&=\frac{\partial\phi}{\partial z}-w_1;\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (15)$$

en dewijl in bovenstaande herleiding der vaste coördinaten in het bewegelijke stelsel, dat wij hier als met het lichaam verbonden aannemen, α, β en γ de coördinaten van den oorsprong (het middelpunt des bols) zijn, heeft men

$$u_1=\frac{d\alpha}{dt},\quad v_1=\frac{d\beta}{dt},\quad w_1=\frac{d\gamma}{dt};$$

en de vergelijkingen der relatieve banen worden nu

$$\left.\begin{aligned}dx&=-\frac{R^3}{2r^3}\left\{\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)d\alpha-\frac{3xy}{r}d\beta-\frac{3xz}{r^2}d\gamma\right\}-d\alpha,\\ dy&=-\frac{R^3}{2r^3}\left\{-\frac{3xy}{r^2}d\alpha+\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)d\beta-\frac{3yz}{r^2}d\gamma\right\}-d\beta,\\ dz&=-\frac{R^3}{2r^3}\left\{-\frac{3xz}{r^2}d\alpha-\frac{3yz}{r^2}d\beta+\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)d\gamma\right\}-d\gamma.\end{aligned}\right\}\ (16)$$

Voeren wij in deze vergelijkingen pool-coördinaten in, door de substitutiën

$$\begin{aligned}x&=r\,Sin\,\chi\,.\,Cos\,\psi,\\ y&=r\,Sin\,\chi\,.\,Sin\,\psi,\\ z&=r\,Cos\,\chi,\end{aligned}$$

dan veranderen de vergelijkingen (16), gelijk door eenige eenvoudige herleidingen kan worden aangetoond, in de volgende

$$\left.\begin{aligned}dr&=\frac{R^3-r^3}{r^3}\,(Sin\,\chi.Cos\,\psi\,d\alpha+Sin\,\chi\,.\,Sin\,\psi\,d\beta+Cos\,\chi\,d\gamma),\\ r\,d\chi&=-\frac{R^3+2r^3}{2r^3}\,(Cos\,\chi.Cos\,\psi\,d\alpha+Cos\,\chi.Sin\,\psi\,d\beta-Sin\,\chi\,d\gamma),\\ r\,Sin\,\chi\,d\psi&=\frac{R^3+2r^3}{2r^3}\,(Sin\,\psi\,d\alpha-Cos\,\psi\,d\beta).\end{aligned}\right\}\ (17)$$

Indien men nu het bijzondere geval onderzoekt, dat het middelpunt van den bol zich in een plat vlak verplaatst, zoodat b. v. $d\gamma=0$, terwijl α en β door middel van de formulen

$$\alpha = \rho \, Sin \chi_1 , \quad \beta = \rho \, Cos \chi_1 ,$$

in twee nieuwe veranderlijken worden uitgedrukt; dan verkrijgt men de differentiaal-vergelijkingen der banen in de volgende gedaante

$$\left.\begin{aligned} dr &= \frac{R^3 - r^3}{r^3} Sin \chi \{ \rho \, Cos(\chi_1 + \psi) d\chi_1 + Sin(\chi_1 + \psi) d\rho \}, \\ r d\chi &= -\frac{R^3 + 2r^3}{2r^3} Cos \chi \{ \rho \, Cos(\chi_1 + \psi) d\chi_1 + Sin(\chi_1 + \psi) d\rho \}, \\ r \, Sin \chi \, d\psi &= \frac{R^3 + 2r^3}{2r^3} \{ \rho \, Sin(\chi_1 + \psi) d\chi_1 + Cos(\chi_1 + \psi) d\rho \}. \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Deelt men de eerste twee vergelijkingen op elkaar, dan komt er

$$\frac{dr}{r d\chi} = -\frac{2(R^3 - r^3)}{R^3 + 2r^3} Tang \chi .$$

dus

$$\int \frac{d\chi}{Cot \chi} = \int \frac{2r^3 + R^3}{2r(r^3 - R^3)} dr .$$

Deze integratie uitvoerende, vindt men

$$Cos \chi = C \sqrt{\frac{r}{r^3 - R^3}} ,$$

welke uitdrukking ook aldus kan worden geschreven

$$z^2 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = \text{standvastige} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Daar zij slechts twee veranderlijken bevat, stelt deze vergelijking een omwentelingsvlak voor, met de z-as tot as van omwenteling.

Wordt, in plaats van $d\gamma = 0$, gesteld, dat $d\alpha = 0$ en $d\beta = 0$, dat dus het middelpunt van den bol zich verplaatst langs de z-as; dan zien wij uit (17), dat $d\psi = 0$, dat dus elk deeltje der vloeistof in een plat vlak blijft, gaande door de z-as. De vergelijking der stroomlijnen is in dit geval

$$y^2 \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) = \text{standvastige.}$$

Zij snijden de z-as in het oneindige, maar elkaar snijden ze niet. Daar nu

$$d\gamma = \frac{1}{Cos \chi} \times \frac{r^3 dr}{R^3 - r^3} ,$$

wordt voor de verplaatsing van eenig punt in de z-as gevonden

$$d\gamma = \frac{z^3 dz}{R^3 - z^3} ,$$

of integreerende

$$\gamma-\gamma_0=\left[\frac{R}{3}\left\{\frac{1}{2}l(z^2+Rz+R^2)+\sqrt{3}BgTang\frac{R+2z}{R\sqrt{3}}-l(z-R)\right\}-z\right]_{z_0}^{z},(20)$$

als z_0 den aanvangstoestand van het beschouwde punt beteekent.

Een bolvormig lichaam, dat behalve eene verschuiving ook eene wentelende beweging aanneemt, heeft dezelfde snelheidspotentiaal als wij in (14) hebben afgeleid. Eene hoeksnelheid p b.v. om de x-as, geeft aan de oppervlakte van eenig lichaam de voorwaarde

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=p\left\{z\,Cos(ny)-y\,Cos(nz)\right\}.$$

Deze uitdrukking verdwijnt bij een bol; en daaruit volgt uit het bovengezegde omtrent de bepaling der functie Φ, dat deze in dit geval in de geheele ruimte standvastig is.

Wij onderstellen in de tweede plaats, dat de bol zich om eene vaste as bewege, welke evenwijdig is met de x-as, om ook nu de gedaante der stroomlijnen te onderzoeken. Den afstand van het middelpunt des bols tot aan de as van wenteling noemen wij ρ, en laten de z-as met deze lijn samenvallen. De relatieve snelheid van een vloeistofdeeltje heeft thans de componenten

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}-(v+pz),$$

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+py.$$

Wij zullen θ den hoek noemen, dien ρ maakt met de richting dier lijn, bij den aanvang der beweging. Men ziet dan, dat

$$v=\rho\frac{d\theta}{dt} \text{ en } p=\frac{d\theta}{dt}.$$

De vergelijkingen der relatieve banen worden in dit geval

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{3\rho R^3xy}{2r^5}\,d\theta,\\ dy&=\left\{\left(-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}\right)\frac{\rho R^3}{2}-(\rho+z)\right\}d\theta,\\ dz&=\left(\frac{3\rho R^3yz}{2r^5}+y\right)d\theta.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots(21)$$

Voeren wij ook hier weder door de volgende substitutiën nieuwe veranderlijken in

$$x = r\, Cos\,\chi,$$
$$y = r\, Sin\,\chi \,.\, Cos\,\psi,$$
$$z = r\, Sin\,\chi \,.\, Sin\,\psi.$$

De stroomlijnen worden dan door de volgende vergelijkingen bepaald

$$\left.\begin{aligned} dr &= \rho\, Sin\,\chi \,.\, Cos\,\psi\, \frac{R^3 - r^3}{r^3}\, d\theta, \\ r\, d\chi &= -\rho\, Cos\,\chi \,.\, Cos\,\psi\, \frac{R^3 + 2r^3}{2r^3}\, d\theta, \\ r\, Sin\,\chi\, d\psi &= \left\{ \rho\, \frac{R^3 + 2r^3}{2r^3}\, Sin\,\psi + r\, Sin\,\chi \right\} d\theta, \end{aligned}\right\} \quad \ldots (22)$$

Men verkrijgt dus ook bij de beweging van den bol om eene as, door deeling der beide eerste vergelijkingen op elkaar en na integratie,

$$Cos\,\chi = C \sqrt{\frac{r}{r^3 - R^3}}.$$

Deelt men verder de derde vergelijking door de eerste, dan bekomt men

$$\frac{r\, Sin\,\chi\, d\psi}{dr} = \frac{R^3 + 2r^3}{2(R^3 - r^3)} \frac{Sin\,\psi}{Sin\,\chi\, Cos\,\psi} + \frac{r^4}{\rho (R^3 - r^3)\, Cos\,\psi},$$

of ook

$$\frac{d\, Sin\,\psi}{dr} = -\frac{2r^3 + R^3}{2r(r^3 - R^3)\, Sin^2\chi}\, Sin\,\psi - \frac{r^3}{\rho\, Sin\,\chi (r^3 - R^3)} \quad . \; . \; (23)$$

Dit is eene lineaire differentiaal-vergelijking van de eerste orde, die geïntegreerd kan worden, omdat $Sin\,\chi$ in r uitgedrukt is. De integraal heeft echter een zeer samengestelden vorm.

In het bijzondere geval, dat $\rho = 0$, dat dus de bol wentelt om eene as, die door het middelpunt gaat, worden de bewegings-vergelijkingen eenvoudig

$$dy = -z\, d\theta,$$
$$dz = y\, d\theta,$$
$$\frac{dy}{dz} = -\frac{z}{y},$$
$$y^2 + z^2 = r^2 = \text{standvastige}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

dan beschrijven alzoo alle deeltjes der vloeistof cirkelbanen, loodrecht op de x-as.

Indien gegeven is, dat eene ellipsoïde zich in een onsamendrukbare vloeistof beweegt, met de snelheid u_1 in de richting der x-as, welke samenvalt met eene der hoofdassen van het lichaam, dan kan bewezen worden, dat

$$\phi = C U' + \text{standvastige},$$

waarin U' dezelfde beteekenis heeft als in de vergelijking (11), en waarin C eene grootheid is, welke bepaald kan worden uit de volgende voorwaarde-vergelijking, die aan de oppervlakte van het lichaam gelden moet

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u_1 \, Cos(n x).$$

De potentiaal der aantrekkingskracht, door de ellipsoïde uitgeoefend, voorstellende door de formule

$$U = \text{standvastige} - \pi (A_1 x^2 + B_1 y^2 + C_1 z^2),$$

vindt men uit de genoemde voorwaarde, in verband met (12) op dezelfde wijze als bij den bol, voor C de waarde

$$C = \frac{u_1}{2\pi(2 - A_1)} \qquad (25)$$

In het beschouwde geval is de snelheidspotentiaal gelijk $-\frac{1}{2\pi(2-A_1)}$, vermenigvuldigd met de magnetische potentiaal derzelfde ellipsoïde, als zij in de richting van de x-as met de intensiteit u_1 gelijkmatig gemagnetiseerd is.

Het behoeft nauwelijks gezegd te worden, dat, de componenten der snelheid volgens de beide andere hoofdassen v_1 en w_1 zijnde, de standvastigen der snelheidspotentiaal de waarden verkrijgen

$$\frac{v_1}{2\pi(2 - B_1)} \text{ en } \frac{w_1}{2\pi(2 - C_1)}.$$

Bezit de ellipsoïde behalve eene verschuiving, ook eene wentelende beweging, dan is uit het bovenstaande gemakkelijk nategaan, dat de componenten der hoekssnelheid hier ook in de functie ϕ moeten voorkomen. De volledige waarde van ϕ, bij eene geheel willekeurige beweging der ellipsoïde, is het eerst berekend door Clebsch in het 52e deel van het „Journal von Crelle."

Even als bij den bol zijn de differentiaal-vergelijkingen der relatieve banen van de vloeistof-deeltjes optestellen, en deze zullen, even als daar, alleen van den weg afhangen, dien het middelpunt aflegt, bij eene verschuiving en ook bij eene wenteling van het lichaam om eene vaste as. Aangezien deze vergelijkingen alleen te integreeren

zijn bij de rechtlijnige beweging eener omwentelings-ellipsoïde, en deze integratie meermalen uitgevoerd is, verwijzen wij naar het meervermelde werk van Kirchhoff.

Wanneer een willekeurig lichaam zich in een onbegrensde vloeistof beweegt, dan wordt de voorwaarde-vergelijking, welke aan de oppervlakte des lichaams bestaan moet,

$$\phi = (u + zq - yr)\,Cos(nx) + (v + xr - zp)\,Cos(ny) + \\ + (w + yp - xq)\,Cos(nz)\,; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

indien de componenten der snelheid van den oorsprong van het bewegelijke stelsel door u, v en w, en die der hoekssnelheid des lichaams door p, q en r worden aangeduid. Men vindt voor de snelheidspotentiaal eene functie, welke aan alle vereischte voorwaarden voldoet, zoo men aanneemt, dat

$$\phi = u\phi_1 + v\phi_2 + w\phi_3 + p\phi_4 + q\phi_5 + r\phi_6 + \text{standvastige}\,; \quad . \ (27)$$

waarin alle grootheden ϕ_1, ϕ_2 enz. voldoen aan de vergelijkingen $\Delta\phi_1 = 0$, $\Delta\phi_2 = 0$ enz., met hare differentiaal-quotiënten in het oneindige verdwijnen, van de beweging des lichaams onafhankelijk zijn, en aan de oppervlakte geven

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\phi_1}{\partial n} = Cos(nx), \quad \dfrac{\partial\phi_2}{\partial n} = Cos(ny), \quad \dfrac{\partial\phi_3}{\partial n} = Cos(nz); \\[2ex] \dfrac{\partial\phi_4}{\partial n} = y\,Cos(nz) - z\,Cos(ny), \quad \dfrac{\partial\phi_5}{\partial n} = z\,Cos(nx) - x\,Cos(nz), \\ \qquad \text{enz.} \end{array}\right\} \ldots (28)$$

De uitdrukking (27) is dezelfde in het vaste als in het bewegelijke coördinaten-stelsel. Is ϕ eenmaal berekend, dan kan de levende kracht der vloeistof worden gevonden; want uit de beteekenis der snelheidspotentiaal volgt onmiddelijk, dat

$$2T = \int \left\{ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \right\} dm = \int \phi \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS; \quad . \ . \ (29)$$

zijnde dm het volumen-element en dS een element van de oppervlakte des lichaams. Daar volgens onze onderstellingen deze integralen in het oneindige verdwijnen, behoeven zij alleen over de oppervlakte van het vaste lichaam uitgestrekt te worden.

Men ziet, dat de levende kracht van de vloeistof, en daarom ook van het geheele stelsel, eene homogene uitdrukking van den tweeden graad wordt, ten opzichte der grootheden u, v, w, p, q en r. De coëfficiënten, in het algemeen 21 in getal, zijn standvastig, wanneer een coördinaten-stelsel ten grondslag is gelegd, dat met het lichaam

samen zich beweegt; bij een coördinaten-systeem, dat in de ruimte vast is, zijn de coëfficiënten veranderlijk met den stand van het lichaam.

Door middel van deze uitdrukking voor de levende kracht, kunnen de bewegings-vergelijkingen van het lichaam op zeer eenvoudige wijze worden opgesteld.

Stellen wij ter onderscheiding de bewegings-componenten des lichaams ten opzichte der vaste coördinaten door u', v', w' enz. en ten opzichte der bewegelijke assen door u, v, w enz. voor; noemen wij verder V de potentiaal der krachten, dan is naar het beginsel van Hamilton

$$\frac{d\alpha}{dt}=u',\ \frac{d\beta}{dt}=v',\ \frac{d\gamma}{dt}=w',$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial u'}=\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p'}=\beta\dfrac{\partial V}{\partial \gamma}-\gamma\dfrac{\partial V}{\partial \beta}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial v'}=\dfrac{\partial V}{\partial \beta}, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q'}=\gamma\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}-\alpha\dfrac{\partial V}{\partial \gamma}, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial w'}=\dfrac{\partial V}{\partial \gamma}, & \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r'}=\alpha\dfrac{\partial V}{\partial \beta}-\beta\dfrac{\partial V}{\partial \alpha}, \end{array}\right\} \quad \ldots \ (30)$$

De bewegings-vergelijkingen ten opzichte der met het lichaam verbonden assen zijn gewoonlijk gemakkelijker op te lossen, omdat daarin standvastige coëfficienten voorkomen. Om deze te verkrijgen, make men gebruik van de betrekkingen

$$\frac{\partial T}{\partial u'}=\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w},$$

$$\frac{\partial T}{\partial v'}=\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w},$$

$$\frac{\partial T}{\partial p'}=\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial q}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}+\beta\frac{\partial T}{\partial v}-\gamma\frac{\partial T}{\partial w},$$

enz.

als α_1, β_1, γ_1 enz. even als vroeger de richtings-cosinussen zijn.

Dit overbrengende, vindt men

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u}+\alpha_2\frac{\partial T}{\partial v}+\alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial V}{\partial \alpha},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u}+\beta_2\frac{\partial T}{\partial v}+\beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right)=\frac{\partial V}{\partial \beta}.$$

enz.

Laat men nu in het beschouwde tijdselement de twee coördinaten-stelsels samenvallen, dan worden

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = 0,$$
$$\alpha_2 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \gamma_2 = 0,$$

enz.

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = -r, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = q,$$
$$\frac{d\beta_1}{dt} = r, \quad \frac{d\beta_2}{dt} = 0, \quad \frac{d\beta_3}{dt} = -p,$$
$$\frac{d\gamma_1}{dt} = -q, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = p, \quad \frac{d\gamma_3}{dt} = 0.$$

En dan worden de gevraagde bewegings-vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial \beta}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + L, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + M, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + N;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (31)$$

als wij kortheidshalve de componenten van het koppel L, M en N noemen. Kirchhoff heeft deze vergelijkingen geïntegreerd voor een omwentelingslichaam, dat niet aan de werking van krachten onderworpen is [1]). In het algemeene geval is de integratie van de vergelijkingen tot nu toe niet gelukt.

Wij zullen hier in eene nadere beschouwing treden van het vraagstuk omtrent de gelijktijdige beweging van meerdere lichamen in een vloeistof. Hierbij is het wenschelijk, om een coördinaten-stelsel aan te nemen, dat in de ruimte een onbewegelijken stand heeft. Noemen wij nu u_1, v_1, w_1 enz. de bewegings-componenten van het eerste lichaam, u_2, v_2, w_2 enz. die van het tweede, dan heeft een willekeurig punt van het eerstgenoemde de snelheids-componenten

[1]) Journal von Crelle. Band 71.

$$u_1 + r_1 y_1 - q_1 z_1, \text{ enz.}$$

en eenig punt van het andere evenzoo de componenten

$$u_2 + r_2 y_2 - q_2 z_2, \text{ enz.}$$

Zij weder ϕ het teeken voor de snelheidspotentiaal, dan moet deze functie aan de volgende voorwaarden voldoen: hare differentiaal-quotienten naar de coördinaat-assen zijn in de geheele ruimte gestadig en verdwijnen in het oneindige; aan de oppervlakken der lichamen is $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ gegeven, en de voorwaarde-vergelijkingen zijn geheel analoog met de voorwaarden (28) bij een enkel lichaam. Men zal nu vinden, dat

$$\phi = \Sigma\,(u\phi_1 + v\phi_2 + w\phi_3 + p\phi_4 + q\phi_5 + r\phi_6) + \text{standvastige} \quad . \quad (32)$$

De functiën ϕ_1, ϕ_2 enz. zijn ook hier onafhankelijk van de bewegings-componenten der lichamen, maar worden op eenig oogenblik gegeven, door hunnen vorm en onderlingen stand. Zij hebben in het algemeen voor alle oppervlakken eene verschillende waarde. Zijn deze functiën gevonden, dan kan daaruit de levende kracht worden afgeleid; en dan worden de differentiaal-vergelijkingen der beweging, volgens het beginsel van Hamilton,

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{d\alpha'}{dt} = u_1, & \frac{d\beta'}{dt} = v_1, & \frac{d\gamma'}{dt} = w_1, \\ \frac{d\alpha''}{dt} = u_2, & \frac{d\beta''}{dt} = v_2, & \frac{d\gamma''}{dt} = w_2, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{dT}{\partial u_1} = \frac{\partial T}{\partial \alpha'} + \frac{\partial V}{\partial \alpha'}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_2} = \frac{\partial T}{\partial \alpha''} + \frac{\partial V}{\partial \alpha''};$$
$$\text{enz.} \qquad\qquad \text{enz.}$$

zoo V weder de potentiaal der op het lichaam werkende krachten, en T de levende kracht beteekent.

Zijn het een willekeurig aantal bollen, welker stralen wij R_1, R_2, R_3 enz. noemen, die zich met de snelheden S_1, S_2, S_3 enz. in de vloeistof bewegen, dan zou, volgens het bovenstaande, indien de eerste bol alleen aanwezig ware,

$$\phi' = \frac{R_1^{\,3}}{2} S_1 \frac{d\left(\frac{1}{r_1}\right)}{dn};$$

en, zoo de tweede alleen voorhanden ware,

$$\phi'' = \frac{R_2^{\,3}}{2} S_2 \frac{d\left(\frac{1}{r_2}\right)}{dn}.$$

De nauwkeurige berekening der snelheidspotentiaal, ten gevolge van de gelijktijdige verplaatsing der lichamen, geschiedt door de leer der bol-functiën. Bij eene eerste benadering is echter in eenig punt der vloeistof-massa

$$\Phi = \Phi' + \Phi'' + \Phi''' + \text{ enz.}$$

Indien de stralen der bollen oneindig klein zijn met betrekking tot den onderlingen afstand hunner middelpunten, dan zal deze waarde van Φ in alle punten, welke op een eindigen afstand van de oppervlakken gelegen zijn, tot op oneindig kleine grootheden na nauwkeurig wezen. De levende kracht der vloeistof zal nu worden

$$T = \frac{1}{2}\int (\Phi' + \Phi'' + \Phi''' + \text{enz.}) \frac{\partial(\Phi' + \Phi'' + \text{enz.})}{\partial n} dS,$$

waarin de integratie over de oppervlakken van alle lichamen moet worden uitgestrekt.

Nu is

$$\frac{1}{2}\int \Phi' \frac{\partial \Phi'}{\partial n} dS = \frac{\pi}{3} R_1{}^3 S_1{}^3,$$

$$\frac{1}{2}\int \Phi'' \frac{\partial \Phi''}{\partial n} dS = \frac{\pi}{3} R_2{}^3 S_2{}^3,$$

enz.

Verder weet men, dat

$$\int \Phi' \frac{\partial \Phi''}{\partial n} dS = \int \Phi'' \frac{\partial \Phi'}{\partial n} dS,$$

naar het theorema van Green.

Aan de oppervlakte van den eersten bol is

$$\Phi' = -\frac{R_1}{2} \left\{ u_1 \, Cos(nx) + v_1 \, Cos(ny) + w_1 \, Cos(nz) \right\},$$

terwijl daar

$$\frac{\partial \Phi''}{\partial n} = \frac{R_2{}^3}{2} \left\{ u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} Cos(nx) + u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} Cos(ny) + \right.$$

$$\left. + u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} Cos(nz) + v_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} Cos(nx) + \text{enz.} \right\};$$

en hier mag men, volgens de onderstelling, dat de stralen der bollen oneindig klein zijn, voor r den onderlingen afstand der middelpunten zetten.

De integratie geeft, zooals onmiddelijk te zien is,

$$\int \phi' \frac{\partial \phi''}{\partial n} dS = \frac{\pi}{8} R_1{}^3 R_2{}^3 \left\{ u_1 u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} + \right.$$

$$+ (v_1 w_2 + v_2 w_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} + v_1 v_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} + (w_1 u_2 + w_2 u_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} +$$

$$\left. + w_1 w_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} + (u_1 v_2 + u_2 v_1) \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots (34)$$

De onderlinge afstanden der middelpunten van alle bollen r_{12}, r_{13}, r_{23} enz. zijnde, wordt voor de levende kracht de volgende formule gevonden

$$T = \frac{\pi}{8} \left\{ \sum_1^n R^3 S^3 + \Sigma R_m^3 R_n^3 \left[u_m u_n \frac{\partial^2 \frac{1}{r_{mn}}}{\partial \alpha^2} + \text{enz.} \right] \right\} \quad \ldots (35)$$

Bij het tweede Σ teeken, moet men al de combinatiën twee aan twee zonder herhaling der verschillende indices m, n nemen.

Stelt men kortheidshalve de uitdrukking onder het tweede Σ teeken gelijk aan V, dan kan men zetten

$$V = u_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial \alpha} + v_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial \beta} + w_1 \frac{\partial P_{12}}{\partial \gamma} +$$

$$+ u_1 \frac{\partial P_{13}}{\partial \alpha} + v_1 \frac{\partial P_{13}}{\partial \beta} + w_1 \frac{\partial P_{13}}{\partial \gamma} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ u_2 \frac{\partial P_{23}}{\partial \alpha} + v_2 \frac{\partial P_{23}}{\partial \beta} + w_2 \frac{\partial P_{23}}{\partial \gamma} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

waarin

$$P_{12} = \frac{\pi}{8} R_1{}^3 R^3{}_2 \left(u_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \alpha} + v_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \beta} + w_2 \frac{\partial \frac{1}{r_{12}}}{\partial \gamma} \right),$$

$$P_{13} = \frac{\pi}{8} R_1{}^3 R_3{}^3 \left(u_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \alpha} + v_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \beta} + w_3 \frac{\partial \frac{1}{r_{13}}}{\partial \gamma} \right).$$

enz.

Als men nu verder onderstelt, dat alle snelheden standvastig zijn, dan vindt men zonder moeite, dat de kracht, werkende op den eersten bol in de richting van de x-as, aldus kan worden voorgesteld

$$X = -\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(u_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial \alpha} + v_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial \beta} + w_2 \frac{\partial P_{12}}{\partial \gamma} + \right.$$

$$\left. + u_3 \frac{\partial P_{13}}{\partial \alpha} + v_3 \frac{\partial P_{13}}{\partial \beta} + w_3 \frac{\partial P_{13}}{\partial \gamma} + \text{enz.}\right) \quad . \; . \; . \; . \; (36)$$

Deze kracht is geheel onafhankelijk van de beweging van het eerste lichaam. Dergelijke formulen worden gevonden voor de overige krachtcomponenten. Zijn er slechts twee bolvormige lichamen, dan heeft de kracht, welke door het eene op het andere wordt uitgeoefend (zie Kirchhoff t. a. p.) gelijke grootte, maar tegengestelde richting met die, welke een magnetisch molecuul in het middelpunt van den eersten uitwerkt op zulk een molecuul in het middelpunt van den anderen; de magnetische assen zijn dan evenwijdig met de bewegingsrichting van het eerste lichaam, en hunne magnetische momenten zijn gelijk aan het product der snelheid van dit lichaam met de grootheden

$$R_1{}^3 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \quad \text{en} \quad R_2{}^3 \sqrt{\frac{\pi}{3}}.$$

Bewegen zich de beide bollen in dezelfde richting, volgens de lijn, welke de middelpunten vereenigt, dan wordt de kracht

$$\frac{2\pi R_1{}^3 R_2{}^3}{r^4} S_2{}^2.$$

Doch indien zij loodrecht op de lijn, welke de middelpunten verbindt, voortgaan, dan trekt de tweede bol den eersten aan met de kracht

$$\frac{\pi R_1{}^3 R_2{}^3}{r^4} S_2{}^2.$$

Dezelfde formulen zijn van toepassing, indien een bol zich beweegt, evenwijdig aan, of loodrecht op een vasten wand; omdat, zooals wij zagen, de snelheid van den eersten bol in de formulen niet voorkomt, en daarom nul mag worden gesteld.

Laat ons nu nog onderstellen, dat het eene bolvormige lichaam in rust zij, en dat het middelpunt van het andere kleine slingeringen om den evenwichtsstand uitvoert, volgens de x-as.

Dan is

$$u_1 = 0, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = 0;$$

verder

$$u_2 = A \frac{2\pi}{\tau} \, Cos \frac{2\pi}{\tau} t;$$

en dus

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} A \, Sin \frac{2\pi}{\tau} t.$$

Zoo A de halve amplitude van de trilling en τ den trillingstijd beteekent.

Van de bewegings-vergelijkingen, nemen wij alleen in beschouwing

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\partial T}{\partial \alpha'} + X,$$

waardoor men de kracht leert kennen, welke door den bewegelijken bol op den rustenden wordt uitgeoefend.

Nu is

$$\frac{\partial T}{\partial u_1} = \frac{\pi}{3} R_1{}^3 R_2{}^3 u_2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha'} = 0;$$

en dit substitueerende

$$X = \frac{4\pi^3 R_1{}^3 R_2{}^3 A}{\tau^2} \left\{ A \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^3} Cos^2 \frac{2\pi}{\tau} t - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^2} Sin \frac{2\pi}{\tau} t \right\}.$$

Hieruit kunnen wij ook de middelwaarde der kracht afleiden, welke op den rustenden bol werkt. De middelwaarde van $Sin \frac{2\pi}{\tau} t$ gedurende n geheele trillingen is

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau Sin \frac{2\pi}{\tau} t dt = 0.$$

En op dezelfde manier, vindt men voor de middelwaarde van $Cos^2 \frac{2\pi}{\tau} t$

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau Cos^2 \frac{2\pi}{\tau} t dt = \frac{1}{2}.$$

Zoodat de gevraagde grootheid worden zal

$$\frac{2\pi^3 R_1{}^3 R_2{}^3 A^2}{\tau^2} \frac{\partial^3 \frac{1}{r}}{\partial \alpha^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

De bedoelde middelwaarde der kracht is, zooals gebleken is, evenredig met de tweede macht der amplitude, en omgekeerd evenredig met die van den slingertijd.

Bij eene ellipsoïde, die zonder hoekssnelheid in een vloeistof zich verplaatst, is

$$\Phi' = \frac{1}{2\pi(2-A_1)}\frac{\partial U_1}{\partial \alpha}u_1 + \frac{1}{2\pi(2-B_1)}\frac{\partial U_1}{\partial \beta}v_1 + \frac{1}{2\pi(2-C_1)}\frac{\partial U_1}{\partial \gamma}w_1,$$

gelijk boven reeds werd medegedeeld.

Beweegt zich in dezelfde vloeistof nog eene tweede ellipsoïde, welker snelheidspotentiaal gegeven zij door de vergelijking

$$\Phi'' = \frac{1}{2\pi(2-A_2)}\frac{\partial U_2}{\partial \alpha}u_2 + \frac{1}{2\pi(2-B_2)}\frac{\partial U_2}{\partial \beta}v_2 + \frac{1}{2\pi(2-C_2)}\frac{\partial U_2}{\partial \gamma}w_2,$$

dan mag weder, indien de lichamen oneindig klein zijn ten opzichte van hun onderlingen afstand, bij eene eerste benadering voor de snelheidspotentiaal, ten gevolge van de gezamenlijke beweging der beide lichamen, gesteld worden

$$\Phi = \Phi' + \Phi''.$$

De levende kracht der vloeistof kan weder worden berekend, door de formule

$$T = \frac{1}{2}\int \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, dS.$$

over de oppervlakken van beide lichamen genomen. Door uitvoering dezer integratie, komt men tot de volgende formule voor de levende kracht der vloeistof

$$\begin{aligned}
T = {} & \frac{1}{2}M_1\left(\frac{A_1}{2-A_1}u_1^2 + \frac{B_1}{2-B_1}v_1^2 + \frac{C_1}{2-C_1}w_1^2\right) + \\
& + \frac{1}{2}M_2\left(\frac{A_2}{2-A_2}u_2^2 + \frac{B_2}{2-B_2}v_2^2 + \frac{C_2}{2-C_2}w_2^2\right) + \\
& + \frac{M_1}{2\pi}\left\{\frac{A_1}{(2-A_1)(2-A_2)}u_1u_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2} + \frac{B_1}{(2-B_1)(2-B_2)}v_1v_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2} + \right. \\
& + \frac{C_1}{(2-C_1)(2-C_2)}w_1w_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2} + \left(\frac{A_1}{(2-A_1)(2-B_2)}u_1v_2 + \frac{B_1}{(2-A_2)(2-B_1)}u_2v_1\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \\
& + \left(\frac{A_1}{(2-A_1)(2-C_2)}u_1w_2 + \frac{C_1}{(2-C_1)(2-A_2)}u_2w_1\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha \partial \gamma} + \\
& \left. + \left(\frac{B_1}{(2-B_1)(2-C_2)}v_1w_2 + \frac{C_1}{(2-C_1)(2-B_2)}v_2w_1\right)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta \partial \gamma}\right\}.
\end{aligned}$$

In deze formulen beduiden M_1 en M_2 de volumina der beide gegeven ellipsoïden. Men neme in de differentiaal-quotienten $\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2}$ enz., die waarde van U_2 aan, welke zij bezit in het middelpunt van het eerste lichaam. Berekenen wij nu de kracht, welke

het eene lichaam op het andere uitoefent, wanneer zij beide met standvastige snelheid voortgaan.

Men brenge de gevonden waarde voor de levende kracht in de bewegings-vergelijking

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1}=\frac{\partial T}{\partial \alpha}+X$$

over, dan kan de werking worden gevonden, welke in de richting van de x-as door de tweede ellipsoïde op de eerste wordt verricht. Nu is

$$\frac{\partial T}{\partial u_1}=\frac{A_1 M_1}{(2-A_1)}u_1+\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e_1 e_2 u_2\frac{\partial U_2}{\partial \alpha}+e_1 f_2 v_2\frac{\partial U_2}{\partial \beta}+e_1 g_2 w_2\frac{\partial U_2}{\partial \gamma}\right),$$

zoo wij kortheidshalve voor de coëfficiënten van de producten $u_1 u_2$, $u_1 v_2$ enz. de notatiën $e_1 e_2$, $e_1 f_2$ enz. gebruiken. Dan wordt

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u_1}=\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big\{&e_1 e_2\left(u_1 u_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2}+v_1 u_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \beta}+w_1 u_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \gamma}\right)+\\
&+e_1 f_2\left(u_1 v_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \beta}+v_1 v_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2}+w_1 v_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta\partial \gamma}\right)+\\
&+e_1 g_2\left(u_1 w_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \gamma}+v_1 w_2\frac{d^2 U_2}{\partial \beta\partial \gamma}+w_1 w_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2}\right)-\\
&-e_1 e_2\left(u_2^2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2}+v_2 u_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \beta}+w_2 u_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \gamma}\right)-\\
&-e_1 f_2\left(u_2 v_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \beta}+v_2^2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2}+w_2 v_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta\partial \gamma}\right)-\\
&-e_1 g_2\left(u_2 w_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \gamma}+v_2 w_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta\partial \gamma}+w_2^2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2}\right)\Big\},\end{aligned}$$

en, zooals verder gemakkelijk is afteleiden,

$$\begin{aligned}X=\frac{\partial}{\partial \alpha}\Big\{&v_1 u_2(e_1 e_2-e_2 f_1)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \beta}+w_1 u_2(e_1 e_2-e_2 g_1)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \gamma}+\\
&+v_1 v_2(e_1 f_2-f_1 f_2)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2}+w_1 v_2(e_1 f_2-f_2 g_1)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta\partial \gamma}+\\
&+v_1 w_2(e_1 g_2-g_2 f_1)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta\partial \gamma}+w_1 w_2(e_1 g_2-g_2 g_1)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2}-\\
&-u_2^2 e_1 e_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha^2}-v_2^2 e_1 f_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta^2}-w_2^2 e_1 g_2\frac{\partial^2 U_2}{\partial \gamma^2}-\\
&-u_2 v_2(e_1 e_2+e_1 f_2)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \beta}-u_2 w_2(e_1 e_2+e_1 g_2)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \alpha\partial \gamma}-\\
&-v_2 w_2(e_1 f_2+e_1 g_2)\frac{\partial^2 U_2}{\partial \beta\partial \gamma}\Big\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (39)\end{aligned}$$

Op dergelijke manier vindt men de uitdrukkingen voor de overige krachten. De kracht, welke op de eerste ellipsoïde werkt, is niet, gelijk bij den bol het geval was, onafhankelijk van de beweging van dit lichaam. Wel is de component dier kracht volgens de x-as, onafhankelijk van de beweging der eerste ellipsoïde in de richting dier as.

KLEINERE MEDEDEELINGEN.

DE PERIODICITEIT DER FUNCTIEN,

DOOR

D^R. A. BENTHEM Gzn.

§ 1.

1. In de *Theorie der functiën van veranderlijke complexe getallen* N°. 173 (zie Nieuw Archief, Deel III) toonden wij aan, dat de algemeene waarde W van de elliptische integraal

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{\sqrt{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

wordt aangegeven door

$$W = 2m_1 i_1 + 2m_2 i_2 + 2m_3 i_3 + 2m_4 i_4 \pm v, \quad \ldots\ldots (2)$$

waarin het teeken $+$ of $-$ moet worden genomen, naargelang h, — dat is het aantal malen, dat z de vertakkingspunten p_1, p_2, p_3 en p_4 omloopt, — even of oneven is. In deze formule stelt voorts v voor de waarde van de integraal (1) voor het geval, dat z de rechte lijn van z_0 naar Z doorloopt; m_1, m_2, m_3 en m_4 zijn geheele getallen, en i_k staat voor de rechtlijnige integraal

$$\int_{z_0}^{p_k - \varrho_k} \frac{dz}{\sqrt{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}} \quad \ldots\ldots (3)$$

voor Grens $\rho_k = 0$.

Doorloopt dus z bij den overgang van z_0 naar Z eene kromme lijn, die met de rechte lijn, welke deze punten verbindt, den oorsprong niet insluit, en bovendien

1°. geen vertakkingspunt insluit, dan is

$$W = v;$$

2°. alleen het vertakkingspunt p_k $2n_k$-maal omloopt, dan is

$$W = v;$$

3°. alleen dit punt p_k $2n_k + 1$-maal omloopt, dan is

$$W = 2i_k - v;$$

4°. eerst het punt p_k $2n_k + 1$-maal en daarna het punt p_l $2n_l + 1$-maal omloopt, dan is

$$W = 2i_k - 2i_l + v;$$

5°. eerst het punt p_k $2n_k + 1$-maal, daarna het punt p_l $2n_l$-maal, en vervolgens weder het eerste punt p_k $2n_{k'} + 1$-maal omloopt, dan is

$$W = v;$$

enz.

2. In het voorgaande N°. stellen W en v beide de waarde voor van de integraal

$$\int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{\sqrt{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}};$$

is echter in $v = \int_{z_0}^{Z}$ de waarde van de bovenste grens $Z = r \diagup \alpha$, dan is in $W = \int_{z_0}^{Z}$ de waarde dier grens $Z = r \diagup (\alpha + 2q\pi)$, waarin q aanwijst, hoeveel malen de door z beschreven weg den oorsprong in positieven zin omloopt.

Men kan nu $\int_{z_0}^{Z}$ beschouwen als eene functie van de grenswaarde Z (zie t. a. p. N°. 141), en kan derhalve schrijven $\int_{z_0}^{Z} = \Phi(Z)$, waaruit onmiddellijk volgt

$$v = \Phi(r \diagup \alpha)$$

en

$$W = \Phi(r \diagup (\alpha + 2q\pi)).$$

Lost men deze vergelijkingen op ten opzichte van $r \diagup \alpha$ en $r \diagup (\alpha + 2q\pi)$, en vindt men daardoor voor de *omgekeerde functie* van $v = \Phi(r \diagup \alpha)$,

$$r \diagup \alpha = \sigma(v),$$

dan is ook die van $W = \Phi(r \diagup (\alpha + 2q\pi))$,

$$r \diagup (\alpha + 2q\pi) = \sigma(W);$$

zoodat men heeft

$$\sigma(W) = 1 \diagup 2q\pi . \sigma(v),$$

en in verband met formule (2)

$$\sigma(2m_1 i_1 + 2m_2 i_2 + 2m_3 i_3 + 2m_4 i_4 \pm v) = 1 \diagup 2q\pi . \sigma(v), \quad . \; . \; (4)$$

en wel $+$ of $-$ naar gelang h even of oneven is.

Let men derhalve alleen op de directe waarde van $\sigma(v)$, dan kan men schrijven

$$\sigma(2m_1 i_1 + 2m_2 i_2 + 2m_3 i_3 + 2m_4 i_4 \pm v) = \sigma(v) \quad . \; . \; . \quad (5)$$

De waarden i_1, i_2, i_3 en i_4 worden de *perioden* der omgekeerde functie $\sigma(v)$ genoemd; uit het voorafgaande blijkt, dat de *elliptische functiën* in 't algemeen als *viervoudig periodisch* moeten worden aangemerkt.

3. Uit deze beschouwing ziet men, dat de perioden der omgekeerde functiën een onmiddellijk gevolg zijn van de omstandigheid, dat de wegen, die z van z_0 naar Z kan doorloopen, verschillend gelegen zijn ten opzichte van de vertakkingspunten, of beter gezegd van de *bijzondere* punten van de onder de integraal voorkomende functie. Bij het boven behandelde voorbeeld waren de waarde van λ_k, derhalve ook van de integraal, genomen over den omtrek van den oneindig kleinen cirkel, die om het punt p_k wordt beschreven (zie t. a. p. Nos. 146 en 147), dat is van

$$I(p_k) = \int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} (z - p_k) f(z)\, d\Phi \,/^{\prime}\, \frac{\pi}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

gelijk nul; is zulks echter niet het geval, dan moeten die waarden in rekening worden gebracht. Bij elken omloop om p_k komt namelijk een term van den vorm $i_k + I'p_k)$ bij de waarde der integraal (waarbij men, blijkens het boven gekozen voorbeeld, geen acht slaat op de verandering, die v door telkenmalige vermenigvuldiging met een standvastigen factor ondergaat); zoodat elke periode in 't algemeen gelijk is aan

$$\int_{z_0}^{\rho_k - \varrho_k} f(z)\, dz + \int_{\alpha}^{\alpha + 2\pi} (z - p_k) f(z)\, d\Phi \,/^{\prime}\, \frac{\pi}{2}, \quad . \; . \; . \quad (7)$$

voor Grens $(z - p_k) =$ Grens $\rho_k = 0$.

§ 2.

4. Ten opzichte der *periodiciteit* harer omgekeerde functiën kan men dus de integralen brengen onder vier klassen; en wel

1e Klasse,

of die integralen, wier omgekeerde functiën *niet* periodisch zijn, wijl de beide termen in (7) gelijk zijn aan nul. Dit zijn de integralen van *synektische* functiën.

2e KLASSE,

of die, waarbij de waarden van i_k gelijk zijn aan nul en dus wegvallen, zoodat elke periode gelijk is aan

$$I(p_k) = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} (z-p_k)f(z)\,d\Phi \nearrow \frac{\pi}{2} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (6)$$

Dit zijn de integralen der *asynektische* functiën. Is hierbij Grens $(z-p_k).f(z) = \lambda_k$ voor Grens $(z-p_k) = 0$, dan is elke periode gelijk aan

$$2\pi\lambda_k \nearrow \frac{\pi}{2} \,.\,.\,.\,.\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (8)$$

5. Zij bijv.

$$W = \int_{z_0}^{Z} \frac{dz}{z^2+1}\,,\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (9)$$

dan is $\lambda_1 = -\lambda_2 = \dfrac{1}{2 \nearrow \frac{\pi}{2}}$; laat men nu z eerst n_1-maal het punt $1 \nearrow \frac{\pi}{2}$, daarna n_2-maal het punt $1 \nearrow \frac{3\pi}{2}$ enz. omloopen, dan vindt men voor de algemeene waarde W van deze integraal

$$W = (n_1 - n_2 + n'_1 - n'_2 + \ldots)\,\pi + v,$$

of

$$W = m\pi + v,$$

waarin m een geheel getal voorstelt. Voor de omgekeerde functie is dus

$$\sigma(m\pi + v) = \sigma(v) \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (10)$$

Voor $z_0 = 0$ is $\sigma(v) = Tg\,v$ en derhalve

$$Tg\,(m\pi + v) = Tg\,v.$$

6. Voor de algemeene waarde W van de integraal

$$\int_{+1}^{z} \frac{dz}{z} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (11)$$

vindt men (zie t. a. p. N°. 162)

$$W = v \nearrow -2n\pi + 2n\pi \nearrow \frac{\pi}{2};$$

bijgevolg geeft de omgekeerde functie

$$\sigma\left(v \nearrow -2n\pi + 2n\pi \nearrow \frac{\pi}{2}\right) = \sigma(v).1 \nearrow 2n\pi.$$

Nu is echter $\sigma(v) = e^v$, zoodat men ook heeft

$$e^v \nearrow -2n\pi + \sqrt{-1}\cdot 2n\pi = e^v \nearrow 2n\pi, \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

wat met de beschouwing in § 27 (t. a. p.) overeenstemt.

7. **8e Klasse,**

of die integralen, waarbij de waarde van λ_k, dus ook van den tweeden term in formule (7), gelijk is aan nul, en derhalve elke periode gelijk is aan

$$i_k = \int_{z_0}^{p_k - \varrho_k} f(z)\,dz, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

voor Grens $\rho_k = 0$. Dit zijn de integralen der gewone *veelzinnige functiën*, waarbij geen factor voor het wortelteeken voorkomt.

Stelt men bijv. in formule (170) van N°. 169 (t. a. p.) de tusschen haken voorkomende waarden achtereenvolgens voor door $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, dan wordt de algemeene waarde W van de integraal

$$\int_{z_0}^{Z} dz \sqrt[n]{\frac{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_m)}{(z-p_r)(z-p_s)\ldots(z-p_u)}} \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

$$W = \alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3 + \ldots + \alpha_n i_n - v \nearrow \frac{2h\pi}{n}; \quad \ldots \quad (15)$$

waarin

$$h = n_1 + n_2 + \ldots + n_m + n'_1 + n'_2 + \ldots + n'_m + \ldots - (n_r + n_s + \ldots + n_u + \\ + n'_r + n'_s + \ldots + n'_u + \ldots)$$

is, dat is, gelijk aan het aantal omloopen van z om al de vertakkingspunten samen.

Voor de omkeering van de integraal (14) heeft men derhalve

$$\sigma\left(\sum_1^k \alpha_k i_k + v \,.\, 1 \nearrow \frac{2h\pi}{n}\right) = \sigma(v) \,.\, 1 \nearrow 2q\pi, \quad \ldots \quad (16)$$

of, indien men alleen de direkte waarde van $\sigma(v)$ neemt,

$$\sigma\left(\sum_1^n \alpha_k i_k + v \,.\, 1 \nearrow \frac{2h\pi}{n}\right) = \sigma(v) \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

Ondanks de (complexe) waarden van α_k en den bij v voorkomenden factor $1 \nearrow \frac{2h\pi}{n}$ moeten de waarden van i_k als even zoovele perioden worden beschouwd. In 't algameen is dus de functie, die men door omkeering van (14) verkrijgt, n-voudig periodisch.

Worden in (14) $q (q < n)$ factoren onder het wortelteeken gelijk, dan heeft zulks klaarblijkelijk met de q overeenkomstige waarden van i_k, en dus ook met q perioden plaats.

Is in (14) $z_0 = 0$, en zijn de waarden van $p_1, p_2, \ldots p_m$, en

evenzoo die van $p_r, p_s, \ldots p_n$, zoodanig, dat zij twee aan twee in modulus overeenkomen en slechts π (180°) in amplitude verschillen; dan zullen ook de waarden van $i_1, i_2, \ldots i_m$, en die van i_r, $i_s, \ldots i_n$ in dezelfde omstandigheden verkeeren. Zoo is voor de omgekeerde functie van de integraal

$$\int_0^Z dz \sqrt[n]{\frac{(z^2-p_1^2)(z^2-p_2^2)\ldots\ldots(z^2-p_m^2)}{(z^2-p_r^2)(z^2-p_s^2)\ldots\ldots(z^2-p_n^2)}} \quad \ldots\ldots (18)$$

even als boven

$$\sigma\left(\sum_1^n \alpha_k i_k + v . 1 \nearrow \frac{2h\pi}{n}\right) = \sigma(v) \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

Voor $n = 2$ gaat deze formule (19) over in

$$\sigma\left(\sum_1^n m_k i_k \pm v\right) = \sigma(v), \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

waarin m_k een geheel getal voorstelt, en welke formule nu geldt voor de omgekeerde functie van de integraal

$$\int_0^Z dz \sqrt{\frac{(z^2-p_1^2)(z^2-p_2^2)\ldots\ldots(z^2-p_m^2)}{(z^2-p_r^2)(z^2-p_s^2)\ldots\ldots(z^2-p_n^2)}} \quad \ldots\ldots (21)$$

8. Als toepassing van het voorgaande hernemen wij de elliptische integraal

$$\int_{z_0}^Z \frac{dz}{\sqrt{(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3)(z-p_4)}}, \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

voor het geval, dat $z_0 = 0$, $p_3 = -p_1$ en $p_4 = -p_2$ is, en zij dus overgaat in

$$\int_0^Z \frac{dz}{\sqrt{(z^2-p_1^2)(z^2-p_2^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

Nu wordt ook $i_3 = -i_1$, $i_4 = -i_2$, zoodat de bovengevonden formule (5) overgaat in

$$\sigma(2(m_1-m_3)i_1 + 2(m_2-m_4)i_2 \pm v) = \sigma(v); \quad \ldots\ldots (24)$$

waardoor voor dit bijzondere geval de *viervoudige* periodiciteit der elliptische functiën tot eene *tweevoudige* is teruggebracht.

9. Als tweede toepassing nemen wij de integraal

$$\int_{z_0}^Z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

volgens boven vindt men voor hare omgekeerde functie

$$\sigma(2m_1 i_1 + 2m_2 i_2 \pm v) = \sigma(v) \quad \ldots\ldots\ldots (26)$$

Neemt men nu hierin $z_0 = 0$, dan wordt $i_2 = -i_1 = -\frac{\pi}{2}$, en dus de omgekeerde functie

$$\sigma((m_1 - m_2)\pi \pm v) = \sigma(v) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

Maar nu is ook $\sigma(v) = Sin\, v$ en derhalve

$$Sin((m_1 - m_2)\pi \pm v) = Sin\, v, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (28)$$

en wel + of −, naargelang $m_1 - m_2$ even of oneven is.

10. **4e Klasse,**

of de integralen, waarbij de waarden van de beide in (7) voorkomende termen van nul verschillen. Hiertoe behooren de integralen van den vorm

$$\int_{z_0}^{Z} dz \frac{(z-p_1)(z-p_2)\ldots(z-p_m)}{(z-q_1)(z-q_2)\ldots(z-q_l)} \sqrt[n]{\frac{(z-r_1)(z-r_2)\ldots(z-r_h)}{(z-s_1)(z-s_2)\ldots(z-s_g)}} \quad (29)$$

Is hierbij de vorm onder het integraalteeken zoo herleid, dat een der tellers geen factor met een der noemers gemeen heeft, dan kunnen zich de volgende gevallen voordoen.

Vooreerst kan een factor alleen onder het wortelteeken (minder dan n-maal) voorkomen; voor dien factor is de waarde van λ, en dus ook van den tweeden term in de formule (7), gelijk aan nul.

Ten tweede kan een factor alleen vóór het wortelteeken voorkomen; voor dien factor is de eerste term in (7) gelijk aan nul.

In de derde plaats kan een factor in den teller vóór en onder het wortelteeken voorkomen; alsdan wordt weder de waarde van λ, en dus van den tweeden term in (7), gelijk aan nul.

Terwijl eindelijk in de vierde plaats een factor vóór en onder het wortelteeken in den noemer kan voorkomen; in welk geval voor dien factor geen der beide termen in (7) gelijk aan nul wordt, en men de waarde van λ, en dus ook van den tweeden term in (7), door reeksen moet bepalen (t. a. p. N°. 147).

De omgekeerde functie van de bovengenoemde integraal (29) is derhalve in 't algemeen $(h+l+g)$-voudig periodisch.

Wordt hierbij $z_0 = 0$, en zijn de waarden $r_1, r_2, \ldots r_h$, die van $s_1, s_2, \ldots s_g$, zoomede die van $p_1, p_2, \ldots p_m$ en die van $q_1, q_2, \ldots q_l$ zoodanig, dat zij twee aan twee in modulus overeenkomen en slechts $\pi\,(180^\circ)$ in amplitude verschillen, dan kan het aantal perioden tot op de helft worden teruggebracht. Voorts gelden hier ook de boven gemaakte opmerkingen ten opzichte van het gelijk worden der factoren.

Enschedé, November 1876.

EENE STELLING UIT DE THEORIE DER LINEAIRE SUBSTITUTIËN,

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR.

In „Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band XLII," gaf Dr. Otto Hesse in 1851 een bewijs voor de volgende belangrijke stelling.

Indien eene homogene geheele functie u *van* n *veranderlijken* χ_1, $\chi_2, \ldots . \chi_n$ *door eene lineaire substitutie, wier determinante niet nul is, in eene andere van* $(n-1)$ *veranderlijken kan worden getransformeerd, zoo is de determinante*

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots\cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots\cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots\cdots & u_{nn} \end{vmatrix},$$

waarin

$$u_{r,s} = u_{s,r} = \frac{d^2 u}{d\chi_r \, d\chi_s}$$

is, identisch nul; en omgekeerd.

Wanneer u eene functie van den m^{en} graad is, zal bovenstaande determinante — door latere wiskundigen gewoonlijk *„Determinante van Hesse"* genoemd en door H aangeduid — blijkbaar eene homogene geheele functie van den $n(m-2)^{en}$ graad zijn.

In de volgende bladzijden stel ik mij voor, aan deze stelling eenige uitbreiding te geven, en te bewijzen, dat

De determinante H *eener homogene geheele functie van* n *veranderlijken* $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_n$ *identisch zal verdwijnen, evenals al hare onderdeterminanten tot en met die van den* $(n-r+1)^{en}$ *graad, indien de*

gegeven functie door eene lineaire substitutie, wier determinante niet verdwijnt, getransformeerd kan worden in eene dergelijke functie van $(n-r)$ veranderlijken;

en dat omgekeerd,

indien de determinante H eene homogene geheele functie van n veranderlijken, benevens al hare onderdeterminanten tot en met die van den $(n-r+1)^{en}$ graad, identisch nul zijn, terwijl niet alle onderdeterminanten van den $(n-r)^{en}$ graad verdwijnen, deze functie door eene lineaire substitutie, wier determinante niet verdwijnt, in eene functie van $(n-r)$ veranderlijken getransformeerd kan worden.

1. Daar de bewijsgang in ieder geval dezelfde is, nemen we ter wille der eenvoudigheid eene functie van vijf veranderlijken. Veronderstellen wij, dat de substitutiën

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}y_4 + a_{15}y_5,\\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 + a_{25}y_5,\\
x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}y_4 + a_{35}y_5,\\
x_4 &= a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44}y_4 + a_{45}y_5,\\
x_5 &= a_{51}y_1 + a_{52}y_2 + a_{53}y_3 + a_{54}y_4 + a_{55}y_5,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (1)$$

en hare oplossingen

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 + e_{14}x_4 + e_{15}x_5,\\
y_2 &= e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 + e_{24}x_4 + e_{25}x_5,\\
y_3 &= e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 + e_{34}x_4 + e_{35}x_5,\\
y_4 &= e_{41}x_1 + e_{42}x_2 + e_{43}x_3 + e_{44}x_4 + e_{45}x_5,\\
y_5 &= e_{51}x_1 + e_{52}x_2 + e_{53}x_3 + e_{54}x_4 + e_{55}x_5,
\end{aligned}\right\} \quad \ldots (2)$$

de gegeven functie u van x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 transformeeren in eene andere v van de twee veranderlijken y_1 en y_2.

Denken we ons verder in v en hare afgeleiden y_1 en y_2 vervangen door hare waarden uit de formulen (2), dan heeft men

$$u_{rs} = (v_{11}e_{1r} + v_{21}e_{2r})e_{1s} + (v_{12}e_{1r} + v_{22}e_{2r})e_{2s},$$

of, wanneer we stellen

$$f_{1r} = v_{11}e_{1r} + v_{21}e_{2r}, \quad f_{2r} = v_{12}e_{1r} + v_{22}e_{2r},$$

vinden we

$$u_{rs} = f_{1r}e_{1s} + f_{2r}e_{2s}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Deze formule toont duidelijk, op welke wijze de determinante

$$\begin{vmatrix}
u_{\alpha\lambda} & u_{\alpha\mu} & u_{\alpha\nu} & u_{\alpha\sigma}\\
u_{\beta\lambda} & u_{\beta\mu} & u_{\beta\nu} & u_{\beta\sigma}\\
u_{\gamma\lambda} & u_{\gamma\mu} & u_{\gamma\nu} & u_{\gamma\sigma}\\
u_{\delta\lambda} & u_{\delta\mu} & u_{\delta\nu} & u_{\delta\sigma}
\end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

gevormd is uit de beide stelsels a en b

$$a \ldots\ldots \begin{vmatrix} f_{1\alpha} & f_{2\alpha} \\ f_{1\beta} & f_{2\beta} \\ f_{1\gamma} & f_{2\gamma} \\ f_{1\delta} & f_{2\delta} \end{vmatrix} \qquad b \ldots\ldots \begin{vmatrix} e_{1\lambda} & e_{2\lambda} \\ e_{1\mu} & e_{2\mu} \\ e_{1\nu} & e_{2\nu} \\ e_{1\sigma} & e_{2\sigma} \end{vmatrix}$$

Daar nu in a en b 't aantal verticale rijen kleiner is dan dat der horizontale, zal de determinante (4) verdwijnen (Baltzer, Determinanten, § 5, 1).

Geheel op dezelfde wijze toont men aan, dat de determinante H zelve, zoomede eene willekeurige onderdeterminante van den derden graad, verdwijnt, waardoor dus het eerste gedeelte onzer stelling aangetoond is.

2. Daar het bewijs voor het tweede gedeelte der onderhavige stelling minder eenvoudig is dan het voorgaande, splitsen we het in tweeën.

a. Laat in de eerste plaats de determinante H eener homogene geheele functie u van n veranderlijken verdwijnen, terwijl niet al hare onderdeterminanten van den $(n-1)^{en}$ graad nul zijn.

Duiden we verder met $U_{r,s}$ den coëfficient van $u_{r,s}$ in H aan, zoo hebben we wegens het verdwijnen van H de identiteit

$$U_{r,r}\, U_{s,s} = U^2_{r,s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

(Baltzer, Determ., § 6, 5).

Deze betrekking bewijst, dat $U_{r,r}$, $U_{s,s}$, $U_{r,s}$ eenen gemeenschappelijken homogenen factor van den $(n-1)(m-2)^{en}$ graad bevatten. Dien factor hebben dus alle onderdeterminanten

$$U_{1\,1},\quad U_{1\,2},\quad U_{2\,2},\ \ldots\ldots U_{n\,n}$$

gemeen, zoodat men stellen kan

$$U_{1\,1} = \alpha_{1\,1} M,\ U_{1\,2} = \alpha_{1\,2} M,\ U_{2\,2} = \alpha_{2\,2} M,\ \ldots\ldots U_{n\,n} = \alpha_{n\,n} M,$$

waarin $\alpha_{1\,1}$, $\alpha_{1\,2}$, $\alpha_{2\,2}$, ... $\alpha_{n\,n}$ standvastigen aanduiden.

Uit (5) volgt dan, wanneer we door M^2 deelen

$$\alpha_{r\,r}\, \alpha_{s\,s} = \alpha^2_{r\,s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Waren $\alpha_{1\,1}$, $\alpha_{2\,2}$, $\alpha_{3\,3}$, ... $\alpha_{n\,n}$ gelijktijdig nul, zoo zouden volgens (6) alle standvastigen $\alpha_{r\,s}$ verdwijnen, dus ook alle onderdeterminanten $U_{r\,s}$, wat tegen onze veronderstelling strijdt.

Zij dus bijv. $\alpha_{1\,1}$ niet nul, en stellen we

$$\alpha_{1\,1} = \alpha_1\, \alpha_1,\quad \alpha_{1\,2} = \alpha_1\, \alpha_2,\ \ldots\ldots\ \alpha_{1\,n} = \alpha_1\, \alpha_n,$$

't welk geoorloofd is, daar men $\alpha_{1\,1}$ altijd positief kan nemen, zoo volgt uit (6), indien we $r = 1$ stellen,

$$\alpha_{s\,s} = \alpha^2_s, \text{ dus ook } \alpha_{r\,s} = \alpha_r \alpha_s.$$

Laat verder u eene functie van den m^{en} graad zijn, dan gelden de identiteiten

$$\left.\begin{array}{l} u_{1\,1} x_1 + u_{1\,2} x_2 + \ldots\ldots + u_{1\,n} x_n = (m-1) u_1, \\ u_{2\,1} x_1 + u_{2\,2} x_2 + \ldots\ldots + u_{2\,n} x_n = (m-1) u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n\,1} x_1 + u_{n\,2} x_2 + \ldots\ldots + u_{n\,n} x_n = (m-1) u_n. \end{array}\right\} \ldots (7)$$

Tellen we de vergelijkingen (7) samen, na ze respectievelijk met

$$U_{1\,1},\ U_{1\,2},\ U_{1\,3}, \ldots\ldots U_{1\,n}$$

vermenigvuldigd te hebben, zoo vinden we, wijl $H = 0$ is,

$$u_1 U_{1\,1} + u_2 U_{1\,2} + u_3 U_{1\,3} + \ldots\ldots + u_n U_{1\,n} = 0,$$

of, wanneer we door $\alpha_1 M$ deelen

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots\ldots + \alpha_n u_n = 0 \quad \ldots\ldots (8)$$

Met behulp van deze identiteit is 't nu gemakkelijk substitutie-formulen van den vorm

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{1\,1} y_1 + a_{1\,2} y_2 + \ldots\ldots + a_{1\,n} y_n, \\ x_2 = a_{2\,1} y_1 + a_{2\,2} y_2 + \ldots\ldots + a_{2\,n} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n\,1} y_1 + a_{n\,2} y_2 + \ldots\ldots + a_{n\,n} y_n, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (9)$$

te vinden, welke de gegevene functie u in eene andere van $(n-1)$ veranderlijken transformeeren.

Daartoe behoeft men bijv. slechts te stellen

$$a_{1\,2} = \alpha_1,\ a_{2\,2} = \alpha_2,\ a_{3\,2} = \alpha_3, \ldots\ldots a_{n\,2} = \alpha_n$$

om, welke waarden ook de overige substitutie-coëfficienten hebben, eene getransformeerde functie te verkrijgen, waarin y_2 ontbreekt.

Differentieert men namelijk de getransformeerde functie ten opzichte van y_2, zoo vindt men als partieel differentiaal-quotient

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots\ldots + \alpha_n u_n,$$

dat volgens (8) identisch verdwijnt; waardoor onze bewering bewezen is.

Hiermede is dus een bijzonder geval van het tweede gedeelte onzer stelling bewezen, mits nog aangetoond worde, dat de nog onbepaalde elementen der determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_1 & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & \alpha_2 & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \alpha_n & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_n A_n \dots\dots \quad (10)$$

zoo kunnen gekozen worden, dat deze determinante niet verdwijnt.

Daartoe merken we op, dat de elementen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ niet gelijktijdig verdwijnen, en de onderdeterminanten $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ niet van die elementen afhangen.

Was dus de determinante (10) identisch nul, zoo zouden die onderdeterminanten A, wier coëfficienten α niet nul zijn, onafhankelijk van de waarde harer elementen moeten verdwijnen, enz.

b. Nemen we in de tweede plaats aan, dat van eene homogene geheele functie van vijf veranderlijken van den m^{en} graad de determinante H, benevens hare onderdeterminanten van den vierden en derden graad identisch verdwijnen, terwijl die van den tweeden graad niet alle nul zijn; dan zullen wij aantoonen, dat deze functie zich door eene lineaire substitutie, wier determinante niet verdwijnt, op eene van twee veranderlijken laat terugbrengen.

Vooreerst is het duidelijk, dat niet alle symmetrische onderdeterminanten van den tweeden graad van

$$H = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \dots u_{15} \\ u_{21} & u_{22} \dots u_{25} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ u_{51} & u_{52} \dots u_{55} \end{vmatrix}$$

kunnen verdwijnen, daar dit wegens het verdwijnen van alle onderdeterminanten van den derden graad ten gevolge zou hebben, dat alle onderdeterminanten van den tweeden graad identisch nul waren, wat met onze onderstelling strijdt.

Laat bijv. $(u_{11}\, u_{22} - u^2{}_{12})$ van nul verschillen, en noemen wij vervolgens den coëfficient van $u_{r,s}$ in de determinante

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}.$$

$U_{r,s}$, dan bestaan wegens het verdwijnen dezer determinante de identische betrekkingen

$$U_{11}\, U_{33} = U^2_{13},\quad U_{22}\, U_{33} = U^2_{23},$$

waaruit volgt

$$U_{11} = \alpha_{11} M,\ U_{22} = \alpha_{22} M,\ U_{33} = \alpha_{33} M,\ U_{13} = \alpha_{13} M,$$
$$U_{23} = \alpha_{23} M;$$

in welke formulen M eene homogene geheele functie van den $2(m-2)^{en}$ graad is, terwijl α_{11}, α_{22}, α_{33}, α_{13}, α_{23} standvastigen zijn.

Daar U_{33} en dus ook α_{33} niet verdwijnt, en men de laatste grootheid positief kan aannemen, mogen we stellen

$$\alpha_{33} = \alpha_3 \alpha_3,\ \alpha_{23} = \alpha_2 \alpha_3,\ \alpha_{13} = \alpha_1 \alpha_3.$$

Vermenigvuldigen we eindelijk de drie identische betrekkingen

$$u_{11}\chi_1 + u_{12}\chi_2 + u_{13}\chi_3 + u_{14}\chi_4 + u_{15}\chi_5 = (m-1)\,u_1,$$
$$u_{21}\chi_1 + u_{22}\chi_2 + u_{23}\chi_3 + u_{24}\chi_4 + u_{25}\chi_5 = (m-1)\,u_2,$$
$$u_{31}\chi_1 + u_{32}\chi_2 + u_{33}\chi_3 + u_{34}\chi_4 + u_{35}\chi_5 = (m-1)\,u_3,$$

respectievelijk met U_{13}, U_{23}, U_{33} en tellen deze producten samen, zoo vinden we, daar alle determinanten van den derden graad, die men kan vormen door telkens drie verticale rijen te nemen uit het stelsel

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & u_{35} \end{vmatrix}$$

identisch nul zijn,

$$u_1\, U_{13} + u_2\, U_{23} + u_3\, U_{33} = 0,$$

of indien we door $\alpha_3 M$ deelen,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hierbij merken we op, dat behalve α_3 nog een der coëfficienten α niet nul is, daar in het tegengestelde geval u_3 identisch zou verdwijnen, en dus u eene functie van vier en niet van vijf veranderlijken zou zijn, zooals we onderstellen.

Met behulp van de determinanten

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} \end{vmatrix},\qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{51} & u_{52} & u_{53} \end{vmatrix},$$

en van de beide stelsels vergelijkingen

$$u_{11}\chi_1 + \cdots + u_{15}\chi_5 = (m-1)u_1,\quad u_{11}\chi_1 + \cdots + u_{15}\chi_5 = (m-1)u_1,$$
$$u_{21}\chi_1 + \cdots + u_{25}\chi_5 = (m-1)u_2,\quad u_{21}\chi_1 + \cdots + u_{25}\chi_5 = (m-1)u_2,$$
$$u_{41}\chi_1 + \cdots + u_{45}\chi_5 = (m-1)u_4,\quad u_{51}\chi_1 + \cdots + u_{55}\chi_5 = (m-1)u_5,$$

vinden we, geheel op dezelfde wijze,

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_4 u_4 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$
$$\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_5 u_5 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

De beide standvastigen β_4 en γ_5 verdwijnen niet, en voor de andere geldt dezelfde opmerking als die, welke we bij (11) maakten.

Beschouwen we nu de substitutie-formulen

$$\begin{aligned}
x_1 &= \alpha_1 y_1 + \beta_1 y_2 + \gamma_1 y_3 + a_{14} y_4 + a_{15} y_5,\\
x_2 &= \alpha_2 y_1 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 y_3 + a_{24} y_4 + a_{25} y_5,\\
x_3 &= \alpha_3 y_1 + \qquad\qquad\quad + a_{34} y_4 + a_{35} y_5,\\
x_4 &= \qquad\quad \beta_4 y_2 + \qquad\; + a_{44} y_4 + a_{45} y_5,\\
x_5 &= \qquad\qquad\qquad \gamma_5 y_3 + a_{54} y_4 + a_{55} y_5,
\end{aligned}$$

dan toont men weder gemakkelijk aan, dat, in de door middel van deze substitutien getransformeerde functie u, de veranderlijken y_1, y_2 en y_3 ontbreken.

Differentieert men namelijk die functie ten opzichte van y_1, y_2, y_3, zoo verkrijgt men respectievelijk

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3, \quad \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_4 u_4, \quad \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_5 u_5,$$

welke differentiaal-quotienten volgens (11), (12) en (13) nul zijn; waardoor onze bewering bewezen is.

Wat eindelijk het verdwijnen der determinante

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & a_{14} & a_{15}\\
\alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & a_{24} & a_{25}\\
\alpha_3 & . & . & a_{34} & a_{35}\\
. & \beta_4 & . & a_{44} & a_{45}\\
. & . & \gamma_5 & a_{54} & a_{55}
\end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

betreft, zoo blijkt — wanneer we haar in eene som van producten van determinanten van den derden en van den tweeden graad ontbinden [1]), en tevens opmerken, dat niet alle determinanten (15)

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & . & .\\
\beta_1 & \beta_2 & . & \beta_4 & .\\
\gamma_1 & \gamma_2 & . & . & \gamma_5
\end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

verdwijnen, — dat de nog onbepaalde elementen a_{14}, $a_{24} \ldots a_{55}$ zoo kunnen bepaald worden, dat deze substitutie-determinante (14) niet nul is.

Daarmede is dus het tweede gedeelte onzer stelling in hare volle

1) Zie Baltzer, Determ., § 4, 4.

algemeenheid bewezen; want hetgeen hier gezegd is omtrent eene functie van vijf veranderlijken laat zich blijkbaar voor andere homogene functien op soortgelijke wijze aantoonen.

3. Ten slotte laat ik hier eenige toepassingen van bovenstaande stellingen volgen.

Zij

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz = 0 \quad . \quad (1)$$

de vergelijking eener kromme van den tweeden graad in homogene evenwijdige coördinaten.

De noodige en voldoende voorwaarde, onder welke het eerste lid van (1) door eene lineaire substitutie op eene functie van twee veranderlijken kan worden herleid, is volgens 't voorgaande

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

De vraag blijft echter nog te beantwoorden, of deze substitutiën aan eene coördinaten-transformatie beantwoorden, m. a. w. of ze den hier volgenden vorm hebben

$$\left.\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z, \\ y &= bX + b'Y + b''Z, \\ z &= \qquad\qquad\quad Z. \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Om deze moeilijkheid op te lossen, herinneren we ons, dat de substitutie-coëfficienten van die veranderlijke, welke in de getransformeerde functie ontbreekt, evenredig zijn met

$$A_{11},\ A_{21},\ A_{31} \text{ of } A_{12},\ A_{22},\ A_{32} \text{ of } A_{13},\ A_{23},\ A_{33},$$

waar A_{rs} den coëfficient van a_{rs} in H voorstelt.

Indien dan $A_{33} \gtrless 0$ is, neme men

$$a'' = A_{13} : A_{33} \text{ en } b'' = A_{23} : A_{33},$$

dan zal in de getransformeerde functie Z ontbreken.

Is echter $A_{33} = 0$, dus ook $A_{13} = A_{23} = 0$, zoo kan men bijv. X door transformatie laten verdwijnen, indien men a en b met A_{11} en A_{12} — of met A_{21} en A_{22} evenredig neemt.

Verdwijnen behalve H ook nog alle onderdeterminanten van den tweeden graad — waartoe het noodig en voldoende is, dat men heeft

$$H = 0,\quad A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0, -$$

zoo zal men altijd substitutie-formulen van den vorm (3) kunnen vinden, welke 't eerste lid van (1) op eene functie van slechts éene veranderlijke herleiden (zie sub $2b$).

Wanneer we deze opmerkingen samenvatten en meetkundig interpreteeren, vinden we de volgende onderscheidingen omtrent de kromme, die door de vergelijking (1) wordt voorgesteld.

a. $H = 0, \Delta_{33} \gtrless 0$: twee rechte lijnen, die elkaar snijden.

b. $H = 0, \Delta_{33} = 0, \left(\Delta_{22} \text{ of } \Delta_{11} \gtrless 0\right)$: twee evenwijdige lijnen.

c. $H = 0, \Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = 0$: twee samenvallende rechte lijnen.

Behandelen we de algemeene functie van den tweeden graad met vier veranderlijken op dezelfde wijze, zoo vinden we het volgende.

a. Heeft men

$$H = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

zoo kan men de functie

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + a_{44}p^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}xp + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{24}yp + 2a_{34}zp$$

op eene van drie veranderlijken herleiden door middel van substitutiën van den vorm

$$\begin{aligned} x &= aX + a'Y + a''Z + a'''P, \\ y &= bX + b'Y + b''Z + b'''P, \\ z &= cX + c'Y + c''Z + c'''P, \\ p &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad P. \end{aligned}$$

Is daarbij $\Delta_{44} \gtrless 0$, zoo ontbreekt in de getransformeerde functie de veranderlijke P; heeft men daarentegen $\Delta_{44} = 0$, terwijl Δ_{11}, Δ_{22} en Δ_{33} niet gelijktijdig verdwijnen, zoo ontbreekt X, Y of Z in de getransformeerde functie.

b. Opdat de gegeven functie in eene van twee veranderlijken kan worden getransformeerd, is het noodig en voldoende, dat men heeft

$$H = 0, \ \Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{33} = \Delta_{44} = 0.$$

De veranderlijke P zal daarbij in de getransformeerde functie al of niet voorkomen, naarmate de drie onderdeterminanten

$$a_{11}a_{22} - a^2_{12}, \ a_{11}a_{33} - a^2_{13}, \ a_{22}a_{33} - a^2_{23},$$

gelijktijdig verdwijnen of niet (zie sub $2b$).

e. Verdwijnen eindelijk, behalve H, alle symmetrische onderdeterminanten van den tweeden en derden graad, zoo kan men de functie op eene van ééne veranderlijke herleiden.

Deze opmerkingen toegepast op een oppervlak van den tweeden graad, voorgesteld door de vergelijking

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+a_{44}p^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{14}xp+$$
$$+2a_{23}yz+2a_{24}yp+2a_{34}zp=0,$$

leiden tot de volgende onderscheidingen

a. $H=0$, $A_{44}\gtrless 0$: kegel.

b. $H=0$, $A_{44}=0$, (A_{11}, A_{22}, A_{33} verdwijnen niet gelijktijdig) : cilinder.

c. $H=0$, $A_{11}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=0$,

$(a_{11}a_{22}-a^2_{12})$, $(a_{11}a_{33}-a^2_{13})$, $(a_{22}a_{33}-a^2_{23})$ verdwijnen niet gelijktijdig : twee snijdende platte vlakken.

d. $H=0$, $A_{11}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=0$,

niet alle symmetrische onderdeterminanten van den tweeden graad verdwijnen; wel echter de volgende drie

$$(a_{11}a_{22}-a^2_{12}),\quad (a_{11}a_{33}-a^2_{13}),\quad (a_{22}a_{33}-a^2_{23}):$$

twee parallele platte vlakken.

e. $H=0$. Alle symmetrische onderdeterminanten van den tweeden en derden graad verdwijnen : twee samenvallende platte vlakken.

IETS OVER DE SOM DER GELIJKNAMIGE MACHTEN VAN DE WORTELS DER ALGEMEENE TWEEDE-MACHTSVERGELIJKING,

DOOR

Dr. W. KAPTEYN.

Zijn a en b de wortels van de vergelijking

$$x^2 + px + q = 0,$$

en stellen S_m, $S_{m-1} \ldots$ de sommen der m^{de}, $m - 1^{ste}$ .. machten van a en b voor, dan volgt uit de ontwikkelingen

$$(a+b)^{2n} = a^{2n} + 2na^{2n-1}b + \frac{2n(2n-1)}{1.2}a^{2n-2}b^2 + \ldots + \frac{2n(2n-1)..(n+1)}{1.2..n}a^n b^n + b^{2n} + 2nab^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}a^2b^{2n-2} + ..$$

$$(a+b)^{2n+1} = a^{2n+1} + (2n+1)a^{2n}b + \frac{(2n+1)2n}{1.2}a^{2n-1}b^2 + \ldots + \frac{(2n+1)2n..(n+2)}{1.2..n}a^{n+1}b^n + b^{2n+1} + (2n+1)ab^{2n} + \frac{(2n+1)2n}{1.2}a^2b^{2n-2} + .. + \frac{(2n+1)2n..(n+2)}{1.2..n}a^n b^{n+1},$$

na substitutie van $a + b = -p$ en $ab = q$,

$$S_{2n} = p^{2n} - \frac{2n}{1}qS_{2n-2} - \frac{2n(2n-1)}{1.2}q^2S_{2n-4} - .. - \frac{2n(2n-1)..(n+1)}{1.2..n}q^n, \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$S_{2n+1}=-p^{2n+1}-\frac{2n+1}{1}qS_{2n-1}-\frac{(2n+1)2n}{1.2}q^2S_{2n-3}-..+$$

$$+\frac{(2n+1)2n..(n+2)}{1.2..n}q^np \text{ . . . . } (2)$$

Deze formulen geven achtereenvolgens

$$S_2=p^2-\frac{2}{1}q.$$

$$S_4=p^4-4qS_2-\frac{4.3}{1.2}q^2.$$

$$S_6=p^6-6qS_4-\frac{6.5}{1.2}q^2S_2-\frac{6.5.4}{1.2.3}q^3.$$

. . . .

$$S_3=-p^3+3qp.$$

$$S_5=-p^5-5qS_3+\frac{5.4}{1.2}q^2p.$$

$$S_7=-p^7-7qS_5-\frac{7.6}{1.2}q^2S_3+\frac{7.6.5}{1.2.3}q^3p.$$

. . . .

Of na eliminatie,

$$S_2=p^2-2q.$$

$$S_4=p^4-4p^2q+2q^2.$$

$$S_6=p^6-6p^4q+9p^2q^2-2q^3.$$

. . . .

$$S_3=-p^3+3pq.$$

$$S_5=-p^5+5p^3q-5pq^2.$$

$$S_7=-p^7+7p^5q-14p^3q^2+7pq^3.$$

. . . .

Bij onderzoek van de coëfficienten dezer vergelijkingen, schijnen de wetten van opvolging uitgedrukt te kunnen worden als volgt:

$$S_{2n}=p^{2n}-2np^{2n-2}q+\frac{2n(2n-3)}{1.2}p^{2n-4}q^2-$$

$$-\frac{2n(2n-4)(2n-5)}{1.2.3}p^{2n-6}q^3+\frac{2n(2n-5)(2n-6)(2n-7)}{1.2.3.4}p^{2n-8}q^4-..\pm2q^n, \quad (3)$$

$$S_{2n+1}=-p^{2n+1}+(2n+1)p^{2n-1}q-\frac{(2n+1)(2n-2)}{1\,.\,2}p^{2n-3}q^2+$$

$$+\frac{(2n+1)(2n-3)(2n-4)}{1\,.\,2\,.\,3}p^{2n-5}q^3-$$

$$-\frac{(2n+1)(2n-4)(2n-5)(2n-6)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}p^{2n-7}q^4+\ldots\mp(2n+1)pq^n;\quad(4)$$

waarin de bovenste teekens of de onderste gelden, naargelang n even of oneven is.

Berekent men volgens deze laatste formules de waarden van

$$S_{2n-2},\quad S_{2n-4},\;\ldots\; S_2,$$

en van

$$S_{2n-1},\quad S_{2n-3},\;\ldots\; S_3,$$

en substitueert men deze waarden in (1) en (2), dan vindt men na herleiding de formules (3) en (4) terug: derhalve zijn deze laatste geldig voor alle geheele positieve waarden van n.

De wet van afhankelijkheid kan echter ook op meer rechtstreeksche wijze gevonden worden, door S_{2n} en S_{2n+1} af te leiden uit de bekende vergelijkingen

$$a=-\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-4q}),$$

$$b=-\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-4q}).$$

Men vindt dan

$$S_{2n}=\frac{1}{2^{2n-1}}\Big\{p^{2n}+\frac{2n(2n-1)}{1\,.\,2}p^{2n-2}(p^2-4q)+$$

$$+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}p^{2n-4}(p^2-4q)^2+\ldots+(p^2-4q)^n\Big\},$$

$$S_{2n+1}=-\frac{1}{2^{2n}}\Big\{p^{2n+1}+\frac{(2n+1)2n}{1\,.\,2}p^{2n-1}(p^2-4q)+$$

$$+\frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}p^{2n-3}(p^2-4q)^2+\ldots+(2n+1)p(p^2-4q)^n\Big\}.$$

Rangschikt men de laatste twee vergelijkingen volgens de afdalende machten van p, en schrijft men kortheidshalve

$$t^{n|v}=t(t+v)(t+2v)\ldots\ldots(t+\overline{n-1}v),$$

dan veranderen zij in deze

$$S_{2n} = \frac{1}{2^{2n-1}} \Bigg[\left(1 + \frac{(2n)^{2/-1}}{1^{2/1}} + \frac{(2n)^{4/-1}}{1^{4/1}} + \ldots + 1\right) p^{2n} +$$

$$+ \left(\frac{(2n)^{2/-1}}{1^{2/1}} + 2\,\frac{(2n)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n)^{6/-1}}{1^{6/1}} + \ldots + n\right) p^{2n-2}(-4q) +$$

$$+ \left(\frac{(2n)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n)^{6/-1}}{1^{6/1}} + 6\,\frac{(2n)^{8/-1}}{1^{8/1}} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\right) p^{2n-4}(-4q)^2 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Bigg] \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$S_{2n+1} = -\frac{1}{2^{2n}} \Bigg[\left(1 + \frac{(2n+1)^{2/-1}}{1^{2/1}} + \frac{(2n+1)^{4/-1}}{1^{4/1}} + \ldots + 2n+1\right) p^{2n+1} +$$

$$+ \left(\frac{(2n+1)^{2/-1}}{1^{2/1}} + 2\,\frac{(2n+1)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n+1)^{6/-1}}{1^{6/1}} + \ldots + (2n+1)n\right) p^{2n-1}(-4q) +$$

$$+ \left(\frac{(2n+1)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n+1)^{6/-1}}{1^{6/1}} + 6\,\frac{(2n+1)^{8/-1}}{1^{8/1}} + \ldots + (2n+1)\,\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\right) p^{2n-3}(-4q)^2$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Bigg]\ ^{1)} \ldots\ldots (6)$$

Vergelijkt men nu de laatste uitkomsten met de vroeger verkregene (3) en (4), dan volgen hieruit betrekkingen als deze, die gelden voor alle geheele positieve waarden van n.

$$1 = \frac{1}{2^{2n-1}} \left(1 + \frac{(2n)^{2/-1}}{1^{2/1}} + \frac{(2n)^{4/-1}}{1^{4/1}} + \ldots + 1\right),$$

$$2n = \frac{1}{2^{2n-3}} \left(\frac{(2n)^{2/-1}}{1^{2/1}} + 2\,\frac{(2n)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n)^{6/-1}}{1^{6/1}} + \ldots + n\right),$$

$$\frac{2n(2n-3)}{1\,.\,2} = \frac{1}{2^{2n-5}} \left(\frac{(2n)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n)^{6/-1}}{1^{6/1}} + 6\,\frac{(2n)^{8/-1}}{1^{8/1}} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\right),$$

. . . .

$$1 = \frac{1}{2^{2n}} \left(1 + \frac{(2n+1)^{2/-1}}{1^{2/1}} + \frac{(2n+1)^{4/-1}}{1^{4/1}} + \ldots + 2n+1\right).$$

$$2n+1 = \frac{1}{2^{2n-2}} \left(\frac{(2n+1)^{2/-1}}{1^{2/1}} + 2\,\frac{(2n+1)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n+1)^{6/-1}}{1^{6/1}} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (2n+1)\,n\right).$$

$$\frac{(2n+1)(2n-2)}{1\,.\,2} = \frac{1}{2^{2n-4}} \left(\frac{(2n+1)^{4/-1}}{1^{4/1}} + 3\,\frac{(2n+1)^{6/-1}}{1^{6/1}} + \right.$$

$$\left. + 6\,\frac{(2n+1)^{8/-1}}{1^{8/1}} + \ldots + (2n+1)\,\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\right).$$

. . . .

---

1) Wij hebben opzettelijk de verkorte schrijfwijs niet op de laatste termen van ieder gedeelte toegepast, ten einde de regelmaat beter te doen uitkomen.

Behalve deze merkwaardige betrekkingen, kan men uit het voorgaande nog besluiten tot eene oplossing eener differentiaal-vergelijking.

Immers stelt men $a^n + b^n = f(p\,.\,q)$, waarin $f(p\,.\,q)$ eene functie van p en q beduidt, dan is

$$na^{n-1} = \frac{df}{dp}\frac{dp}{da} + \frac{df}{dq}\frac{dq}{da},$$

$$nb^{n-1} = \frac{df}{dp}\frac{dp}{db} + \frac{df}{dq}\frac{dq}{db},$$

terwijl uit $p = -a-b$ en $q = ab$

volgt $\quad \frac{dp}{da} = -1,\ \frac{dp}{db} = -1,\ \frac{dq}{da} = -b,\ \frac{dq}{db} = a.$

Dit gesubstitueerd geeft

$$na^{n-1} = -\frac{df}{dp} + b\frac{df}{dq},$$

$$nb^{n-1} = -\frac{df}{dp} + a\frac{df}{dq},$$

waaruit na vermenigvuldiging ontstaat

$$n^2 q^{n-1} = \left(\frac{df}{dp}\right)^2 + p\,\frac{df}{dp}\cdot\frac{df}{dq} + q\left(\frac{df}{dq}\right)^2.$$

Nu is het wel duidelijk dat hieraan de vroeger gevonden waarde voor S_n, bij voorbeeld

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n \{(p-\sqrt{p^2-4q})^n + (p+\sqrt{p^2-4q})^n\},$$

moet voldoen.

IETS OVER DEN TWEEDE-MACHTSWORTEL UIT EENE VIERLEDIGE WORTELGROOTHEID,

DOOR

D. BIERENS DE HAAN.

1. Toen mij, ter gelegenheid van een geschiedkundig onderzoek, door de welwillendheid van den Hoogleeraar ENSCHEDÉ te *Groningen*, de gelegenheid geboden werd, om eenige handschriften der verschillende Leidsche Professoren VAN SCHOOTEN, den vader en de beide zoons, te onderzoeken, vond ik in een handschrift van FRANCISCUS VAN SCHOOTEN, den vader, gedateerd 5 December 1632, een opstel onder het volgende hoofd.

„*De genesi et Analisy potestatum*

Extraheert den quadraatwortel uit $108-\sqrt{1200}+\sqrt{2000}-\sqrt{60}$.

$$
\begin{array}{lll}
 & 108-\sqrt{1200}+\sqrt{2000}-\sqrt{60} & \\
 & \underline{108-\sqrt{1200}} & \\
 & 864 & \\
 & \underline{108} & \\
 & 11664 & \\
 & \underline{1200} & \\
 & 12864-\sqrt{55987200} & \text{quadraet des eenen deels} \\
\text{substrah.} & \underline{2060-\sqrt{480000}} & \text{quadraet des anderen deels} \\
 & 10804-\sqrt{46099200} & \text{Rest}
\end{array}
$$

$10804 - \sqrt{46099200}$ Rest

10804

43216

86432

10804

116726416

46099200

70627216

$\sqrt{}$ ——

8404

10804	10804
19208	9604
9604	1200

$\sqrt{}$ ——

$98 - \sqrt{1200}$ wortel

Addeert $108 - \sqrt{1200}$ meeste deel

$206 - \sqrt{4800}$ Somme

$103 - \sqrt{1200}$ Helft

103

309

103

10609

1200

9409

$\sqrt{}$ ——

97

103	103	$108 - \sqrt{1200}$ Meeste deel
200	100	$103 - \sqrt{1200}$ substraheert
100	3	5

wortel oft 10 $\quad - \sqrt{3} \quad + \sqrt{5}$

eerste deel — Rest of tweede deel des wortels.

Komt voor den begeerden wortel $10 - \sqrt{3} + \sqrt{5}$."

2. De bewerking zelve is duidelijk; stelkundig kan zij aldus verklaard worden.

De verkregen vorm, indien hij een volkomene tweede macht is, moet tot wortel hebben een drieledige wortelgrootheid $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}$; de tweede macht heeft dan den vorm

$$(a + b + c) - 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} - 2\sqrt{bc},$$

stel nu
$$(a+b+c)-2\sqrt{ab}=p,$$
$$2\sqrt{ac}-2\sqrt{bc}=q,$$
beide bekend uit den gegeven vorm.

Hieruit volgt
$$p^2-q^2=(p+q)(p-q),$$
$$=(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})^2=$$
$$=[(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2]^2=[(a+b-c)-2\sqrt{ab}]^2,$$
dus
$$\sqrt{p^2-q^2}=(a+b-c)-2\sqrt{ab},$$
en daarmede
$$p+\sqrt{p^2-q^2}=2(a+b-2\sqrt{ab}),\quad p-\sqrt{p^2-q^2}=2c,$$
of
$$\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-q^2})=a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,$$
$$\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-q^2})\qquad\qquad=c$$

De gezochte wortel is dus
$$\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}=\sqrt{\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-q^2})}+\sqrt{\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-q^2})}.$$

Hierbij valt op te merken, dat de gegeven vorm geen volkomen vierkant is, als

1°. p^2-q^2 niet een volkomen vierkant is,

of zoo dit wel het geval is, indien dan

2°. $\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2-q^2})$ of $\frac{1}{2}(p-\sqrt{p^2-q^2})$ geen volkomen vierkanten zijn.

In beide gevallen moet men dus de bewerking staken.

REGISTER, NAAR DE ONDERWERPEN GERANGSCHIKT, OP EENIGE WISKUNDIGE TIJDSCHRIFTEN.

ANALYTISCHE MEETKUNDE OP HET PLAT VLAK.

GR. ARCH. B. 59, S. 83—86. Bemerkung über Symmetriekegelschnitte des Dreiecks. Von *E. Hain.*

id. S. 87—92. Beziehungen eines Dreiecks zu einer Geraden. Von *E. Hain.*

id. S. 426—444. Untersuchungen über die binären lateralen Geraden. Von *F. E. Thieme.*

N. CORR. M. T. 1, p. 54—61. Sur la théorie des transformations birationnelles planes en général. Par *P. Mansion.*

id. T. 2, p. 153, 154. Question 93. Par *L. Leboeuf.*

id. p. 155, 156. Question 52. Par *van Aubel.*

id. p. 216. Question 11. Par *J. Neuberg.*

id. p. 225—232, 257—263, 289—295. Principes de géométrie tricirculaire et tétrasphérique. Par M. *E. Lucas.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 278—286. Ueber ein besonderes Linearcoördinatensystem. Von *K. Schwering.*

id. S. 301—324. Das System der polaren Linearcoördinaten in der Ebene. Von *J. Th. Weinmeister.*

BULL. M. T. 8, p. 234—246. Sur un nouvel élément fondamental de la géométrie analytique du plan. Par M. *A. Clebsch.*

id. T. 9, p. 163—169. Application de la méthode et correspondance à des questions de grandeur de segments sur les tangentes des courbes. Par M. *Chasles.*

id. p. 205—213. Théorèmes dans lesquels entre une condition d'égalité de deux segments rectilignes. Par M. *M. Chasles.*

ANALYTISCHE MEETKUNDE IN DE RUIMTE.

GR. ARCH. B. 59, S. 59—64. Ein Theorem über die conforme Abbildung der Flächen auf Ebenen. Von *R. Hoppe.*

J. V. CR. B. 82, S. 1—20. Ueber Systeme und Gewebe von algebraischen Flächen. Von *Th. Reye.*

id. S. 54—83. Ueber lineare Systeme und Gewebe von Flächen zweiten Grades. Von *Th. Reye.*

J. V. CR. B. 82, S. 145—157, 348. Ueber ein dreifach orthogonales Flächensystem, gebildet aus gewissen Flächen vierter Ordnung. Von *A. Wangerin.*

id. S. 173—206. Ueber die reciproke Verwandtschaft von F^2 Systemen und Φ^2 Geweben und die quadratischen F^2 Systeme achter Stufe. Von *Th. Reye.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 373—401. Zur Theorie des Krümmungsmaasses von Mannigfaltigheiten höherer Ordnungen. Von *R. Beez.*

N. A. DE M. T. 15, p. 251—263, 292—317, 339—354, 451—464, 481—496, 529—545. Théorie des indices. Par M. *Faure.*

id. p. 511, 512. Question 65. Par M. *A. Laisant.*

id. p. 519—528. Question 1157. Par M. *H. Durrande.*

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

J. DE L. T. 19, p. 113—156. Mémoire sur l'enseignement des arts graphiques. Par M. *de la Gournerie.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 81—99. Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective. Von *G. Hauck.*

BOL.

J. V. CR. B. 82, S. 31—44. Ueber die Brechung eines Lichtstrahls durch ein Linsensystem. Von *H. Zinchen gen. Sommer.*

N. A. DE M. T. 15, p. 183, 184. Question 578. Par M. *H. Brocard.*

CINEMATICA.

N. CORR. M. T. 1, p. 36—41. Note sur les axes instantanés glissants et les axes centraux, dans un corps solide en mouvement. Par *J. M. de Tilly.*

id. T. 2, p. 129—135. Les compas composés de Peaucellier, Hart et Kempe. Par *P. Mansion.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 540—553. The Theory of screws: a study in the Dynamics of a Rigid Body. By *R. Stawell Ball.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 286—294. Ueber die geometrische Darstellung der Zustandsveränderung eines Körpers durch die Wärme nach der mechanischen Wärmetheorie. Von *G. R. Dahlander.*

ANN. EC. NORM. T. 5, p. 245—274. Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoidal d'un corps solide. Par M. *P. Appell.*

N. A. DE M. T. 15, p. 58—61. Démonstration nouvelle du théorème de Coriolis. Par M. *F. Lucas.*

id. p. 497—501. Note sur l'origine de l'idée de la Cinématique. Par M. *Liguine.*

BULL. MATH. T. 9, p. 281—288. Sur la composition des forces en statique. Par M. *G. Darboux.*

id. T. 11, p. 233—240. Formules fondamentales de cinématique dans les espaces de courbure constante. Par M. *E. Beltrami.*

CIRKEL.

GR. ARCH. B. 59, S. 448. Eine Quadratur. Von *K. Zahradnik.*
N. ARCH. Dl. 2, blz. 180—185. De cirkels, welke drie gegeven cirkels onder gelijke hoeken snijden. Door *F. van Wageningen Jr.*
N. CORR. M. T. 1, p. 1, 2. Problème sur le cercle. Par *P. Mansion.*
id. p. 26—28. Concours général de 1877 (France). Question de mathématiques élémentaires. Par *Neuberg.*
id .p. 117—119. Sur un lieu géométrique. Par *E. C.*
id. p. 198—200. Question 34. Par *E. C.*
id. T. 2, p. 61, 62. Question 62. Par *Tesch.*
id. p. 156, 157. Question 53. Par *van Aubel.*
id. p. 185, 186. Question 70. Par *van Aubel.*
id. p. 187, 188. Question 75. Par *van Aubel.*
id. p. 219, 220. Question 80. Par *J. Neuberg.*
id. p. 250. Question 35. Par *J. Neuberg.*
id. p. 316. Question 110. Par *J. B. Banzin.*
id. p. 360, 361. Question 73. Par *H. Schoentjes.*
id. p. 399, 400. Question 175. Par *E. Guillet.*
SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 443—448. Eine analytische Auflösung der Aufgabe von Apollonius. Von *Mertens.*
N. A. DE M. T. 15, p. 160—165. Formules proposées par M. Desboves. Démonstration de M. *E. Barinier.*
id. p. 205—207. Sur la relation de Möbius, qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle. Par M. *E. Lucas.*
id. p. 210—212. Concours d'admission à l'Ecole centrale (1875, Octobre). Par M. *P. Barbarin.*
id. p. 284—286. Question 1198. Par M. *L. Goulin.*
id. p. 286, 287. Question 1202. Par MM. *Paul* et *Marechal.*
id. p. 318—321. Question proposée au concours général de mathématiques élémentaires (1875). Par M. *Aubert.*

CONSTANTEN (MERKWAARDIGE).

J. V. CR. B. 81, S. 93—95. Extrait d'une lettre de M. *Hermite.*
id. S. 290—294. Ueber eine Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen. Von *Stern.*
N. CORR. M. T. 1, p. 121—123. Sur la formule du binome à propos d'une Note de M. Janni. Par *E. Catalan.*
id. T. 2, p. 24—29. Sur les nombres polyédraux. Par M. *Charlier.*
id. p. 72. Un développement de $\frac{2}{\pi}$.
id. p. 328—338. Sur le calcul symbolique des nombres de Bernoulli. Par M. *E. Lucas.*
N. A. DE M. T. 15, p. 12—19. Sur les nombres de Bernoulli. Par M. *Worontzoff.*
id. p. 497—499. Sur les rapports qui existent entre le triangle arithmétique de Pascal et les nombres de Bernoulli. Par M. *E. Lucas.*

CONSTRUCTIE (MEETKUNDIGE).

N. CORR. M. T. 1, p. 87, 88. Construction des racines réelles d'une équation de quatrième ou de troisième degré au moyen d'une parabole fixe. Trisection de l'angle.

id. T. 2, p. 14, 15. De la trisection de l'angle, au moyen du compas. Par M. *E. Lucas.*

N. A. DE M. T. 15, p. 8, 9. De la trisection de l'angle à l'aïde du compas sphérique. Par M. *E. Lucas.*

DETERMINANTEN.

GR. ARCH. B. 59, S. 130—146. Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten. Von *S. Günther.*

id. S. 387—400. Beitrag zur Theorie der Unterdeterminanten. Von *F. Hoza.*

id. S. 401—403. Ueber Unterdeterminanten einer adjungirten Determinante. Von *F. Hoza.*

id. S. 403—406. Ueber das Multiplicationstheorem zweier Determinanten n ten Grades. Von *F. Hoza.*

N. CORR. M. T. 1, p. 100—104, 105—111, 148—155, 179—192. Principes de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon. Par M. *P. Mansion.*

id. T. 2, p. 209—212. Théorie des déterminants. Par M. *H. Brocard.*

J. V. CR. B. 82, S. 207—211. Ueber die Determinanten, deren correspondirende Elementen a_{pq} und a_{qp} entgegengesetzt gleich sind. Von *F. Mertens.*

CL. M. ANN. B. 10, S. 547—568. Ueber die algebraischen Formeln, deren Hesse'schen Determinante identisch verschwindet. Von *P. Gordan* und *M. Nother.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 134—137. Zur Construction einer unimodularen Determinante. Von *K. Weihrauch.*

DIFFERENTIAAL-REKENING.

N. CORR. M. T. 2, p. 54, 55. Sur une formule de M. Delaunay. Par M. *M. Hermite.*

id. p. 61. Question 64. Par M. *Laisant.*

id. p. 103—105. Sur une formule analogue à celle de Leibniz. Par *P. Mansion.*

CL. MATH. ANN. B. 9, S. 371—424. Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten. Von *A. Harnack.*

id. B. 10, S. 287, 288. Lettre de M. *Ch. Hermite.*

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN.

J. V. CR. B. 81, S. 1—32. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. (Fortsetzung B. 78, S. 244). Von *L. W. Thomé.*

id. S. 33—61. Beitrag zur Theorie der Biegung des Kreiscylinders. Von *L. Pochhammer.*

J. V. CR. B. 81, S. 97—142. Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie. Von *L. Fuchs.*

id. S. 243—280. Zur Theorie der Integration eines Systems von n linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und n abhängigen Veränderlichen. Von *Hamburger.*

id. B. 82, S. 158—164. Zusatz zu der Abhandlung über Kugelfunctionen S. 86 des 80 Bandes. Von *L. Schendel.*

id. S. 230—315. Ueber das Pfaffsche Problem. Von *Frobenius.*

GR. ARCH. B. 59, S. 334, 335. Note über lineare Differential-Gleichungen. Von *S. Spitzer.*

N. CORR. M. T. 2, p. 282—285. Question 116. Par *H. Brocard.*

id. p. 394, 395. Question 160. Par M. *H. B.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 245—296. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von *S. Lie.*

id. S. 347—370. Ueber die Weiler'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Von *A. Mayer.*

J. DE L. T. 2, p. 158—160. Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. Par M. *L. Fuchs.*

id. p. 257—290, 371—407. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace. Par M. *Halphen.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 75—79. Ueber Flächen von gegebenen Eigenschaften. Von *Schlömilch.*

id. S. 100—105. Ein Fall, in welchem die Differentialgleichung
$$x(1-x)(1-kx)y''' + (x + vx + wkx^2)y'' + (r + \omega' kx)y' + \omega'' ky = 0,$$
integrirt werden kann. Von *J. Thomae.*

ANN. EC NORM. T. 5, p. 49—82. Conditions d'intégrabilité des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre, et renfermant un nombre quelconque de variables indépendantes. Par M. *J. Collet.*

N. A. DE M. T. 15, p. 30—36. Question 1070. Par M. *C. Moreau.*

id. p. 49—58. Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre. Par M. *Laguerre.*

id. p. 61—63. Remarque sur la note de M. Floquet relative à l'intégration de l'équation d'Euler. Par M. *Escary.*

id. p. 76, 77. Question de licence (Novembre 1874). Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 167—170. Question de licence ès sciences mathématiques. Par M. *J. Graindorge.*

BULL. MATH. T. 8, p. 249—255. Sur la première méthode donnée par Jacobi, pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Par M. *G. Darboux.*

id. T. 10, p. 149—159. Sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles. Par M. *R. Lipschitz.*

id. T. 11, p. 87—96, 125—144. Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différences totales, et sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux différences partielles. Par M. *A. Mayer.*

id. p. 162—183. Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complètement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux derivées partielles. Par M. *V. Imschenetzky.*

DRIEHOEKSMETING.

N. CORR. M. T. 2, p. 362. Question 130. Par M. *B. Nieuwenglowski.*

N. A. DE M. T. 15, p. 184—186. Question 1170. Par M. *Pravaz.*

id. p. 263—269. Question de mathématiques élémentaires proposé au Concours d'Agrégation (Année 1875). Par *Anonyme.*

ELIMINATIE.

N. A. DE M. T. 15, p. 385—416, 433—451. Mémoire sur l'élimination d'une variable entre deux équations algébriques. Par M. *Cauchy.*

BULL. MATH. T. 10, p. 56—64. Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue. Par M. *G. Darboux.*

ELLIPTISCHE FUNCTIEN.

J. V. CR. B. 81, S. 81—92. Ueber die Reduction des elliptischen Integrals $\int (Sin\,am\,u)^{2r} du$. Von *J. Thomae.*

id. S. 220—228. Extrait d'une lettre à M. L. Königsberger sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable. Par M. *Ch. Hermite.*

id. S. 229. Correction of two numerical Errors in Sohnke's paper respecting modular equations. By Mr. *A. Cayley.*

id. S. 301—323. Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem. Von *M. Simon.*

id. B. 82, S. 343—347. Extrait d'une lettre de M. *Ch. Hermite.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 554—572. Ueber die Discriminante der Modulargleichungen der elliptischen Functionen (Fortsetzung). Von *M. Krause.*

J. DE L. T. 2, p. 411—419. Extrait d'une lettre à M. Hermite, relative à l'application des fonctions elliptiques à la théorie des perturbations. Par M. *H. Gylden.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 133, 134. Bemerkung zu der Curve $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$. Von *K. Schwering.*

id. S. 144—177. Ueber die bewegung eines Punktes auf einer Kugel unter Einwirkung von Kräften in einer Meridianebene mit dem Potential $Ax_1^2 + Bx_2^2 + Bx_3^2$. Von *J. E. Böttcher.*

id. S. 442, 443. Eine einfache Darstellungsform der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung. Von *A. Radicke.*

ANN. EC. NORM. T. 5, p. 355—398. Exposition de la méthode de M. Gylden, pour le développement des perturbations des comètes. Par M. *B. Baillaud.*

FUNCTIEN (THEORIE DER).

J. V. CR. B. 81, S. 217—219. Sur la fonction génératrice de Borchardt. Par M. *Faa de Bruno.*

id. B. 82, S. 21—30. Ueber unstetige Lösungen in der Variationsrechnung. Von *G. Erdmann.*

J. V. CR. B. 82, S. 45, 46. Ueber einen von Abel aufgestellten die algebraischen Functionen betreffenden Lehrsatz. Von *L. Stickelberger.*

GR. ARCH. B. 59, S. 98—101. Product einer unendlicher Factorenreihe. Von *G. Dobiciecki.*

N. ARCH. Dl. 2, blz. 1—39, 113—134. Theorie der functiën van veranderlijke complexe getallen. Door *A. Benthem Gzn.*

id. blz. 73—75. Beschouwing over symmetrische functiën. Door *W. Kapteyn.*

id. blz. 135—149. Theorie der quaternionen. Door *J. Versluys.*

id. blz. 150—160. Iets over de „Théorie des fonctions de variables imaginaires, par M. Maximilien Marie." Door *D. Bierens de Haan.*

N. CORR. M. T. 2, p. 240—243. Sur une propriété de la fonction $e^{\sqrt{x}}$. Par M. *J. W. L. Glaisher.*

id. p. 274—276. Sur une question paradoxale. Par M. *A. Laisant.*

id. p. 279, 280. Remarques sur la note de M. Glaisher. Par M. *C. La Paige.*

id. p. 349, 350. Extrait d'une lettre de M. *Glaisher.*

id. p. 340—353. Extrait d'une lettre de M. *De Marcilly.*

id. p. 369—372. Sur de prétendues questions paradoxales. Par M. *P. Mansion.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 166—182. Ueber die singulären Werthsystheme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve. Von *M. Nöther.*

id. S. 333—346. Ueber die v. Staudtischen Würfe. Von *R. Sturm.*

id. S. 425—444. Ueber einen mit den Bessel'schen Functionen verwandte Function. Von *E. Lommel.*

id. B. 10, S. 289—317. Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe. Von *E. Schröder.*

id. S. 376—378. Notiz über infinitäre Gleichheiten. Von *P. du Bois-Reymond.*

J. DE L. T. 2, p. 155—157. Lettre adressée à M. Résal. Par M. *Heine.*

id. p. 240. Lettre à M. Résal. Par M. *Darboux.*

id. p. 420. Extrait d'une lettre adressée à la redaction. Par M. *H. Laurent.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 178—191. Ueber afsteigende Kettenbrüche. Von *S. Günther.*

GEOMETRIA SITUS.

N. CORR. M. T. 2, p. 193—201. Sur les carrés magiques. Par M. *P. Mansion.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 476—482. Ueber den Zusammenhang der Flächen. Von *F. Klein.*

id. B. 10, S. 398—416. Ueber eine neue Art von Riemann'schen Flächen. Zweite Mittheilung. Von *F. Klein.*

GESCHIEDENIS.

N. ARCH. Dl. 2, blz. 102—112. Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, von Dr. Hermann Hankel. Leipzig, Teubner. 1874. Door *J. de Jong.*

id. bl. 193—206. Johannes Bernoulli en zijn strijd over het beginsel der levende krachten. Door *P. van Geer.*

N. CORR. M. T. 1, p. 163, 164. W. J. M. Rankine. Par *P. M.*

N. CORR. M. T. 1, p. 210, 211. O. Hesse. Par *P. M.*
id. p. 211. B. Tortolini. Par *P. M.*
id. T. 2, p. 110—114. Biographie de Jean Wilson. Par M. *Glaisher.*
id. p. 161—164. Sur les carrés magiques. Par M. *P. Mansion.*
id. p. 218, 281. Extrait d'une lettre de M. *Mansion.*
SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 452. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Von *L. Boltzmann.*
id. Hist. Lit. A, S. 1—4. C. G. Reuschle. Von *P. Zech.*
id. S. 25—30. Recension von „*P. Treutlein.* Geschichte unserer Zahlzeichen und Entwickelung der Ansichten uber dieselbe." Von *S. Günther.*
id. S. 37—42. Recension von „*G. J. Gerhardt.* Die Sammlung des Pappus von Alexandrien." Von *Cantor.*
id. S. 57—64. Mathematisch-historische Miscellen (I, II). Von *S. Günther.*
id. S. 70—80. Recension von „Fr. Hultsch Pappi Alexandrini Collectiones." Von *Cantor.*
id. S. 85—96. Recension von „Betti, Copernico e le vicende." Von *A. Favaro.*
id. S. 125—150. Die Chorographie des Joachim Rheticus. Von *F. Hipler.*
id. S. 157—165. Adolph Zeising als Mathematiker. Von *S. Günther.*
BULL. MATH. T. 8, p. 272—287. Sur la vie et les travaux de Mgr. Barnabe Tortolini. Par *V. Dionis.*
id. p. 297—303. T. 9, p. 38—47, 51—95, 126—142. Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. Par M. *Borchardt.*
id. p. 188—191. Liste des travaux de M. Painvin.
id. T. 10, p. 209—242. Sur H. Hankel, „Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874." Par *J. H(ouel).*
id. T. 11, p. 49—74. Sur „Joh. Kepleri Astronomi opera omnia. Ed. *C. Fusch.* Stuttg. 8 Vol. 1858—1871." Par *H. B.*

GETALLEN-LEER.

N. CORR. M. T. 1, p. 2—12. Sur quelques propriétés des fractions périodiques. Par M. *P. M.*
id. p. 81—83. Sur les fractions décimales périodiques. Par M. *P. Mansion.*
id. p. 92. Question 13. Par M. *Médulfus.*
id. p. 94. Question 14. Par M. *Médulfus.*
id. p. 132—134. Question 24. Par *E. C.*
id. T. 2, p. 54—58. Lettre sur la Question 65. Par *P. S.*
id. p. 85—87. Théorèmes d'Arithmétique. Par *P. M.*
id. p. 97—101. Sur un théorème d'Euler, relatif aux carrés magiques. Par M. *E. Lucas.*
id. p. 101, 102. Sur la théorie des nombres. Par M. *E. Lucas.*
id. p. 179, 180. Sur un théorème d'arithmétique. Par *E. C.*
id. p. 180, 181. Sur les nombres parfaits. Par *P. M.*
id. p. 233—239, 266—272. Démonstration de la loi de réciprocité des résidus quadratiques. Par M. *P. Mansion.*
id. p. 246, 247. Sur un théorème de Diophante. Par M. *H. B.*
id. p. 341. Remarque sur un théorème d'arithmétique. Par M. *Laisant.*

J. DE L. T. 2, p. 313—324. Etude sur la théorie des résidus cubiques. Par M. *P. Pepin S. J.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 79, 80. Sätze über die Darstellbarkeit einer Zahl als Summe von Quadratzahlen. Von *V. Schlegel.*

id. S. 227, 228. Ueber eine zahlentheoretische Spielerei. Von *F. Müller.*

id. S. 365, 366. Theilbarheit einer gegebenen Zahl durch eine andere. Von *V. Schlegel.*

id. S. 366—370. Ueber die Theilbarheit der Zahlen. Von *P. Otte.*

N. A. DE M. T. 15, S. 46—48. Question 1180. Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 330. Question 1075. Par M. *H. Brocard.*

BULL. MATH. T. 10, p. 13—32. Théorie des dérivées numériques. Par *N. V. Bougaief.*

id. T. 11, p. 278—288. Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Par M. *R. Dedekind.*

GONIOMETRISCHE FUNCTIEN.

N. CORR. M. T. 1, p. 91. Question 2. Par M. *van den Broeck.*

id. T. 2, p. 244—246. Sur un produit de Sinus. Par *E. C.*

GROOTSTE OF KLEINSTE WAARDE.

N. CORR. M. T. 1, p. 41—43. Questions de maximum et de minimum. Par *J. Neuberg.*

id. p. 95. Question 23. Par *Paulet.*

id. p. 193, 194. Sur une question de maximum, appelée problème d'Huygens. Par *P. Mansion.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 137—139. Ueber die einem Dreieck eingeschriebene und die umschriebene Ellipse. Von *J. Thomae.*

HOMOGENE FUNCTIEN.

CL. M. ANN. B. 9, S. 183—208. Ueber binäre Formen mit linearen Transformationen in sich selbst. Von *F. Klein.*

id. S. 209—217. Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen. Von *L. Wedekind.*

id. S. 218—240. Zur Theorie der ternären cubischen Formen. Von *A. Harnack.*

J. DE L. T. 2, p. 177—232. Mémoire sur les covariants des formes binaires. Par M. *C. Jordan.*

INTEGRAALREKENING.

J. V. CR. B. 81, S. 193—216. Ueber die allgemeinsten Beziehungen zwischen hyperelliptischen Integralen. Von *Königsberger.*

id. B. 82, S. 131—144. Ueber die Transcendenten zweiter und dritter Gattung bei den hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Von *H. Weber.*

id. S. 165—172. Zur Theorie der Gamma-function. Von *F. E. Prym.*

GR. ARCH. B. 59, S. 193—216. Beitrag zur Kenntniss von der Bewegung eines schweren Punktes auf Rotationsflächen mit verticaler Axe. Von *H. Bertram.*

id. S. 329—333. Ein Beitrag zur mechanischen Quadratur. Von *Ligowski.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 445—475. Zur Transformation zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. Von *A. Pringsheim.*

id. S. 487—503. Ueber die Entwicklung der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in Reihen. Von *L. Königsberger.*

id. B. 10, S. 365—397. Ueber den Verlauf der Abel'schen Integrale bei den Curven vierten Grades. Von *F. Klein.*

id. S. 431—445. Zusätze zur Abhandlung: Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourier'schen Darstellungsformeln. Von *P. du Bois-Reymond.*

ANN. EC. NORM. T. 5, p. 399—444. Détermination du nombre des intégrales abéliennes de première espèce. Par M. *Elliot.*

N. A. DE M. T. 15, p. 241—251. Simplification de la méthode d'interpolation de Thomas Simpson. Par M. *H. Parmentier.*

INTEGRALEN (BEPAALDE).

GR. ARCH. B. 59, S. 218—224. Ueber einige bestimmte Integrale. Von *E. Liebrecht.*

N. CORR. M. T. 1, p. 12, 13. Remarque sur l'intégrale $I = \int_0^\pi l(1 - 2a \, Cos \, x + a^2) dx$. Par *E. Catalan.*

id. p. 19—24. Démonstration d'un théorème de Liouville. Par *P. Mansion.*

id. p. 33—35. Sur l'intégrale $\int_0^\pi \left(\frac{Sin^2 x}{1 - 2a \, Cos \, x + a^2}\right)^m dx$. Par M. *Ch. Hermite.*

id. p. 73—75. Sur l'intégrale $\int_0^\pi \left(\frac{Sin^2 x}{1 - 2a \, Cos \, x + a^2}\right)^m dx$. Par M. *J. W. L. Glaisher.*

id. T. 2, p. 313, 314. Sur l'intégrale $\int_0^\pi l(1 - 2a \, Cos \, x + a^2) dx$. Par M. *Delaunay.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 142—144. Ueber die Kriterien der Maxima und Minima bestimmter Integrale. Von *Mertens.*

id. S. 224—227. Zur Definition des bestimmten Integrals durch den Grenzwerth einer Summe. Von *J. Thomae.*

id. S. 449, 450. Ueber die unvollständige Gammafunction. Von *Hocenar.*

BULL. MATH. T. 8, p. 43—55, 148—159. Mémoires sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. Par M. *A. L. Cauchy.*

KEGELSNEDEN.

N. CORR. M. T. 1, p. 14—19. Sur un nouveau mode de génération des coniques. Par M. *A. Transon.*

id. p. 28, 29. Sur le théorème de Dandelin. Par *A. Transon.*

id. p. 76—80. Equations focales des coniques, en coordonnées tangentielles. Par M. *J. Neuberg.*

KROMME LIJNEN (THEORIE).

N. ARCH. Dl. 2, blz. 76—96. Prijsvraag N°. 7 (over de Hodograaph). Door *G. Schouten.*

N. CORR. M. T. 1, p. 48—53. Sur certaines courbes, quarrables algébriquement. Par M. *P. Mansion.*

id. p. 84—86. Sur les développées des courbes planes. Par *P. M.*

id. p. 175—178. Sur les asymptotes des courbes algébriques. Par M. *E. Catalan.*

id. T. 2, p. 23, 24. Sur un problème rélatif aux courbes planes. Par M. *Laisant.*

id. p. 49—53. Sur les asymptotes des courbes algébriques. Par M. *de Tilly.*

id. p. 120, 121. Extrait d'une lettre de M. *Nieuwenglowski.*

id. p. 146—152. Lettres de M. *Nieuwenglowski* et de M. *de Tilly.*

id. p. 165—173. Sur la construction des normales à quelques courbes et à quelques surfaces. Par M. *E. Ghijsens.*

id. p. 174, 175. Sur deux formules relatives à la théorie des courbes planes. Par *P. M.*

id. p. 178. Quelques théorèmes sur la courbure des lignes. Par *E. C.*

id. p. 182, 183. Extrait d'une lettre de M. *Paturet.*

id. p. 217, 218. Question 95. Par *E. Guillet.*

id. p. 307, 308. Sur la théorie des enveloppes. Par M. *P. M.*

id. p. 321—328. Sur les courbes unicursales, considérées comme des cissoïdes. Par M. *P. Mansion.*

id. p. 358—360. Question 71. Par *H. Schoentjes.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 1—54. Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades. Von *A. Harnack.*

id. S. 163—165. Beweis eines Satzes über rationale Curven. Von *J. Lüroth.*

id. B. 10, S. 1—116. Beiträge zur abzählenden Geometrie. Von *H. Schubert.*

id. S. 189—198. Ueber die Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven. Von *A. Harnack.*

id. S. 199—209. Eine neue Relation zwischen den Singularitäten einer algebraischen Curve. Von *F. Klein.*

id. S. 210—220. Sur les singularités des courbes planes. Par *H. G. Zeuthen.*

id. S. 221—226. Ueber dreipunktig berührende Curven einer dreifach unendlichen Schaar. Von *H. Krey.*

J. DE L. T. 2, p. 87—144. Sur une série de courbes analogues aux développées. Par M. *Halphen.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 130—133. Bestimmung der Anzahl der Doppeltangenten ebener Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. Von *K. Scherer.*

id. S. 139—141. Ueber Fusspunktcurven. Von *G. Reuschle.*

ANN. DE M. T. 15, p. 126, 127. Note sur les courbes planes d'ordre n à point multiple d'orde $n-1$. Par M. *B. Nieuwenglowski.*

id. p. 558, 559. Question 1215. Par M. *Genty.*

BULL. MATH. T. 11, p. 183—192. Sur le plan osculateur aux cubiques gauches. Par M. *Tannery.*

KROMME LIJNEN (BIJZONDERE).

GR. ARCH. B. 59, S. 335, 336. Beitrag zur Theorie der Cissoide. Von *K. Zahradnik.*
id. S. 337—350. Theorie der Kardioide. Von *K. Zahradnik.*
N. CORR. M. T. 1, p. 86, 87. Les cubiques unicursales sont des cissoides. Par *P. M.*
id. p. 119—121. Theorèmes sur les courbes et les surfaces du troisième ordre. Par M. *L. Saltel.*
id. p. 124—132. Question 21. Par M. *L. Philippin.*
id. p. 196—198. Question 22.
id. T. 2, p. 89. Question 27. Par M. *L. Philippin.*
id. p. 120. Sur les courbes cissoïdales. Par *P. M.*
id. p. 124—126. Question 63. Par *E. C.*
id. p. 358. Question 113. Par *J. N.*
id. p. 373—384. Roulettes de coniques. Par M. *H. Brocard.*
id. p. 392, 393. Question 130. Par M. *H. Brocard.*
SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 128, 129. Zur elementaren Behandlung der Cyloiden. Von *G. Holzmüller.*
N. A. DE M. T. 15, p. 97—108. Note sur les courbes que représente l'équation $\varrho^{*} = A \operatorname{Sin} n\omega$. Par M. *Haton de la Goupillière.*
id. p. 170—174. Solution de la question de concours d'admission à l'Ecole Normale Supérieure (1875). Par M. *Moret-Blanc.*
id. p. 174—177. Solution de la question de mathématiques spéciales, proposée au concours d'admission à l'Ecole Polytechnique. Par M. *Gambey.*
id. p. 228, 229. Question 1182. Par M. *Pravaz.*
id. p. 337—339. Construction de la tangente en un point de la Quadratrice. Par M. *H. Résal.*
id. p. 547, 548. Question 1199. Par M. *H. Jacob.*
id. p. 549, 550. Question 1200. Par M. *Moret-Blanc.*
id. p. 550—555. Question 1207. Par M. *Dewulf.*

KROMME LIJNEN VAN DUBBELE KROMMING.

N. CORR. M. T. 1, p. 155—158. Note sur les arcs de courbes sphériques. Par M. *B. Nieuwenglowski.*
CL. M. ANN. B. 9, S. 483—486. Die Curve vierpunktiger Berührung auf einer algebraischen Fläche. Von *A. Voss.*
SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 229—264. Ueber Curven auf Rotationsflächen (Fortsetzung) Von *Biehringer.*

NEDERLANDSCHE WIS- EN NATUURKUNDIGE BIBLIOGRAPHIE.

Het stelsel-Verseput, door Dr. P. VAN GEER. Rotterdam, *Nijgh en van Ditmar*. 1877.

Algemeene Sterftetafel der Nationale Levensverzekerings-bank te Rotterdam (door D. J. A. SAMOT). 1875.

Cursus voor Differentiaalrekening, door Dr. G. A. OSKAMP. Gorinchem, *J. Noorduyn en Zoon*. 1877.

Het invoeren van nieuwe veranderlijken in differentiaal-vormen en integralen, door C. L. LANDRÉ. Utrecht, *Gebr. van der Post*. 1877.

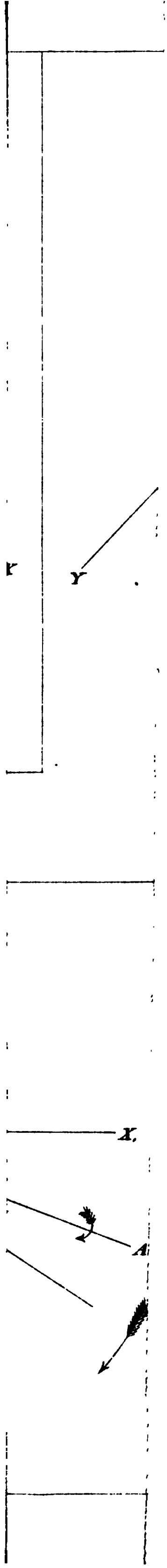
De potentiaal-theorie in hare eenvoudigste toepassingen op de Electriciteit, door V. C. L. M. E. FRACKERS. Leiden, *S. C. van Doesburgh*. 1877.

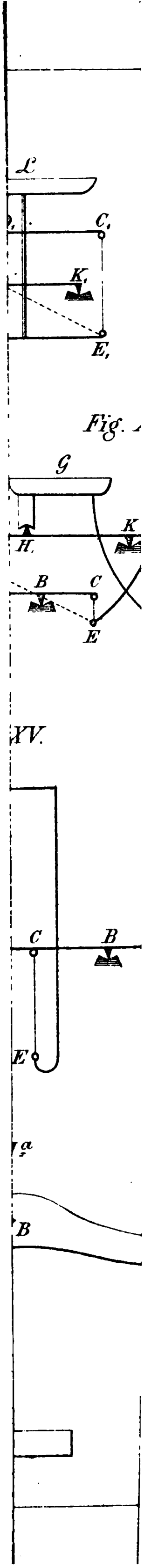
Dr. P. VAN GEER, Leerboek der Meetkunde, Ie Deel, 2e druk. Leiden, *A. W. Sijthoff*. 1876.

Beginselen der Meetkunde van S. F. LACROIX, 7e druk, door Dr. D. BIERENS DE HAAN, Ie Deel. Alkmaar, *Herm. Coster en Zoon*. 1876.

LOBATTO's Leerboek der Rechtlijnige en Bolvormige Driehoeksmeting, 4e druk, door Dr. P. VAN GEER. Schoonhoven, *S. & W. N. van Nooten*. 1877.

Het Centimeter-Gram-Secunde (C. G. S.), stelsel van eenheden, door J. D. EVERETT. Door Dr. C. J. MATTHES. Amsterdam, *C. G. van der Post*. 1877.


Y
X.
A



C,
K,
E,
Fig.
G
K
H,
B
C
E
XV.
C
B
E
B

Pl.

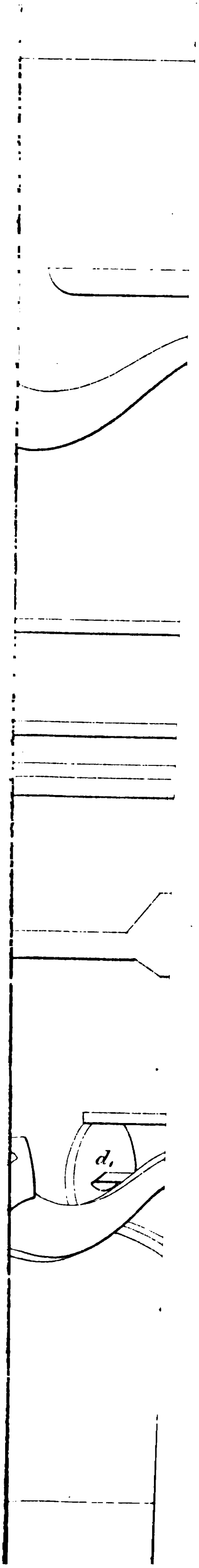


Fig. 31.

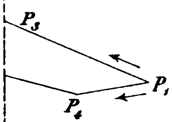


Fig. 32.

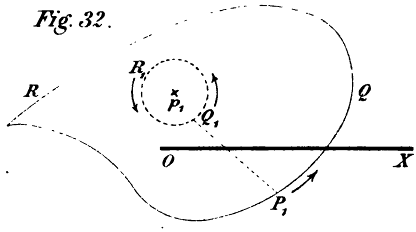


Fig. 33.

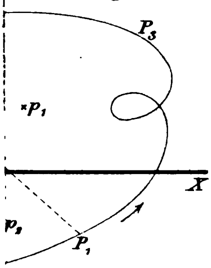


Fig. 35.

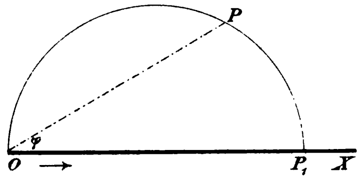
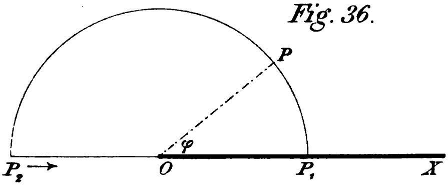


Fig. 36.



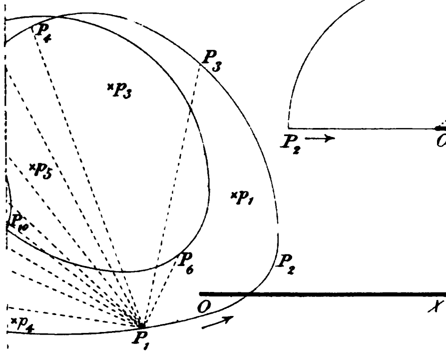
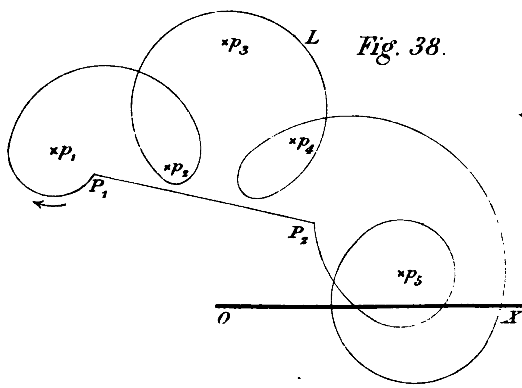


Fig. 38.



37.

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE.

Deel IV.

AMSTERDAM,
WEYTINGH & BRAVE,
1878.

Het „Nieuw Archief voor Wiskunde" *wordt uitgegeven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam, „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven."*

De inrichting en het doel van dit Tijdschrift zijn dezelfde gebleven als in de Voorrede van het Eerste Deel werd aangekondigd.

De Redacteur,

Leiden, Mei 1878. D. BIERENS DE HAAN,

Eerste Secretaris van het Genootschap,
onder de zinspreuk:
EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN.

INHOUD.

INHOUD.

BESCHOUWINGEN OVER DE THEORIE DER CAPILLAIRE VERSCHIJNSELEN,

DOOR

D[R]. P. M. HERINGA.

I.

De theorie der capillaire verschijnselen heeft voornamelijk haar ontstaan te danken aan den arbeid van drie beroemde wiskundigen, namelijk LAPLACE, GAUSS en POISSON; waar dus drie zulke mannen tot nagenoeg dezelfde uitkomst komen, kan men aan de waarheid van die uitkomst wel eenige waarschijnlijkheid toekennen; en zal men het misschien vermetel vinden, die waarheid te ontkennen. In het volgende zal ik het echter wagen, mijne bezwaren tegen die theorie bloot te leggen.

Tot het onderzoek van de verschillende theoriën vond ik aanleiding in de verklaring van eene proef van PLATEAU [1]).

PLATEAU deed deze proef, ten einde de drukking aan te toonen, welke de oppervlakte-laag op de massa uitoefent. Hij steekt namenlijk in een bol olie, die in een vat met alcohol zweeft, een dun ijzeren plaatje, bevestigd aan een dunne steel. Figuur (1) geeft er eene voorstelling van; in 't midden bevindt zich eene opening; de diameter van den bol olie is kleiner dan die van het plaatje. Het plaatje wordt zóó in den bol gestoken, dat het middelpunt van den bol niet in het plaatje komt. Daarna verspreidt de olie zich over beide zijden van het plaatje, zoodat zij twee ongelijke bolvormige

[1]) Statique expérimentale et théorique des liquides, soumis aux seules forces moléculaires. Tome I, § 18.

segmenten vormt. Vervolgens gaat de olie, door de opening in het plaatje, van het grootere segment naar het kleinere, totdat zij beiden gelijk zijn geworden; waarop er evenwicht is.

Volgens Plateau, of beter volgens de algemeen aangenomen theorie, verklaart men dit verschijnsel op de volgende wijze. Door de aantrekking van het plaatje breidt de olie zich over het geheele plaatje uit, en daardoor steunt de omtrek van de segmenten op den omtrek van het plaatje. Als dit heeft plaats gehad, kan verder iedere beweging slechts ontstaan door de werking van het vrije deel van de oppervlakte-laag; want bij het grootere segment is de kromte-straal kleiner, dus $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}$ grooter; bijgevolg is de druk, dien het oppervlakte-laagje van het grootere segment uitoefent, grooter dan de druk, dien het oppervlakte-laagje van het andere segment uitoefent. Nemen wij nu voor de duidelijkheid een voorbeeld.

Zij figuur (2) eene doorsnede van het plaatje met de nog onveranderde segmenten. Zij nu de straal van het eene segment a, en die van het andere a'; zij het middelpunt van het eene segment in het middelpunt P van het plaatje; dit eene segment is dus een halve bol. Het middelpunt van het andere segment is op een afstand gelijk $\frac{4}{5}a'$ rechts van P. Noemen wij nu de segmenten B en A; dan is het zwaartepunt van B op een afstand $\frac{3}{8}a$ rechts van P, en het zwaartepunt van A $\frac{19}{280}a'$ links van P [1]). Daar $PC = a$ is en ook $PC = \frac{3}{5}a'$, zoo is $a' = \frac{5}{3}a$ en dus $\frac{19}{280}a' = \frac{19}{168}a$. Berekent men nu het gemeenschappelijk zwaartepunt der twee massa's, dan vindt men, als men de dikte der plaat verwaarloost, dat dit op een afstand $= 0{,}274\,a$ rechts van P ligt. Door de moleculaire werking van de vloeistof alleen, zou dus het zwaartepunt der massa $0{,}274\,a$ verplaatst worden; want het is duidelijk, dat het zwaartepunt in den toestand van rust zich in P bevindt. Het is echter eene onmogelijkheid, dat het zwaartepunt zich ten gevolge van de moleculaire werking der massa zelve zoude verplaatsen. Wij hebben hier dus met eene dwaling te doen; eene dwaling, die wij in de theorie moeten zoeken, daar de verklaring van de hier vermelde proef geheel volgens die theorie is opgemaakt.

---

1) Zie o. a. Jullien, Problèmes de mécanique naturelle. Tome I, pag. 12.

JAMIN geeft in zijn leerboek over physica [1]) een kort maar duidelijk overzicht van de theorie. Ik zal dit hier overnemen, ten einde des te duidelijker te doen uitkomen, waar mijns inziens de fout schuilt.

Zij XY in figuur (3) het oppervlak eener vloeistof; dan wordt het deeltje M, gelegen aan het oppervlak, aangetrokken door de deeltjes, die zich bevinden in den halven bol, beschreven met den activiteitsstraal [2]). Dit veroorzaakt eene resultante in de richting van de normaal MP. Nemen wij nu een deeltje M′, meer naar binnen gelegen, dan werkt daarop de massa, gelegen binnen het segment ABC. De deelen ABPQ en A′B′PQ vernietigen elkanders werking. Nu blijft het deel A′CB′ over, dat ook eene resultante geeft in de richting der normaal op het oppervlak, maar kleiner dan MP. Eindelijk een deeltje M″, geplaatst op een diepte gelijk aan den activiteitsstraal, of op een grootere diepte; dit wordt naar alle kanten gelijkelijk aangetrokken door krachten, die elkander vernietigen. Indien wij dus een oppervlak X′Y′ beschrijven, dat in alle punten op een afstand, gelijk aan den activiteits-straal, van XY verwijderd is; en wij beschouwen de moleculen begrepen, tusschen XY en X′Y′; dan zien wij, dat zij allen onderworpen zijn aan krachten, die werken van buiten naar binnen loodrecht op het oppervlak; krachten, die men kan vergelijken met de zwaartekracht, die ook op iedere molecule werkt. Door de laatste kracht ontstaat een druk, die met de diepte toeneemt. Door de moleculaire krachten ontstaat iets, dat daarmede overeenkomt; echter met dit verschil, dat de zwaartekracht op iedere molecule gelijkelijk werkt, terwijl de moleculaire werking niet gelijk is; deze heeft haar maximum voor de moleculen, gelegen in het XY-vlak, en vermindert naar X′Y′ toe, om tot nul te worden in X′Y′ zelf en daaronder. Waaruit volgt, *dat al de moleculaire krachten eene drukking doen ontstaan, die van XY tot X′Y′ toeneemt, standvastig wordt onder X′Y′, en zich zal voortplanten in al de deelen van de vloeistof. Men noemt dit de moleculaire drukking.*

Hierna volgt de verklaring van den invloed, dien de vorm van het oppervlak heeft. Men komt zoodoende tot de bekende formule

$$K \pm H\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right).$$

Hierin is K de moleculaire druk, als het oppervlak een plat vlak

---

[1]) Tome I, pag. 218.

[2]) Activiteits-straal is een straal, gelijk aan den afstand, waarop de moleculaire krachten zich nog doen gevoelen.

is; H de druk, wanneer de kromtestralen van het oppervlak één zijn. Het bovenste of onderste teeken moet gebruikt worden, al naarmate het oppervlak bol of hol is.

Bij het maken van de gevolgtrekking in het voorgaande betoog heeft men een kleinen sprong gemaakt. Men heeft namelijk eerst de moleculaire krachten vergeleken met de zwaartekracht; en uit die vergelijking zoude nu volgen, dat de druk, ontstaan door de moleculaire krachten, zich, even als de druk ontstaan door de zwaartekracht, door de geheele vloeistof zal voortplanten [1]). Dit nu is mijns inziens in het geheel niet het geval. Denken wij ons in figuur (3) nog een derde vlak X″Y″, getrokken op een afstand gelijk aan de activiteitsstraal onder X′Y′; dan trekt de massa tusschen XY en X′Y′ de massa aan tusschen X′Y′ en X″Y″, en omgekeerd; maar daardoor ontstaat geen druk onder X″Y″. Evenzoo kunnen twee glazen platen elkander aantrekken; maar men zal nooit onder of boven of naast die twee platen, wanneer zij in rust zijn, eenigen druk gevoelen; waarom heeft men dan bij twee vloeistof-platen dit wel aangenomen? De aarde trekt het water aan, dat zich in eene zee op de aarde bevindt; en daardoor ontstaat een druk op den bodem van de zee; maar zal men nu dien druk boven die zee of aan de tegenovergestelde zijde van de aarde waarnemen? Immers neen. Evenzoo zal de aantrekking tusschen twee moleculen water wel een druk tusschen die moleculen teweeg brengen, maar daarbuiten niet. Dat de aantrekking tusschen de deeltjes eene drukking tusschen die deeltjes teweeg brengt, is duidelijk; maar dat die druk zich verder zoude voortplanten dan de deeltjes zelve, is niet aan te nemen. Men zal hier misschien aanvoeren, dat de druk zich in het water gelijkelijk voortplant; maar dat heeft alleen betrekking op uitwendig aangebrachte krachten, zooals bij de hydraulische pers en bij de zwaartekracht, die men met eene uitwendige kracht kan gelijk stellen [2]).

Een bewijs voor den druk, dien de oppervlakte-laag uitoefent, is

---

[1]) Ik stel mij daarbij een vat voor, gedeeltelijk met eene vloeistof gevuld. Het vat kan zoo groot zijn als men wil, maar het moet zich boven het oppervlak der aarde bevinden.

[2]) Deze voorstelling van het ontstaan van den druk in de vloeistof door de werking van de oppervlakte-laag, is ook mathematisch weêrgegeven door VAN DER WAALS, in zijne dissertatie *Over de continuiteit van den gas- en den vloeistof-toestand.* Zie bladz. 10 en bladz. 22. Een bewijs van het voortplanten van dien druk geeft hij evenmin. Hij wil dien druk dan vergelijken met den druk, die uitgeoefend wordt om een gas in eene bepaalde ruimte besloten te houden.

schijnbaar het geval der opgeblazen zeepbel, die de lucht, waardoor de bel is opgeblazen, weder door de pijp drijft. Hier hebben wij echter een zeer bijzonder geval van een vloeistof-massa, hetgeen ik later zal behandelen.

Wanneer wij nu de mathematische theoriën van LAPLACE, GAUSS en POISSON nagaan, zullen wij ook daar zien, dat er veel op aan te merken is.

Een uitvoerig onderzoek van alle theoriën vindt men in eene verhandeling van M. E. BÈDE, getiteld *Recherches sur la capillarité*, opgenomen in de *Mémoires couronnés et des savants étrangers, publiés par l'Académie Royale de Belgique* van 1861, 1863, 1865 en 1867. Het doel van zijn onderzoek is voornamenlijk de uitkomsten der theorie met de verschijnselen zelve te vergelijken. In het eerste gedeelte geeft hij een overzicht van de verschillende theoriën. Hoewel hij daartegen ook bezwaren heeft, poogt hij echter niet hen te verbeteren. Vooral tegen POISSON heeft hij groote bezwaren. Aan het eind van dat onderzoek zegt hij onder anderen: „Ou je m'abuse complètement sur la portée des arguments de POISSON, ou je crois pouvoir affirmer, que cet illustre géomètre aveuglé par une idée préconçue, s'est égaré dans une inutile complication de la question."

BÈDE schijnt ook den invloed van de grenslaag aan te nemen; ten minste hij verklaart er zich niet tegen.

Het is echter voornamenlijk tegen dien wonderdadigen invloed van de oppervlakte-laag, dat het volgende is gericht. Terwijl ik dus voor de geschiedenis der theoriën naar BÈDE's verhandeling verwijs, zal ik achtereenvolgens in de drie voornaamste theoriën principieele fouten aanwijzen.

In 1806 en 1807 verscheen het vierde deel van LAPLACE's *Mécanique Célèste*; daarin gaf hij twee theoriën van de capillaire verschijnselen.

Hij begint met de meening van CLAIRAUT te bestrijden omtrent den afstand, waarop de capillaire werking zich doet gevoelen. CLAIRAUT meende, dat de invloed der buis merkbaar is tot aan het kolommetje vloeistof, dat zich om de as der buis bevindt. LAPLACE daarentegen neemt aan, dat die invloed zich slechts tot eenen onmerkbaren afstand voortplant. De uitdrukking van onmerkbaren afstand wordt bij deze theoriën veel gebruikt; het is echter eene zeer ongelukkige uitdrukking, die uitmunt door onduidelijkheid. Want wat verstaat men hier onder onmerkbaren afstand; voor wien en voor wat is die afstand onmerkbaar; is hij onmerkbaar voor het

menschelijk oog of voor een goed mikroskoop? LAPLACE geeft er in het geheel geene verklaring van. In alle geval is het eene bepaalde lengte, en daarom mag men hier niet de uitdrukking oneindig klein stellen, daar men daaraan niet het begrip van eene bepaalde grootheid hecht.

Reeds in het begin der theorie hebben wij gelegenheid het onbepaalde van die uitdrukking op te merken. LAPLACE geeft namelijk eerst een overzicht van de uitkomsten, die hij verkregen heeft. Na den gevonden invloed van de kromming van het oppervlak vermeld te hebben, zegt hij tot de gelijkvormigheid van de bolvormige segmenten te zijn gekomen, die het oppervlak van de vloeistof in zeer nauwe buizen vormt; en uit de gelijkvormigheid van de bolvormige segmenten volgt dan van zelf, dat de hoek, dien het oppervlak der vloeistof met het oppervlak der vaste stof maakt, standvastig is. Want bolvormige segmenten zijn gelijkvormig, wanneer de stralen hunner grondvlakken evenredig zijn met hunne hoogten, of met de stralen van de bollen, waaruit zij gesneden zijn. Te vergeefs echter zal men in de verhandeling zelf naar het bewijs zoeken, dat de segmenten gelijkvormig zijn; alles steunt op het eenigzins wonderlijke betoog van de onveranderlijkheid van den hoek tusschen de twee grensvlakken. Hij zegt namelijk, dat, wanneer men de buis door een mikroskoop beziet, de middellijn eenige meters groot schijnt; en als men nu aanneemt, dat de afstand, waarop de aantrekking merkbaar is, een millimeter groot is geworden, dan is op een willekeurig punt het oppervlak der buis als een plat vlak te beschouwen. Waarvoor hier het mikroscoop dient, is niet duidelijk; want de verhouding tusschen die twee grootheden blijft toch dezelfde. Bovendien als LAPLACE op deze wijze den invloed der kromming van de buis buiten rekening stelt; dan kan men op dezelfde wijze den invloed van de kromming der vloeistof neutralizeeren; want dan zoude men het oppervlak der vloeistof in een willekeurig punt altijd als vlak kunnen beschouwen ten aanzien van den activiteits-straal.

Zien wij nu hoe, LAPLACE tot de grondformule der capillaire werking geraakt.

Hij beschouwt daartoe eene vaas ABCD, figuur (4), vol water tot AB, waarin eene glazen buis NMEF is gedompeld, die aan beide einden open is; het water heeft zich tot O opgeheven, en zijn oppervlakte neemt het holle figuur NOM aan. O is het laagste punt van dit oppervlak. Nu zoude de werking van de vloeistof beneden KOI op OZ dezelfde zijn als van de buis op VR; en de meniscus

MIOKN zal op de kolom OZ werken van beneden naar boven, en zal derhalve trachten de vloeistof op te heffen. De werking op OZ door de omringende vloeistof, en van de buis op VR zijn niet te vergelijken; want de eerste is nul, volgens LAPLACE, en de tweede niet, wanneer men VR bijv. langs NF laat vallen; en ligt het niet voor de hand te vragen, waarom de werking van de meniscus op OZ niet vernietigd wordt, door de werking van OZ op de meniscus. Met deze korte redenering, die niets bewijst, wil hij dus nu de optrekkende kracht der meniscus als oorzaak van de opstijging voorstellen.

Ten einde den invloed van den vorm der meniscus te berekenen, bepaalt hij op de volgende wijze den invloed van een bol op eene kolom vloeistof, die loodrecht buiten op het oppervlak van den bol staat. Zij r de afstand van het middelpunt des bols tot een punt van de kolom, die aangetrokken wordt; u de straal van eene bolvormige schaal, waarvan de dikte du is. Zij θ de hoek, dien de straal u maakt met de rechte r, en ω de hoek, dien het vlak, dat door de twee rechten r en u gaat, maakt met een vast vlak, dat door de rechte r gaat; een element van de bolvormige schil is $= u^2\, du\, d\omega\, d\theta\, Sin\,\theta$. Indien men vervolgens f den afstand van dit element tot aan het punt noemt, dat aangetrokken wordt, zoo hebben wij

$$f^2 = r^2 - 2\, r\, u\, Cos\,\theta + u^2.$$

Stellen wij verder door $\phi(f)$ de aantrekkingswet voor op den afstand f, welke functie voor eene merkbare waarde van f onmerkbaar is; de werking dus van het element van de schil op het punt, dat aangetrokken wordt, ontbonden volgens r, en naar het middelpunt van de schil gericht, is

$$u^2\, du\, d\omega\, d\theta\, Sin\,\theta\, \frac{r - u\, Cos\,\theta}{f}\, \phi(f) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Nu is $\frac{r - u\, Cos\,\theta}{f} = \frac{df}{dr}$; dus wordt (1)

$$u^2\, du\, d\omega\, d\theta\, Sin\,\theta\, \frac{df}{dr}\, \phi(f) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Zij nu $c - \chi(f)$ de integraal $\int df\, \phi(f)$, genomen van $f = 0$; c is de waarde van de integraal, als $f = \infty$ is; $\chi(f)$ is eene positieve grootheid, die met groote snelheid afneemt, als f grooter wordt, en voor eene merkbare waarde van f onmerkbaar wordt; (2) is dus de partieele differentiaal van

$$u^2\, du\, d\omega\, d\theta\, Sin\,\theta\, \{c - \chi(f)\},$$

of bijgevolg ook de partieele differentiaal van

$$-u^2\, du\, d\omega\, d\theta\, Sin\,\theta\, \chi(f) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Deze, geintegreerd van $\omega = 0$ tot $\omega = 2\pi$, geeft

$$-2\pi u^2\, du\, d\theta\, Sin\,\theta\, \chi(f).$$

Vervolgens moet men integreeren van $\theta = 0$ tot $\theta = \pi$. Als men de waarde van f^2 differentieert ten opzichte van θ

$$d\theta\, Sin\,\theta = \frac{f\,df}{ru}, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

dan is

$$-2\pi u^2\, du \int d\theta\, Sin\,\theta\, \chi(f) = -2\pi \frac{u\,du}{r} \int f\,df\,\chi(f).$$

Stellen wij nu weder voor de integraal $\int f\,df\,\chi(f) = c' - \psi(f)$; c' is de waarde van de integraal, als f oneindig groot is; $\psi(f)$ is weder eene positieve grootheid, die met eene zeer groote snelheid afneemt, als f toeneemt. Men zal dan hebben, wanneer men opmerkt, dat voor de waarden $\theta = 0$ en $\theta = \pi$, $f = r - u$ en $f = r + u$ is,

$$-2\pi u^2\, du \int d\theta\, Sin\,\theta\, \chi(f) = -\frac{2\pi u\,du}{r} \left\{\psi(r-u) - \psi(r+u)\right\} . \quad (5)$$

Differentieert men deze functie van r, dan zal de coëfficient van dr de aantrekking geven van de schil op het aangetrokken punt; maar indien men de werking wil hebben van de schil op eene kolom vloeistof, waarvan het naaste einde op eenen afstand b van het middelpunt van de schil is, zoo moet men deze coëfficient met dr vermenigvuldigen en de integraal van het produkt nemen; dit geeft weêr de voorgaande functie, waaraan men een standvastige moet toevoegen, welke men bepaalt door de integraal met $r = b$ te doen beginnen. Men heeft aldus voor deze integraal

$$\frac{2\pi u\,du}{b} \left\{\psi(b-u) - \psi(b+u)\right\} - \frac{2\pi u\,du}{r} \left\{\psi(r-u) - \psi(r+u)\right\} \;.\;. \quad (6)$$

Nu is $\psi(b+u)$ altijd eene onmerkbare grootheid, daar b eene merkbare grootheid is; en indien wij onderstellen, dat r, de afstand van het verst verwijderd einde der kolom, b met eene merkbare waarde overtreft, zoo zijn ook $\psi(r\ \ u)$ en $\psi(r+u)$ onmerkbaar; zoodat de voorgaande functie teruggebracht wordt tot $\frac{2\pi u\,du}{b}\psi(b-u)$.

Deze functie drukt dus de werking uit van de schil op een oneindig nauw kanaal, gericht volgens r, en waarvan het naaste einde op een afstand b van het middelpunt ligt.

Deze werking is de druk, dien de vloeistof zoude uitoefenen ten gevolge van de aantrekking der schil op eene vlakke basis, geplaatst aan het uiteinde van het kanaal, loodrecht op zijne richting, als men de basis als eenheid aanneemt. Ten einde de werking van den geheelen bol, waarvan de straal b is, te verkrijgen, stellen wij $b-u=z$; deze werking zal gelijk zijn aan de integraal

$$2\pi\int\frac{b-z}{b}\,dz\,\psi(z),\text{ genomen van } z=0 \text{ tot } z=b.$$

Zij dan K de integraal $2\pi\int dz\,\psi(z)$, en H de integraal $2\pi\int z\,dz\,\psi(z)$, dan is de aantrekking

$$K-\frac{H}{b}.$$

Dit is de integratie, juist zooals LAPLACE haar heeft gegeven.

GAUSS [1]) maakt er echter op opmerkzaam, dat de eigenschap van $\phi(f)$ om voor $f=\infty$ tot nul te naderen, niet altijd overgaat op $\psi(f)$ en $\chi(f)$.

BÈDE [2]) geeft hiervan het volgende voorbeeld. De functie $l\left(1+\frac{a}{a+r}\right)$, waarin a eene onmerkbare grootheid is, voldoet aan de voorwaarden van de functie $\phi(r)$. Voor $r=0$ heeft zij eene eindige waarde $l=2$; zij neemt snel af als r toeneemt, en voor $r=\infty$ is zij 0. Berekent men nu $\chi(r)$, dan is

$$\chi(r)=c+rl\left(1+\frac{a}{a+r}\right)+a\,l\frac{(2a+r)^2}{a+r}\text{, of voor } r=0,$$

$$\chi(0)=c+a\,l\,(4a),$$

of

$$\chi(r)-\chi(0)=rl\left(1+\frac{a}{a+r}\right)+a\,l\frac{(2a+r)^2}{4a(a+r)}.$$

Men ziet nu gemakkelijk in, dat dus $\chi(r)-\chi(0)$ voor $r=\infty$, ∞ wordt, dus niet aan de voorwaarde voldoet. GAUSS meent, dat men deze zwarigheid kan vermijden door tot op eenen eindigen afstand te integreeren. BÈDE vindt echter deze bepaling nog niet voldoende, en vindt het 't zekerste, de integratie slechts tot aan den activiteitsstraal uit te strekken.

Deze integratie van LAPLACE is dus, door dat de functie der kracht onbekend is, zeer vaag. Mijns inziens kan men die integratie niet uitvoeren, voordat die functie volkomen bekend is, en daarbij de

---

1) Principia generalia figurae fluidorum in statu aequilibrii, pag. 2.

2) BÈDE, pag. 48.

grenzen, welke men bij de integratie moet stellen; immers de raad van BÈDE om de integratie niet verder dan den activiteits-straal uit te strekken geeft ook niets zonder eenige nadere bepaling van dien activiteits-straal.

Het is echter aan te nemen, dat er tusschen een kolommetje buiten den bol en den bol een zekere aantrekking is. Wij kunnen die voor de volgende berekening met LAPLACE gelijk aan $K - \frac{H}{b}$ nemen.

Ten eerste is dus de bewering, dat de meniscus de opstijging veroorzaakt, op zeer losse gronden gedaan; en ten tweede is de berekening van de aantrekkende kracht niet goed. Men kan dus uit deze theorie geen gegrond bewijs halen voor dien druk, die aan het oppervlak der vloeistof zoude ontstaan; want het geval, dat LAPLACE hier behandeld heeft, moet nu nog praktisch gemaakt worden, dat wil zeggen, toegepast op het geval, dat de kolom vloeistof zich binnen den bol bevindt.

Hij doet dit op de volgende wijze. Wanneer de straal van den bol oneindig groot wordt, is $\frac{H}{b} = 0$; dus dan is K de aantrekkende kracht tusschen eene vloeistofmassa met een plat oppervlak en eene kolom vloeistof, die daar loodrecht op staat; $\frac{H}{b}$ is dus de werking van de meniscus, altijd voor het geval, dat het vloeistof-kolommetje er buiten op staat.

Beschouwen wij nu, zie figuur (5), twee gelijke bollen, die elkaar in O raken. Zij IOK een rakend vlak aan de twee bollen, en OS de kolom vloeistof. Het punt q van de onderste meniscus werkt op de kolom OS, om haar op te heffen. Want maakt men den gelijkbeenigen driehoek Oqr; dan is het duidelijk, dat de werkingen van het punt q op het deel Or van de kolom elkaar vernietigen; maar door zijne werking op rs tracht het de vloeistof op te heffen, op dezelfde wijze als een punt q', dat in de bovenste meniscus IOMNK als het spiegelbeeld van q is geplaatst.

De twee meniscus werken dus met dezelfde kracht om de vloeistof van de kolom op te heffen; dus beide met eene kracht $\frac{H}{b}$.

Nu is de werking van eene onbepaalde massa, gelegen boven OS, en begrensd door het vlak IOK, dezelfde op de kolom OS, als van eene massa gelegen onder hetzelfde vlak; omdat eenig punt r van deze kolom gelijkelijk door de twee massa's wordt aangetrokken,

maar in tegengestelde richtingen, daar het in evenwicht is te midden van deze aantrekkingen. Dus als K de werking van de bovenste massa uitdrukt, drukt het ook tevens de werking van de onderste massa uit op die zelfde kolom van boven naar beneden; maar deze werking is zamengesteld uit twee deelen, te weten, die van een bol QOP en die van de meniscus IOQPK; noemen wij dus S de werking van den bol, en opmerkende, dat de meniscus de kolom van beneden naar boven trekt, en dat die werking $\frac{H}{b}$ is; dan is

$$S - \frac{H}{b} = K, \text{ of } S = K + \frac{H}{b};$$

waaruit volgt, dat de werking van een lichaam, dat begrensd wordt door een bol oppervlak, op eene inwendige kolom vloeistof wordt uitgedrukt door $K + \frac{H}{b}$. LAPLACE komt nu verder van deze uitkomsten, door de beschouwing van een ellipsoide-osculateur, tot de bekende formule van den druk op het oppervlak eener vloeistof, al naarmate het bol of hol is,

$$K \pm \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Door dien meerderen of minderen druk zoude dan de vloeistof neêrgedrukt of opgeheven worden.

Bij deze redenering van LAPLACE, die wij geheel onveranderd hebben medegedeeld, is de groote fout, dat niet wordt aangegeven, hoe ver het te beschouwen kolommetje zich uitstrekt. Bij het vorige geval, toen het kolommetje ondersteld werd buiten den bol te staan, deed de grootte van het kolommetje er niets toe, daar de aantrekking zich slechts op een zeer kleinen afstand uitstrekt. Bij het zooeven behandelde geval is het gemakkelijk in te zien, dat de lengte der kolom omschreven moet zijn. Nemen wij bijv. aan, dat het zich even ver uitstrekt als de vloeistof gaat, dan komen wij tot een geheel andere uitkomst. Merken wij eerst op, dat alles, wat buiten den bol is, tot de meniscus behoort. Trekken wij nu het vlak K′O′I′ evenwijdig met KOI, hetwelk den bol in O′ raakt; dan is de werking van het deel van de meniscus, begrepen tusschen de twee vlakken, op de kolom OO $= 0$, en op de kolom beneden K′O′I′, $= \frac{H}{b}$, van beneden naar boven; en de werking van het deel der meniscus beneden K′O′I′ op de kolom OO′ is $-K$, en op de kolom beneden K′O′I′ klaarblijkelijk nul. De werking van den bol POQO′ op OO′

is ook nul, en de werking van den bol op het kolommetje beneden K'O'I' is klaarblijkelijk $K - \frac{H}{b}$, van beneden naar boven; dus de werking van de geheele vloeistof beneden KOI op het kolommetje is, van beneden naar boven, $K - \frac{H}{b} + \frac{H}{b} - K$ of $= 0$.

Dat die werking $= 0$ is, kan ook wel niet anders; ten minste als wij onderstellen, dat het boven- en benedenvlak der vloeistof-massa evenwijdig loopen; het wordt dan immers gelijkelijk naar boven en naar beneden getrokken.

Laplace heeft dus eene fout begaan door te beweren, dat de werking van de massa boven KOI dezelfde was als beneden KOI. Neemt men nu echter de kolom $= OO'$, dan is het duidelijk, dat de werking van de vloeistof beneden I'O'K' dezelfde is als boven IOK, maar in tegengestelde richting; en dan is de werking en van den bol en van de meniscus begrepen tusschen de twee vlakken KOI en K'O'I' $= 0$; en dus de aantrekking van de geheele massa beneden KOI en K'O'I' $= 0$; en dus de aantrekking van de geheele massa beneden KOI op dat kolommetje $= K$. Hieruit moge het blijken, hoe noodig het is te bepalen, hoever het kolommetje genomen moet worden.

Al ware nu ook de druk zooals Laplace meent dat hij is; dan blijkt het uit het voorgaande nog met geen enkel woord, dat die druk zich doór de geheele vloeistof voortplant; dit wordt aangenomen zonder bewijs.

Deze zelfde bepaling van den druk, uitgeoefend op zulk eene kolom in de vloeistof, vindt men terug in de reeds vermelde Dissertatie van Van der Waals, in het derde Hoofdstuk, *Analytische uitdrukking voor den molekulairen druk.* Daarop zijn ook geheel dezelfde aanmerkingen van toepassing. Van der Waals geeft duidelijk de grenzen van de integratie aan. Wij kunnen daardoor nog op eene andere fout wijzen. Hij komt namelijk tot deze integraal

$$2\pi d \int_0^b \psi(z)\,dz - \frac{2\pi d}{b} \int_0^b z\,dz.\psi(z);$$

en zegt nu, dat het geene verandering te weeg brengt, als men de grenzen onbepaald doet toenemen. Dit is hier echter niet goed, omdat, wanneer $z = b - u$ is, waarbij b de straal van den aantrekkenden veranderlijken bol en u de straal van den schil is, z voor een kleinere waarde van u grooter wordt, tot aan $u = 0$ toe; laat men u

nu verder negatief worden, dan krijgt men in de integratie sommige gedeelten dubbel, die niet dubbel behooren genomen te worden. Laat men daarentegen b oneindig groot worden, dan wordt de straal oneindig groot, dus het bol-oppervlak een plat vlak; en dan zoude de integratie van een bol oppervlak en een plat oppervlak dezelfde zijn. Die grenzen zoo uit te breiden, leidt dus tot ongerijmdheden.

Hiermede zal ik van de theorie van LAPLACE afscheid nemen; uit het voorgaande moge blijken, dat zij op losse gronden is opgebouwd, en een ieder kan zich bij nalezing van de geheele theorie en ook van de tweede theorie van het onzamenhangende overtuigen, en het oordeel beamen, dat GAUSS in de voorrede van zijne „Principia generalia" er over uitspreekt.

His perpensis fateri oportet, theoriam ab ill. LAPLACE *propositam etiamnum essentialiter mancam et incompletam esse.*

De theorie van GAUSS wensch ik slechts kort te behandelen.

GAUSS zocht door middel van het beginsel der schijnbare verplaatsingen het evenwicht te bepalen van eene vloeistof, die in aanraking is met een vast lichaam. De krachten, die op de vloeistof werken, zijn volgens GAUSS, de zwaartekracht, de aantrekking van de vloeistof-moleculen op vloeistof-moleculen, en de aantrekking van de moleculen der vaste stof op de vloeistof-moleculen. Van deze drie krachten bepaalt GAUSS nu het evenwicht.

In zijne verhandeling heeft hij ook tevens een voorbeeld willen geven van de variatie van meervoudige integralen; hij heeft daarom alles niet zoo vereenvoudigd, als dit kan.

Vooral om de zaak eenvoudig voor te stellen schreef M. J. BERTRAND eene verhandeling *Sur la théorie des phénomènes capillaires* [1]).

Zijn dan m, m', m'', ... de moleculen van de vloeistof, die elkaar aantrekken volgens eene functie van hunnen afstand en evenredig aan het produkt van hunne massa's. Onderstellen wij deze vloeistof bevat in eene vaste buis, waarvan de verschillende moleculen door M, M', M'' ... aangeduid worden. Deze trekken m, m', m'', volgens eene andere functie aan. Stelt men nu de afstanden voor door (m, m') en (m, M); dan moeten de krachten, die op m, m', m'', ... werken, evenwicht maken; of volgens het beginsel der schijnbare verplaatsingen hebben wij

1) Journal de Liouville, Tome XIII, 1848, pag. 185.

$$0 = \Sigma m \{ -g\,dz - m' f(m, m') d(m, m') - m'' f(m, m'') d(m, m'') \ldots$$
$$\ldots M F(m, M) d(m, M) - M' F(m, M') d(m, M') \},$$

waarbij $d(m, m')$ en $d(m, M)$ alleen betrekking hebben op de verplaatsing van m.

Van deze vergelijking uitgaande, ontwikkelt GAUSS zijne geheele theorie. Die ontwikkeling is belangrijk om na te gaan, en volgens mijne meening volkomen goed. Heeft dus GAUSS gedwaald, dan moet het zijn bij de samenstelling van deze vergelijking. Wij zullen dus nagaan, of deze vergelijking juist is.

Vooreerst merken wij op, dat GAUSS aanneemt, dat de vloeistof niet samengedrukt wordt. Hoe sterk dus de aantrekking van de stof onderling moge zijn, de stand van de deeltjes blijft ten opzigte van elkaar onveranderd. Hetzij men zich nu denke, dat de vloeistofdeeltjes tegen de buis aanrusten, of op een kleinen afstand worden gehouden; altijd zal de kracht, die m naar M trekt, eene tegengestelde kracht doen ontstaan, die m verhindert daaraan gehoor te geven.

Stellen wij ons voor de duidelijkheid een glasplaat voor met eene vloeistof-molecule er op; die vloeistof-molecule wordt tegen het glas aangedrukt door $F(m, M)$; maar daardoor ontstaat ook tevens eene kracht, die door $F(m, M)$ in tegengestelde richting wordt opgewekt. Bij GAUSS is daar echter geen sprake van; de termen, daaruit voortvloeiende, moeten in de vergelijking ingebracht worden. Even goed als bij de hydrostatica, is het noodig den lijdelijken tegendruk in acht te nemen. Bij het bepalen van het evenwicht van een vloeistof-parallepipedum, zien wij daar den druk, ontstaan door de zwaartekracht, op het bovenvlak $p\,dx\,dy$ en door $Z dm$ opgeheven door den lijdelijken tegendruk $-\left(p + \frac{dp\,dz}{dz}\right) dx\,dy$ [1].

Wanneer men dus dit in die vergelijking invoegt, zal men waarschijnlijk tot andere uitkomsten komen.

De uitkomsten, die GAUSS nu verkregen heeft, kunnen niet goed zijn, daar de gronden, waarop zij steunen, niet goed zijn; hetgeen ik in het voorgaande meen te hebben aangetoond.

De theorie van POISSON daarentegen steunt op de onderstelling der zamendrukbaarheid van de vloeistof aan de oppervlakte. Hij maakt zich de volgende voorstelling van de stof [2]. De lichamen bestaan

[1] Zie o. a. STURM, Cours de Mécanique, n°. 703.

[2] POISSON, Nouvelle théorie de l'action capillaire.
POISSON, Sur les équations generales etc. Journal de l'école polyt. 20e cahier.
POISSON, Mémoire sur l'élasticité, Mémoires de l'institut. Tome VIII.

uit afzonderlijke moleculen, dat is uit deeltjes van ponderabele stof, van eene onmerkbare grootte, door ledige ruimte gescheiden of door porien, waarvan de afmetingen ook onmerkbaar zijn voor onze zintuigen.

Onafhankelijk van de ponderabele stof, onderstelt men, dat iedere molecule daarenboven eene hoeveelheid inponderabele stof bevat. POISSON noemt dit de warmtestof.

Alle deelen van de stof zijn onderworpen aan twee soorten van wederkeerige werkingen. De eene van deze krachten is eene aantrekkende kracht, onafhankelijk van de natuur der lichamen of van hunne moleculen, evenredig aan het product der massa's en in omgekeerde reden van het vierkant der afstanden; zij strekt zich oneindig ver in de ruimte uit; deze noemt men de zwaartekracht. De andere kracht is ten deele aantrekkend en ten deele afstootend; zij hangt van de natuur der moleculen en van de hoeveelheid warmtestof af. Men schrijft de aantrekkende kracht aan de ponderabele massa toe, en de afstootende kracht aan de warmtestof. Het verschil van deze twee, noemt men de *moleculaire kracht*. Zij tracht de moleculen naar elkander toe te brengen of van elkander te verwijderen, al naarmate de werking van de ponderabele massa grooter of minder is, dan de werking der warmtestof. Hare intensiteit neemt zeer snel af, wanneer de afstand van de moleculen vermeerdert, en wordt geheel onmerkbaar, wanneer die afstand eene merkbare grootte heeft verkregen.

De resultante van de moleculaire krachten, waarbij de afstooting van de warmtestof over het algemeen overwegend is, veroorzaakt de drukking van de vloeistoffen op zich zelf en op de vaste lichamen, en den weerstand, die deze lichamen aan de vloeistoffen bieden.

Al de verschijnselen van de capillariteit ontstaan ook uit de moleculaire krachten, maar zij hangen van een deel der resultante af, verschillend van de drukking, en waarin daarentegen altijd de aantrekking de bovenhand heeft. Dit deel der resultante hangt nu volgens POISSON van den vorm der vloeistof af, en van de snelle verandering der dichtheid aan het oppervlak en in de nabijheid van het lichaam, waartegen zij steunt.

Hij verklaart die verandering der dichtheid aan het oppervlak op de volgende wijze: Iedere oneindig dunne laag van eene vloeistof wordt aan beide zijden gelijkelijk gedrukt door de afstootende kracht van de naburige moleculen, verminderd door hunne aantrekkende kracht; of, wat hetzelfde is, men kan het laagje beschouwen als steunende op de vloeistof, die zich aan de eene zijde bevindt, en zamengedrukt door het deel, gelegen aan de andere zijde; de graad van

zamendrukking wordt bepaald door de grootte van de zamendrukkende kracht. Op eenen merkbaren afstand van het oppervlak der vloeistof komt deze kracht voort van een nabij liggende laag van de vloeistof, waarvan de dikte gelijk is aan den activiteits-straal van de vloeistof; daarom is de inwendige dichtheid van de vloeistof standvastig, afgezien van de kleine zamendrukking, tengevolge van de zwaartekracht, die verandert met den afstand van het bovenvlak. Wanneer echter deze afstand kleiner is dan de activiteits-straal, is de dikte van de laag, gelegen boven de laag, welke men beschouwt, ook kleiner dan die straal; de zamendrukkende kracht, die uit deze laag voortkomt, neemt dus zeer snel af met den afstand van het oppervlak, en verdwijnt geheel aan het oppervlak, waar de oneindig dunne laag alleen zamengedrukt wordt door den luchtdruk.

Al wordt de bovenlaag alleen maar door de lucht gedrukt, zoo is er toch samendrukking, en dus neiging, om dien druk te overwinnen, en geen aantrekking.

Deze geheele voorstelling is duidelijk, uitgezonderd echter de kracht, waaraan men de capillariteit toeschrijft. Het is onverklaarbaar, hoe men dit moet opvatten; waarom hangt de capillariteit slechts van een deel der resultante af? Poisson zegt eerst, dat er twee krachten werken, eene afstootende en eene aantrekkende; nu kan het zijn, dat eene van beiden de bovenhand heeft, maar men heeft geen recht, slechts een deel van de kracht te beschouwen, als men den geheelen toestand wil bepalen. Poisson heeft dit hier gedaan, duidelijk met het doel om iets te verklaren, wat anders onverklaarbaar is, zooals uit het volgende zal blijken.

Poisson komt namenlijk op de volgende wijze tot de evenwichtsvergelijking van eene vloeistof.

Hij bepaalt eerst de kracht, die op eene cilinder-vloeistof OE, figuur (6) in de richting des cylinders van oneindig kleine doorsnede werkt, welke cilinder loodrecht op het raakvlak COD in O staat. Als de doorsnede ω is, noemt hij die werking $N\omega$. N bestaat uit twee deelen; het eene is de werking van de vloeistof beneden COD, deze noemt hij K; het andere is de werking van de vloeistof, gelegen tusschen COD en AOB, deze noemt hij $-\mu$; als $\Phi(z)$ de aantrekking aanduidt tusschen twee eenheden van massa op den afstand r, en ρ de densiteit der vloeistof is; dan vindt hij

$$K = \frac{2\pi\rho^2}{3}\int_0^\infty r^3\Phi(r)dr.$$

en $\mu = \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right)$ als λ en λ' de kromtestralen zijn van het oppervlak, terwijl

$$H = \frac{1}{4} \pi \rho^2 \int_0^\infty r^4 \phi(r) dr,$$

dus
$$N = K - \frac{1}{2} H \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} \right).$$

Daarna bepaalt hij het evenwicht in de richting der zwaartekracht van de krachten, die op het cylindertje OO′ werken. Daarop drukt ten eerste de lucht met een kracht $+P$; dan de zwaartekracht $+g\rho\alpha$, waarbij α de lengte OO′ is; verder de moleculaire kracht van de vloeistof tusschen COD en AOB $= -\mu$; dan de moleculaire kracht van de vloeistof beneden C′O′D′ $= K_1$, terwijl het duidelijk is, dat de werking der vloeistof, tusschen de twee vlakken COD en C′O′D′ nul is. Het blijkt daarbij dat $K_1 = \frac{2\pi\rho}{3} \int_0^\infty r^3 \phi(r) dr$, dus dat $K_1 = K$ is; de evenwichts-vergelijking is dus

$$K + g\rho\alpha + P - \mu = 0.$$

Als het vloeistof-oppervlak een plat vlak is, is $\mu = 0$; laat men daarbij O′ tot O naderen, dan wordt $g\rho\alpha = 0$, en dus $K = -P$. K zoude dus negatief moeten zijn, en dit kan niet, of $\phi(r)$ zoude van teeken moeten veranderen, en in plaats van aantrekkend afstootend moeten werken. Ten einde dus den druk der lucht te dragen, moeten de deeltjes aan het oppervlak eene afstootende neiging hebben; maar om de werking μ te kunnen doen, dat is de werking, die de meniscus uitoefent om de vloeistof naar boven te trekken, moeten wij weêr eene aantrekkende neiging onderstellen. De moleculaire krachten hebben dus hier te gelijk èn eene aantrekkende èn eene afstootende werking, die ieder afzonderlijk werken, zonder tot eene resultante over te gaan. Iets dat onbestaanbaar is. Poisson vindt er echter iets op en zegt: *Al de verschijnselen van de capillariteit ontstaan ook uit de moleculaire krachten, maar zij hangen van een deel der resultante af, verschillend van de drukking, en waarin daarentegen altijd de aantrekking de bovenhand heeft.*

Uit het voorgaande blijkt dus, dat Poisson, na zich eerst eene voorstelling van de vloeistof te hebben gemaakt, die voorstelling wil volmaken voor het verschijnsel, dat zich bij capillaire buizen voordoet; maar dat hij daarbij tot iets ongerijmds komt. Denken wij ons namenlijk de vloeistof-deeltjes zonder eenige uitwendige kracht,

die er op werkt, dan plaatsen deze zich in een evenwichts-toestand. De deeltjes aan het oppervlak bevinden zich dan op een afstand van de daaraan volgende deeltjes, zoodat er geen aantrekking of afstooting plaats heeft; want had die plaats, dan zoude zij zich dichter bij of verder af plaatsen. Nu denke men zich de drukking der lucht op dit oppervlak werkende, dan worden de deeltjes aan het oppervlak dichter bij de volgende geplaatst; er ontstaat dus eene afstootende neiging, die opgeheven wordt door den luchtdruk; voor de capillariteits-werking heeft er dan toch eene onverklaarbare aantrekkende werking plaats.

Hiermede zullen wij ook van de theorie van Poisson afstappen. De bezwaren, die er volgens mijne meening tegen de verschillende theoriën zijn, heb ik in het voorgaande medegedeeld. Het zij mij in het volgende vergund, mede te deelen, hoe ik mij eene voorstelling maak van de vloeistof, en van de oorzaak der capillaire verschijnselen.

II.

Wanneer wij verschijnselen willen verklaren, moeten wij ons ten eerste eene voorstelling maken van de stof, waarin die verschijnselen plaats hebben. Zulk eene voorstelling omvat echter niet het geheele wezen van die stof; maar slechts die eigenschappen, welke die verschijnselen te voorschijn kunnen brengen; wanneer men daarbij slechts zorgt, dat die voorstelling niet in strijd is met andere eigenschappen.

Zoo komen de eigenschappen der vloeistof in een vat, onder den invloed der zwaartekracht, geheel overeen met eene massa kogels; als wij daarbij onderstellen, dat de kogels volmaakt rond zijn en niet zamendrukbaar; welke laatste eigenschap wij ook aan den wand toekennen. De kogeltjes kunnen wij ons zoo klein mogelijk voorstellen, maar altijd zekere afmeting behoudende. Wanneer men de kogeltjes in een vat doet, zullen zij ieder voor zich de laagste plaats opzoeken; en, als in figuur (7) A de bodem voorstelt, zullen zij zich plaatsen op de wijze, als daar is aangegeven. De druk neemt nu met de diepte toe, evenals in eene vloeistof; de drukking op de zijwand heeft ook plaats, en is ook regelmatig toenemende met de diepte; daar, als A de zijwand voorstelt, β^3 zoowel α^4 als β^4 drukt; en als de zijwand er niet was, zoude α^4 weggedrongen worden.

Daar wij de kogels niet zamendrukbaar hebben ondersteld, is de massa homogeen.

Ten einde nu ook de evenwichts-vergelijking in de richting van de zwaartekracht te bepalen van eene kolom kogels, sommeeren wij de krachten, die de zwaartekracht op de verschillende kogels uitoefent; die krachten worden door den lijdelijken tegenstand van het grondvlak van de kolom in evenwicht gehouden.

Op zulk eene kogel-massa kunnen wij dezelfde mathematische beschouwingen toepassen, als in de hydrostatica, en de massa in elementaire parallelopipeda verdeelen.

Zij van zulk een parallelopipedum het eene hoekpunt x, y, z, het andere $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, en de z-as in de richting der zwaartekracht. Wij hebben dan in 't algemeen deze vergelijking

$$dp = \rho\,(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + Z\,dz) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

In het boven aangenomen geval zijn X en Y $=0$, en is Z $= g$. Wanneer wij nu onderstellen, dat er tusschen de kogeltjes onderling, en tusschen de kogeltjes en den wand aantrekkende krachten ontstaan; is het de vraag, of wij dan gelijke verschijnselen zullen verkrijgen, als wij bij de vloeistof opmerken.

Onderzoeken wij nu eerst, hoe het met den druk binnen in de kogel-massa op een afstand, grooter dan de activiteits-straal a, gesteld is. Zij figuur (8) de voorstelling van eene rij kogels in het midden der massa. Onderstellen wij, dat de aantrekking van 3 tot 6 nog merkbaar is, dan wordt ten eerste 4 tot 5 aangetrokken, maar bovendien gedrukt door de aantrekking tusschen (3 en 6), (5 en 3), (5 en 2), (4 en 6) en (4 en 7). De druk tusschen 4 en 5 in dus de som van al die drukken. Wij kunnen die zoo tusschen alle deeltjes en in alle richtingen voorstellen.

Bepalen wij nu de vergelijking (1) voor dit geval, dan zijn nog steeds X en Y $=0$, en is dus $dp = g\rho\,dz$; welke geintegreerd geeft

$$p = g\rho z + c.$$

Onder deze standvastige c is dan de standvastige druk begrepen, die wij volgens het voorgaande overal binnen de vloeistof moeten aannemen.

Nemen wij nu aan, dat figuur (8) eene rij kogeltjes voorstelt, loodrecht op het oppervlak van de kogelmassa staande, en op een afstand, grooter dan de activiteits-straal van den wand, van het vat verwijderd; kogeltje (1) is dus in het oppervlak gelegen. De druk tusschen (4 en 5) en (3 en 4) is dezelfde gebleven, tusschen (2 en 3) niet; daar ontbreekt de druk, die door de aantrekking van een deeltje boven (1) op (3) zoude uitgeoefend kunnen worden; bij den druk, die tusschen (1 en 2) is, houden wij alleen den druk over, die tus-

schen (1 en 2), (1 en 3) en (1 en 4) is. Wij zien dus, dat in de richting van het oppervlak de druk vermindert, of van af het oppervlak vermeerdert tot op den standvastigen druk, dien wij te voren gevonden hebben. De druk in het horizontale vlak zelf blijft dezelfde als in het voorgaande, maar in de richtingen tusschen het horizontale vlak en de verticaal niet; die vermindert, dus de composante in de X en Y richting ook. Het is echter duidelijk, dat voor eenzelfde laag die druk dan toch standvastig is, en dus X en Y in de vergelijking (1) nul zijn. Vergelijking (1) wordt dus, daar Z in die oppervlakte-laag behalve g nog een $\phi(z)$ is, — die, voor een afstand van Z gelijk aan den activiteits-straal, 0 is, —

$$dp = (g\rho + \rho\phi(z))dz,$$

of geintegreerd

$$p = g\rho z + \rho\int\phi(z)dz.$$

Bij deze integraal moet dan nog eene standvastige gevoegd worden, die den druk bevat, die door de krachten in de X en Y richting ontstaat.

In beide gevallen, zoowel binnen in de vloeistof als in het oppervlak, is de druk alleen afhankelijk van z; dus zijn de vlakken van standvastigen druk horizontaal.

Beschouwen wij nu een gedeelte der vloeistof, bij den zijwand gelegen. Zij figuur (9) hiervan eene voorstelling.

A is de wand van het vat, welken wand wij onderstellen volmaakt vlak te zijn en verticaal te staan. De X-richting is loodrecht op den zijwand. Eerst zullen wij een gedeelte van den zijwand nemen, dat op een afstand grooter dan a van het oppervlak of van den bodem verwijderd is. Verder onderstellen wij, dat de wand de vloeistof sterker aantrekt, dan de vloeistof de vloeistof.

De druk, die er dus tusschen (1) en den wand is, zal veel sterker zijn dan tusschen twee vloeistof-deeltjes binnen in de vloeistof; hier komt er de druk bij tusschen (2) en den wand en (3) en den wand, die beide veel sterker zijn, dan wanneer A ook een deel der vloeistof was. Wij zien dus, dat de druk in de richting van den wand toeneemt.

De druk in de richting van het YZ-vlak blijft dezelfde, maar de druk in de richting tusschen dit vlak en de X-richting verandert ook. De composanten van dezen druk in het YZ-vlak veranderen ook; in een zelfde YZ-vlak is de druk echter standvastig. In de vergelijking (1) blijft dus $Y = 0$ en $Z = g$; X echter is een $\phi(x)$, die nul is op den afstand gelijk aan den activiteits-straal a van den wand. De vergelijking wordt dus

$$dp = \rho\,\phi(x)\,dx + \rho g\,dz,$$

of

$$p = \rho g z + \rho \int \phi(x)\,dx.$$

Bij deze integraal moet dan nog eene standvastige gevoegd worden, die door den druk in het YZ-vlak ontstaat.

Daar de verandering van den druk nu niet meer van z alleen afhankelijk is, zien wij, dat de vlakken van standvastigen druk niet horizontaal zijn; maar daar

$$z = \frac{p - \rho \int \phi(x)\,dx}{\rho g},$$

is, zoolang als $\int \phi(x)\,dx$ positief is, voor eene zelfde p, z kleiner; het vlak van standvastigen druk is dus naar boven gebogen. Is daarentegen $\int \phi(x)\,dx$ negatief, dan is z grooter; en dan is het naar beneden gebogen, zooals ook bij vloeistoffen plaats zal hebben, daar de aantrekking van vloeistof op vloeistof sterker is dan van den wand op de vloeistof.

Dit geeft zoo een duidelijke voorstelling van den vorm der verschillende lagen van standvastigen druk tot aan de oppervlakte-laag toe. Het is nu ook duidelijk, dat er geen verandering van druk kan plaats hebben voor dit gedeelte van den wand, dan binnen den afstand, waarop die druk werkt. De $\int \phi(x)\,dx$ wordt standvastig buiten den afstand a gelijk aan den activiteits-straal van den wand.

Gaan wij nu over tot het gedeelte van den wand, dat boven aan de vloeistof is gelegen; wij krijgen dan een vereeniging van de twee voorgaande gevallen. De vergelijking (1) wordt dan

$$dp = \rho\,\phi(x)\,dx + \rho\,\phi(z)\,dz + \rho g\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Deze vergelijking is nu volkomen goed, voordat de vloeistof wordt opgeheven; maar het is duidelijk, dat wij er nog een term zullen moeten bijvoegen, nadat de vloeistof is opgeheven. Beschouwen wij daartoe nog eens figuur (7). Nemen wij aan, dat A de zijwand is, dan zullen de deeltjes β en γ α uit den weg duwen, daar zij niet naar beneden kunnen, alleen naar boven; γ zal met minder kracht β weg zien te krijgen. Wanneer dus de aantrekking van den wand sterker is, zal het oppervlak bij den wand hol zijn. Zij figuur (10) eene voorstelling van dat gedeelte van de vloeistof, dat binnen den afstand a van het oppervlak en binnen den afstand a van den zijwand is gelegen. De druk zal hier nu in de richting naar den wand en naar het oppervlak nog meer toe- en afnemen; hetgeen af zal hangen van de plaats, die het deeltje ten opzichte

van de x en z-as inneemt. Wij zouden dit dus in de vergelijking (2) moeten invoegen. Daar wij niet de minste gegevens hebben, hoe dat die druk in dat gedeelte vloeistof verandert, zullen wij de vergelijking (2) niet trachten in dien zin te wijzigen; maar alleen opmerken, dat die druk in dat gedeelte niet den minsten invloed heeft op de omliggende vloeistof, in den zin als dit gewoonlijk wordt aangenomen. Buiten dat gedeelte gelden de voorgaande beschouwingen; en men kan het zich hier voorstellen, als of dat gedeelte zich daar, e n onder den invloed van den wand, e n onder den invloed der omringende vloeistof-massa, e n onder zijn eigen aantrekking in evenwicht plaatst; alleen zijn zwaarte doet zich ook aan al de onderliggende lagen gevoelen. Welke uitwerking of die zwaarte kan hebben, zal in het volgende medegedeeld worden. Dat oppervlakte-laagje vleit zich dus op de onderliggende bolle of holle oppervlakte van standvastigen druk.

Uit het voorgaande kunnen wij nu de volgende besluiten trekken.

1e Binnen in de kogel-massa ontstaat, tengevolge van de onderlinge aantrekking, een standvastige druk.

2e In de oppervlakte-laag neemt die druk af.

3e In de laag, nabij den wand gelegen, neemt die druk toe of af. Tengevolge daarvan zal de massa bij den wand hol of bol zijn.

4e Het is ongegrond te beweren, dat de druk, ontstaan door de onderlinge aantrekking in de bovenlaag, zich voort zal planten in de andere lagen.

5e De kromming van de oppervlakken van standvastigen druk strekt zich niet verder uit dan de invloed van den wand.

6e De loodrechte wand alleen is niet in staat de kogel-massa op te houden.

Stellen wij ter verduidelijking van dit laatste, dat in figuur (9) het deeltje (1) zich alleen bij den wand bevindt; het wordt dan loodrecht tegen den wand gedrukt; de zwaartekracht houdt echter niet op te werken, wordt door niets verhinderd en beweegt het kogeltje langs het oppervlak.

Bij het voorgaande hebben wij ondersteld, dat de wand een plat vlak is. Nemen wij nu echter aan, dat de wand gebogen is met de holle zijde naar de vloeistof toe; dan is het duidelijk, dat die aantrekking van den wand met de kromming toe zal nemen. Dit geval hebben wij, als wij in de kogel-massa een capillaire buis steken. Zij figuur (11) de voorstelling van eene doorsnede door de as van de capillaire buis. Nemen wij nu aan, dat de afstand, waarop

de aantrekking nog merkbaar is, = HL = GK is. Op de vloeistof boven GH zijn dan dezelfde beschouwingen van toepassing als boven; alleen de aantrekking naar den wand toe is sterker en neemt snel naar de as der buis toe af, waar zij nul is, daar de aantrekking der verschillende kanten der buis daar evenwicht maken. In het midden zal dus de vloeistof op de gewone hoogte blijven staan, terwijl de evenwichts-oppervlakken van daar oploopen of afdalen naar den wand toe.

Wanneer wij echter een deeltje beschouwen beneden GH, erlangen wij geen evenwichts-toestand. Nemen wij bijv. het deeltje p, gelegen in de as; dit wordt sterker in de richting K en L getrokken, dan in de daaraan tegenovergestelde, omdat wij de aantrekking der buis sterker onderstellen dan die der vloeistof. Daar p juist in de as ligt, zal het even sterk naar K als naar L getrokken worden; hetgeen de composante in de richting loodrecht op de as gelijk en tegengesteld doet zijn, maar in de richting der as gelijk en gelijk gericht maakt, en daardoor het deeltje in die richting tracht voort te bewegen. Zoo zal ook een deeltje buiten de as eene resultante overhouden in de richting der as; en het is alzoo duidelijk, hoe er aan de monding der buis een druk ontstaat, die de vloeistof voor zich uitdrijft en juist zoolang, tot dat die kracht evenwicht maakt met de zwaartekracht der opgeheven vloeistof.

De werkelijke opstijging hangt dus niet van de kromming van het oppervlak af, maar van de werking van het ondereinde der buis.

Daar de betrekking tusschen de aantrekking en den afstand nog onbekend is, zoo komt het mij voor, dat men vooreerst langs dezen weg, namenlijk door middel van de capillaire buizen, geene eenigzins praktisch mathematische uitkomsten kan verkrijgen.

De proeven met de adhesie-plaatjes zouden daartoe meer geschikt zijn, indien zij niet een gebrek hadden; en dat is, dat er noodwendig randen aan zijn. Stellen wij ons eene oneindig groote adhesieplaat voor, die op het oppervlak van eene vloeistof is gelegd. Konden wij nu de kracht meten, die noodig is, om dit vlak van de vloeistof los te maken, dan zouden wij daaruit de aantrekking per vlakteeenheid kunnen bepalen; daar het duidelijk is, dat die aantrekking loodrecht op de oppervlakte van het adhesie-plaatje is.

Bij een eindig adhesie-plaatje kunnen de randen van grooten invloed zijn; de aantrekking is daar niet meer normaal op het oppervlak van het plaatje, maar in verschillende richtingen.

Het in rekening brengen van die verschillende richtingen zoude

bij onbekendheid met de bovengenoemde betrekking geen uitkomsten opleveren.

De proeven die WILHELMY [1]) gedaan heeft met ten deele ondergedompelde lichamen, schijnen mij daartoe beter in staat.

Voordat ik die nader behandel, wensch ik echter een zeer eenvoudig lichaam, den bol, bij geheele onderdompeling te beschouwen.

Zij de cirkel MB, figuur (12) de doorsnede volgens een grooten cirkel van een te onderzoeken bol. Stellen wij ons dien bol zoo diep onder water voor, dat hij op een afstand grooter dan de activiteitsstraal van het bovenvlak verwijderd is. (Hij is opgehangen aan de schaal van een balans.) Zij BC die straal. De eerste laag-deeltjes worden met de meeste kracht aangetrokken. De tweede laag, die daarop volgt, wordt met eenigzins minder kracht aangetrokken, en drukt op de eerste laag. Evenzoo wordt ieder opeenvolgend laagje tot aan het laatste laagje, dat op een afstand BC van het oppervlak verwijderd is, met steeds afnemende kracht naar den wand van den bol toegedrukt. Wij hebben dus, even als bij de vroegere beschouwing, hier een naar den bol toenemende druk. De deeltjes (1) kunnen niet nader bij den bol komen; de deeltjes (2) zijn er op een kleinen afstand van verwijderd, en trachten de eerste uit den weg te stooten; daar deze echter niet weg kunnen, zoo blijven de deeltjes (2) op dien afstand. Dezelfde verhouding heeft er plaats tusschen (2) en (3) enz.

Evenzeer als de laagjes (2) en (3) enz. tot den bol trachten te naderen, evenzeer zal de bol naar de laagjes willen komen. Hij wordt daarin evenzeer door het laagje (1) verhinderd. Bovendien wordt de bol, zoo diep als hij nu onder het oppervlak is, naar alle kanten even sterk aangetrokken. De bol zal dus zoo niet zwaarder wegen, dan wanneer er geen aantrekking tusschen den bol en de vloeistof-deeltjes was. Altijd voor het geval, dat de vloeistof door die zamendrukking van geen groote dichtheid wordt.

Algemeen neemt men echter aan, dat de dichtheid door die aantrekking grooter wordt. Nemen wij dit ook aan, en zij die dichtheid ten opzichte van de andere omringende vloeistof, die wij als eenheid aannemen, gemiddeld in de geheele schil BC, α. De massa binnen den bol MC wordt dan naar beneden getrokken met een kracht gelijk aan

[1]) Pogg. Ann. Bd. 119, Seite 177, en Bd. 122, Seite 1.

$$\frac{4}{3}\pi\overline{MB}^3\beta.+\frac{4}{3}\pi(\overline{MC}^3-\overline{MB}^3)\alpha.$$

(β is de dichtheid van den bol);
en naar boven gedreven met een kracht gelijk aan

$$\frac{4}{3}\pi\overline{MC}^3.$$

Het gewicht, waarmede het in evenwicht moet gehouden worden, is dus

$$\frac{4}{3}\pi(\overline{MB}^3\beta+\overline{MC}^3\alpha-\overline{MB}^3\alpha-\overline{MC}^3)\ldots\ldots(3)$$

Indien de vloeistof niet zamengedrukt is, is $\alpha=1$ en het gewicht noodig om den bol op te houden

$$\frac{4}{3}\pi(\overline{MB}^3\beta-\overline{MB}^3)\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

Uit het verschil van (3) en (4) zoude dan de gemiddelde dichtheid van de vloeistof om den bol naauwkeurig zijn te bepalen. Volgens mijne meening zal men echter geen merkbaar verschil vinden. Moge iemand, die in de gelegenheid is daaromtrent naauwkeurige proeven te doen, zich opgewekt gevoelen een onderzoek daarnaar in te stellen. Bij die proeven zal dan echter nog een bezwaar moeten overwonnen worden, namenlijk de onnaauwkeurigheid van de weging ten gevolge van de wrijving. Wilhelmy maakt daar ook melding van.

Tot dat het onderzoek in den een of anderen zin de questie van de dichtheid aan het oppervlak beslist heeft, zal ik echter de vrijheid nemen in het volgende die meerdere dichtheid nog buiten rekening te laten. In die onderstelling dus zal een bol geheel onder het oppervlak geen meerdere kracht behoeven om in evenwicht te blijven.

Terwijl de bol geheel ondergedompeld was, had de binnenste laag geen uitweg voor den druk van de verdere lagen; wanneer echter een gedeelte der bol slechts is ingedompeld, kan aan den rand, waar de bol boven het water uitkomt, de binnenlaag aan den druk der vloeistof ontwijken, en geeft daardoor de gelegenheid aan de meer buiten gelegen lagen tot naderen naar den bol. Hoe grooter die rand is, hoe meer gelegenheid er bestaat om vloeistof op te heffen. Die vloeistof aan den rand wordt dus tegen de zwaartekracht opgeheven, zal dus op de vloeistof rond den bol drukken, en met deze den bol naar beneden trachten te bewegen. Hoe men zich moet

voorstellen, dat dié druk zich doet gelden, kunnen wij het best aantoonen bij de cylinders, die WILHELMY bij zijn proeven gebruikte. Zij figuur (13) eene voorstelling van de doorsnede van zulk een cylinder met de kogel-massa er omheen. Noemen wij de lagen, bij den cylinder te beginnen, (1), (2) enz., dan wordt (1) door (2) gedrukt, dit heeft de opstijging ten gevolge bij A. Zooals wij dat boven reeds uitvoerig hebben aangetoond.

Dat opgeheven bolletje (1α) drukt op de onderliggende bolletjes, en oefent dus zoodoende een druk uit op de omliggende laag (2) en op den cylinder. Van dien druk wordt buiten die laag (2) of beter buiten den activiteits-straal niets gevoeld, daar hij geheel in evenwicht wordt gehouden door de aantrekking van den cylinder op die omliggende stof. Dat opgeheven bolletje oefent dus op die omliggende laag een even grooten druk uit als op den cylinder; terwijl die druk dus de vloeistof van den cylinder tracht te verwijderen, tracht zij ook tevens den cylinder van de vloeistof te verwijderen; men zoude dus van den druk niets merken, als het oppervlak van de vloeistof-laag (2) even groot was als dat van den cylinder. De oppervlakte van de vloeistof is echter grooter. Op de vloeistof-oppervlakte in haar geheel wordt dus een grootere druk uitgeoefend, en de vloeistof, daaraan willende gehoorzamen, trekt de cylinder mede. Als h de hoogte van het gedeelte van den cylinder is, dat ondergedompeld wordt, en r de straal van het grondvlak; dan is de oppervlakte van de vloeistof-laag (2)

$$2\pi r dr + 2\pi h dr + 2\pi r dh$$

grooter dan de oppervlakte van den cylinder.

Van deze drie termen is $2\pi h dr$ degene, die het minste invloed heeft; daar dit de trekking is, die op den zijwand wordt uitgeoefend, loodrecht op de richting der zwaartekracht. Bovendien wordt die kracht door de tegen elkaar overgestelde trekkingen opgeheven.

De twee andere termen hangen dus van r af, daar wij bij verschillende cylinders dr en dh als standvastig kunnen aannemen. Van deze aantrekkingen moet men dan de composante in de richting van de verticaal hebben. Bij vermeerdering van den straal vermeerdert dus de kracht, waarmede de cylinder naar beneden getrokken wordt.

Vergelijken wij hiermede de proeven van WILHELMY; hij onderzocht cylinders van verschillende grondvlakken en vond nu, dat, bij gelijke diepte van indompeling, de vermeerdering van het gewicht

der cylinders evenredig was met den straal van den cylinder. Deze evenredigheid is niet volkomen, daar bij kleinere cylinders die zwaarte geringer is, dan zij volgens die evenredigheid zoude moeten zijn. Bij kleiner straal is de kromming echter grooter, en is het duidelijk, dat de aantrekking geringer is. Hiermede zoude nu niet overeenstemmen het feit, dat bij vlakke platen de aantrekking naar evenredigheid geringer is dan bij de grootere cylinders. De vlakke platen hebben echter bij kleinere massa eene veel grootere oppervlakte; de nadeelige invloed der wrijving is hier zeker meer merkbaar. WILHELMY noemt de wrijving zeer hinderlijk bij de weging. Die wrijving is dan ook zeker de oorzaak, dat bij grootere diepte de zwaarte schijnbaar toeneemt; zooals ook werkelijk bij de proeven van WILHELMY plaats heeft.

Voordat ik eindig, moet ik nog met een enkel woord wijzen op de vloeistof-vliezen, die als het zekerste bewijs worden aangenomen voor den druk in de oppervlakte-laag.

PLATEAU heeft vele schoone proeven met de vloeistof-vliezen genomen. Wanneer hij een bel had geblazen, bepaalde hij den druk, dien door het vlies werd uitgeoefend, door een manometer [1]). Volgens de theorie verdeelt men het vlies dan in twee vliezen, die ieder eene tegengestelde werking uitoefenen; het eene $B-\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ het andere $B+\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$.

Als het vlies een bol oppervlak is, is $R=R'$; en het verschil der twee krachten is dus

$$\frac{2A}{R};$$

A en B zijn hier standvastigen, die van den aard der vloeistof afhangen. Bij de mathematische beschouwingen heeft men de vliezen altijd als oppervlakken beschouwd: het zijn en blijven echter altijd lichamen. Mijns inziens is, steunende op het feit, dat het lichamen zijn, de oorzaak van den druk in de manometer aan eene geheel andere oorzaak toe te schrijven.

Bij het bepalen van den toestand der vliezen doen zich twee mogelijkheden voor; de eene is, dat de vloeistof in een uitgerekten toestand is; de andere, dat zij in den gewonen toestand is, zooals andere deelen van de oppervlakte-laag eener vloeistof.

---

[1]) PLATEAU § 119.

Van den eersten toestand zoude het noodwendig gevolg zijn, dat het vlies na de opblazing wel weder ineenkromp; en hoe grooter het werd uitgeblazen, hoe sneller de inkrimping plaats zoude hebben. Men ziet echter [1]), dat groote zeepbellen zeer langzaam inkrimpen. De laatste toestand blijft dus over. Wij nemen dus aan, dat de deeltjes in denzelfden toestand zijn als de oppervlakte eener vloeistof.

Zij nu figuur (14) eene voorstelling van een gedeelte van het oppervlak. Zij *abcd* de doorsnede van eene der oneindig kleine afgeknotte pyramiden, waarin wij ons het vlies kunnen verdeeld denken. Het deeltje *p* wordt nu door de deelen van de naastbij liggende pyramide aangetrokken. De resultante van die krachten kunnen wij in twee richtingen ontbinden; de eene loodrecht op *cd*, de andere in dezelfde richting als *cd*. De composante, loodrecht op *cd*, is klaarblijkelijk niet sterk genoeg, het deeltje uit de pyramide te verwijderen; de aantrekking der deeltjes van *abcd* is sterker, daar zij dichter bij zijn gelegen. De andere composante doet den druk op de vlakken *ad* en *bc* ontstaan. Ieder deeltje van *abcd* wordt zoo aangetrokken; de resultante van de geheele aantrekking in de richting *cd* is nul, loodrecht op die richting niet. De pyramide *abcd* kan echter niet aan deze aantrekking gevolg geven, daar *ab* grooter is dan *ed*, en het dus de naastbij zijnde pyramide uit den weg zoude moeten stooten; dit verhindert echter de aantrekking, die door de vlakjes *ad* en *bc* heen worden uitgeoefend. De deeltjes worden dus niet gedragen door de lucht, maar steunen elkander.

Beschouwen wij nu een gedeelte van het vlies, in de nabijheid van het voorwerp, waarop het vlies is vastgehecht. Zij figuur (15) daarvan eene voorstelling. A is het voorwerp. Het deeltje *p* wordt in de richting van A sterker aangetrokken dan in tegengestelde richting. De deeltjes in de onmiddelijke nabijheid van A zullen door de daaropvolgende deeltjes uit den weg gestooten worden, en zoo langzamerhand zal het eene vlakje na het andere weder naar de vaste stof worden getrokken.

De beweging van het vlies is dus toe te schrijven aan de aantrekking van A, en moet daarbij de lucht voor zich uitdrijven. Heeft de lucht nu geen uitweg, dan biedt zij weêrstand. A trekt echter toch de vloeistof-deeltjes, er ontstaat zoo eene meerdere spanning in het vlies, die met den luchtdruk evenwicht maakt.

---

[1]) Plateau § 120.

Dat de druk sterker is, als het vlies kleiner is, is hiervan het gevolg, dat de voet der vloeistof aan A steeds breeder wordt, hoe meer de vloeistof zich weder naar A toebeweegt. Een noodwendig gevolg van deze beschouwingen is, dat als men met een bol van denzelfden straal een grooter gedeelte met de pijp in aanraking brengt, men eene veel snellere zamentrekking verkrijgt. Proeven daaromtrent genomen bevestigen dit vermoeden.

Een zeepbel, die aan de opening der pijp was vastgehecht, vertoonde weinig inkrimping, liet ik die zeepbel naar de zijde der pijp overgaan, en stak ik er een glazen buisje in om de lucht te laten ontwijken, dan had er een snelle inkrimping plaats.

Moge deze schets een denkbeeld geven van mijne voorstelling omtrent de oorzaak van sommige verschijnselen bij vloeistoffen. Eenige mathematische uitkomst heb ik nog niet verkregen; krachten sterker dan de mijne worden daar misschien voor vereischt. Wanneer ik echter deze of gene overtuigd heb van de dwalingen der nu bestaande theoriën, dan zal het mij eene groote voldoening zijn.

AANTEEKENINGEN BETREFFENDE DE THEORIE DER ESSENTIEELE VERGELIJKINGEN DER VLAKKE KROMME LIJNEN,

DOOR

Dr. H. ONNEN.

De essentieele vergelijking eener kromme lijn (Deel I, blz. 1 en vv.) drukt uit, hoe de kromte van punt tot punt verandert; zij geeft dus aan, hoe een punt zich bewegen moet, om op de kromme lijn te blijven. Stelt men zich voor, dat dit punt langs eene rechte lijn voortgaat, terwijl deze onophoudelijk om het bewegende punt draait, dan is het de verhouding tusschen de lineaire snelheid van het punt over de lijn en de hoeksnelheid der lijn, die op elk oogenblik den vorm der kromme bepaalt; en deze verhouding is juist de kromtestraal.

Kent men aan een punt eene zekere bewegingswijze toe, en is men in staat, met behulp van de hieromtrent gegevene voorwaarden, de verhouding tusschen de zoo even genoemde snelheden, voor een willekeurige plaats van het bewegende punt, in de gegevens uit te drukken; dan heeft men eene vergelijking der kromme lijn gevonden, die hare essentieele vergelijking is, of althans met deze nauw verwant is. Zoo kan men veelal in de cinematica eene hulpbron vinden voor het ontwikkelen der essentieele vergelijkingen van kromme lijnen.

Op deze wijze heeft Ernest Lamarle, Hoogleeraar te Gend, in zijn werk: *Exposé géométrique du calcul différentiel et intégral*, voor vele kromme lijnen eenvoudige constructiën en berekeningen van den kromtestraal aangeven. Zelfs is zijne differentiaal-rekening geheel en al op de cinematica gegrond, daar hij in het algemeen een differentiaal-quotient beschouwt als de verhouding tusschen twee snelheden. In

hoeverre deze behandeling van de differentiaal-rekening te verkiezen is boven de gewone beschouwingswijzen, laat ik in het midden; voor meetkundige toepassingen is het echter ongetwijfeld in vele gevallen verkieslijk de differentialen te vervangen door snelheden; al moet men ook toegeven, dat er niet zelden eene meer dan gewone vaardigheid in het samenstellen van de elementen eener meetkundige figuur vereischt wordt, om tot zulke eenvoudige uitkomsten te geraken, als LAMARLE opgeeft. Zelf zegt hij omtrent het te voorschijn halen van eenvoudige eigenschappen uit de samengestelde vormen en figuren, waarin zij als het ware verborgen zijn, *„il faut pour cela quelque effort d'invention"*; en hij schijnt mij toe, bij diergelijke onthullingen eene bijzondere scherpzinnigheid aan den dag te leggen.

Aan de volgende behandeling der cycloïdale lijnen ligt de cinematische methode van LAMARLE ten grondslag. De formule, die hij geeft voor den kromtestraal eener cycloïdale lijn, is dezelfde, die in de volgende bladzijden op eenigszins andere wijze gevonden wordt. Ik ben van den gang zijner redeneering afgeweken, om niet in de noodzakelijkheid te zijn, gebruik te maken van stellingen of eigenschappen, die om der volledigheidswille vooraf zouden moeten bewezen worden.

Ik mag echter niet beginnen over cycloïdale lijnen te schrijven zonder de bekende verhandeling over dit onderwerp van Dr. D. G. CRAMER genoemd te hebben. Het ligt voor de hand, dat eene andere beschouwingswijze, een ander uitgangspunt bij de behandeling eener zelfde zaak, ook andere gezichtspunten oplevert. De essentieele en daarmede verwante vergelijkingen zijn vooral geschikt, om de kromme lijnen in haar *beloop* te volgen en zoodoende de verschillende eigenaardigheden te leeren kennen, die zij daarin kunnen vertoonen. Ik heb dan ook meer uitsluitend het oog gevestigd op de verschillende *vormen*, die bij cycloïdale lijnen in het algemeen onder verschillende omstandigheden kunnen voorkomen; terwijl CRAMER zich ten doel stelde, eene *volledige theorie* der cycloïdalen te leveren, door toepassing van de zuiver analytische methode.

1. *Constructie en berekening van den kromtestraal eener cycloïdale lijn.*

Stel, dat $R = f(u)$ en $R' = F(v)$,

de essentieele vergelijkingen der beide krommen zijn, de eerste van de beschrijvende lijn, de tweede van de richtlijn. Ten aanzien van

deze vergelijkingen wordt alleen ondersteld, dat, wanneer de krommen elkaar raken in een punt, waar in de eerste kromme $u = u_1$ en in de tweede $v = v_1$ is, de hiermede overeenstemmende waarden van R en R' gelijke of tegengestelde teekens hebben; naargelang de kromtestralen der beide krommen aan dezelfde of aan verschillende zijden van de gemeenschappelijke raaklijn gelegen zijn. Immers, noemt men ds een boogelement van de eerste en ds' een boogelement van de tweede kromme, dan moet aan deze differentialen steeds hetzelfde teeken toegedacht worden, daar het gemeenschappelijk raakpunt langs de gemeenschappelijke raaklijn vooruitgaande, beide krommen tegelijk doorloopt. Of derhalve R en R' gelijke of tegengestelde teekens hebben, hangt alleen af van du en dv; zijn beiden positief, — dat is, moet de raaklijn in den zin van de wijzers eener klok draaien, om elk der beide krommen te doorloopen, — dan zijn R en R' beiden rechts van de raaklijn gelegen; zijn du en dv beiden negatief, dan liggen R en R' beiden links van de raaklijn; verkrijgen echter du en dv tegengestelde teekens, dan komen de kromtestralen aan weerszijden van de raaklijn te liggen. Men is gewoon deze betrekkelijke standen van de kromtestralen in het raakpunt te onderscheiden, door te spreken van *epicycloïdale lijnen* en *hypocycloïdale lijnen*. Ofschoon nu de beschrijvende kromme altijd op twee wijzen kan gedacht worden langs de richtlijn te rollen, zoo kan men toch in het algemeen niet zoodanig kenmerk voor elk der op die wijze gevormde cycloïdalen aangeven, dat daardoor de eene als epi- de andere als hypocycloïdale gekarakteriseerd wordt. Want eene zelfde cycloïdale kan op de eene plaats epi- en op de andere hypocycloïdaal zijn; dit zal namelijk gebeuren, zoo dikwijls eene der beide krommen of beiden keerpunten of buigpunten heeft, tenzij toevallig zoodanig punt van de eene kromme juist in een keerpunt of buigpunt van de andere terecht kwam; in het laatste geval veranderen namelijk beide kromtestralen tegelijk van teeken, en zij komen dus tegelijk aan de andere zijde van de raaklijn. In het algemeen echter zal bij ieder keerpunt of buigpunt de kromme lijn hypocycloïdaal worden, als zij epicycloïdaal was, en omgekeerd.

Het eenige, dat gezegd kan worden betreffende de beide cycloïdalen, die verkregen worden door de beschrijvende krommen aan verschillende zijden over de richtlijn te laten rollen, is, dat zij *in overeenkomstige punten tegengesteld-* of *anti-cycloïdaal zijn*, — eene uitdrukking, welker bedoeling wel geene nadere verklaring zal behoeven.

In figuur 1 stelt K de beschrijvende kromme en K' de richtlijn voor; C is het krommingsmiddelpunt van de eerste, C' dat van de tweede, op het oogenblik dat zij elkander in A raken; terwijl P het punt is, dat de cycloïdale beschrijft.

Stellen wij ons eerst voor, dat het punt A de richtlijn K' doorloopt; het beweegt zich daarbij met zekere snelheid AB over de raaklijn ST, terwijl deze om A draait met eene hoeksnelheid $\frac{AB}{AC'}$. Denken wij ons verder dat de kromme K, zonder haren stand met betrekking tot de raaklijn te veranderen, deze beweging medemaakt, dan heeft elk punt in haar vlak eene snelheid, die loodrecht is op en evenredig aan de lijn, die dat punt met A verbindt. Zoo verkrijgt tengevolge van *deze eerste* beweging het punt P eene snelheid loodrecht op PA en gelijk aan $PA.\frac{AB}{AC'}$. Terzelfder tijd rolt echter de kromme K over de raaklijn, en bij deze beweging is de betrekkelijke standverandering van K en ST dezelfde, alsof de raaklijn over de kromme lijn rolde; maar in plaats dat de raaklijn met de hoeksnelheid $\frac{AB}{AC}$ om A draait *in dezelfde richting* als de wijzers eener klok, draait nu de kromme met *dezelfde hoeksnelheid in tegengestelden zin* om A. Tengevolge van *deze tweede* beweging verkrijgt dus ieder punt in het vlak der kromme K eene tweede snelheid, loodrecht op en evenredig aan zijn afstand tot A, — maar in tegengestelde richting van de eerste snelheid. Voor P is dus deze snelheid $= -PA.\frac{AB}{AC}$. Ten slotte wordt dus de snelheid van P op ieder willekeurig oogenblik in richting en grootte voorgesteld door

$$PA\left(\frac{AB}{AC'}-\frac{AB}{AC}\right)=\frac{PA.(AC-AC')AB}{AC.AC'}.$$

Zij PM de aldus gevonden snelheid van P. Ontbinden wij de snelheid AB in AD langs, en AE loodrecht op AP; en noemen wij O het krommingsmiddelpunt der cycloïdale, dan zal $\frac{AE}{AO}$ zoowel als $\frac{PM}{PO}$ de hoeksnelheid zijn, waarmede de normaal PA draait. Bijgevolg is het snijpunt van ME met PA het krommingsmiddelpunt O, en PO de kromtestraal.

De constructie van het punt O wordt uiterst eenvoudig, als men,

voor het punt E kiest het snijpunt van de loodlijn AE met PC; trekt men dan EB ∥ PA, dan wordt AB, die toch immers willekeurig kan genomen worden, gelijk aan $\frac{AE}{AP}.AL$, wanneer L het snijpunt is van PM met AC. Dit is in de figuur geschied; en nu is

$$PM = \frac{AC-AC'}{AC.AC'}.PA.AB = \frac{AC-AC'}{AC.AC'}.AE.AL,$$

en
$$PL = \frac{AE \times CL}{AC} = \frac{AL-AC}{AC}.AE;$$

waaruit

$$LM = PM + PL = \frac{AC.AE(AL-AC')}{AC.AC'} = \frac{AE.LC'}{AC'};$$

waaruit blijkt, dat de lijn MOE tevens door C′ gaat.

Hieruit volgt nu de volgende constructie.

Vereenig het beschrijvende punt P *met het raakpunt* A *en met het krommingsmiddelpunt* C *der beschrijvende kromme. Plaats in* A *eene loodlijn op* AP, *welke* PC *in* E *snijdt, dan zal het snijpunt van* AP *met de lijn, die* E *vereenigt met het krommingsmiddelpunt* C′ *der richtlijn, het krommingsmiddelpunt* O *der cycloïdale zijn.*

Stellen wij $AC = R$, $AC' = R'$ en noemen wij $PA = r$, hoek $PAC = \alpha$, dan vindt men de volgende uitdrukking voor den kromtestraal $PO = \rho$. Daar $AE = AB\, Cos\, \alpha$ is, heeft men terstond

$$\frac{PM}{AB\, Cos\, \alpha} = \frac{\rho}{r-\rho} \text{ of } \rho = \frac{PM.r}{PM + AB\, Cos\, \alpha}.$$

Maar
$$PM = \frac{(R-R')r}{RR'}.AB,$$

dus
$$\rho = \frac{(R-R')r^2}{(R-R')r + RR'\, Cos\, \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Deze vergelijking vormt den grondslag van al onze verdere beschouwingen.

2. *De eigenlijke essentieele vergelijking eener cycloïdale lijn.*

Wij zullen beginnen met eenige nieuwe veranderlijke grootheden in te voeren. Vestigen wij daartoe onze aandacht op den driehoek PAC, gevormd door het beschrijvende punt P, het raakpunt der beschrijvende kromme K en het daarmede overeenkomstige krommingsmiddelpunt C, dat is, het overeenkomstige punt der evoluut, die wij

door K_{-1} aanduiden. Vereenigt men het beschrijvende punt met verschillende punten van K, en tevens met de daarmede overeenkomstige punten van K_{-1}, dan verkrijgt men de verschillende vormen, die deze driehoek heeft, als de beschrijvende kromme de richtlijn in de aangenomen punten raakt. De vormverandering, die de driehoek PAC ondergaat, als het punt A de kromme K, en C de evoluut K_{-1} doorloopt, bestaat hierin, dat het punt A met eene snelheid $AD = AB\,Sin\,\alpha$ over PA voortgaat, terwijl deze lijn met eene hoeksnelheid $\frac{AE}{PA} = \frac{AB\,Cos\,\alpha}{r}$ om P draait. Is verder CB_{-1} de snelheid, waarmede het punt C op dit oogenblik de kromme K_{-1} doorloopt, dan heeft dit punt eene snelheid $CD_{-1} = CB_{-1}\,Sin\,\alpha_{-1}$ langs de zijde PC; en deze lijn eene hoeksnelheid $\frac{CE_{-1}}{PC} = \frac{CB_{-1}\,Cos\,\alpha_{-1}}{r_{-1}}$ om het punt P; waarin α_{-1} en r_{-1} dezelfde grootheden met betrekking tot de kromme K_{-1} beteekenen, als α en r met betrekking tot K. De gevonden snelheden zijn echter evenredig met de differentialen der afgelegde wegen. Nu is het boogelement der kromme K gelijk aan $R\,du$, en dat der kromme K_{-1} gelijk $dR = R_{-1}\,du$, als R_{-1} de kromtestraal $C_{-1}C$ der evoluut is. Noemt men verder $d\phi$ en $d\phi_{-1}$ de hoekelementen, door de voerstralen PA en PC beschreven, dan is

$$dr = R\,Sin\,\alpha\,du, \;\ldots\; (2) \qquad r\,d\phi = R\,Cos\,\alpha\,du, \;\ldots\; (4)$$

$$dr_{-1} = R_{-1}\,Sin\,\alpha_{-1}\,du, \;.\; (3) \qquad r_{-1}\,d\phi_{-1} = R_{-1}\,Cos\,\alpha_{-1}\,du \;.\; (5)$$

Maar $$d\phi - du = d\alpha,$$

en $$d\phi_{-1} - du = d\alpha_{-1};$$

dus $$r(du + d\alpha) = R\,Cos\,\alpha\,du,$$

en $$r_{-1}(du + d\alpha_{-1}) = R_{-1}\,Cos\,\alpha_{-1}\,du;$$

of $$d\alpha = \frac{R\,Cos\,\alpha - r}{r}\,du, \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (6)$$

en $$d\alpha_{-1} = \frac{R_{-1}\,Cos\,\alpha_{-1} - r_{-1}}{r_{-1}}\,du \;\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

Door integratie van de gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen (2) en (6) vindt men r en α in functie van u. Dezelfde uitkomst kan verkregen worden, door r_{-1} en α_{-1} uit (3) en (7) op te lossen, en daarna r en α te berekenen met behulp van de trigonometrische betrekkingen

$$r^2 = r_{-1}{}^2 + R^2 - 2r_{-1}\, R\, Sin\, \alpha_{-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

$$r\, Sin\, \alpha = r_{-1}\, Cos\, \alpha_{-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Substitueert men de gevonden waarden van r en α in (1), dan is ρ uitgedrukt in functie van u en v. De standvastigen der integratiën kunnen bepaald worden, door aan te nemen, dat de beweging begint op het oogenblik, dat $u = 0$ is, en dat alsdan $\alpha = \alpha_0$, $r = r_0$, $\alpha_{-1} = (\alpha_{-1})_0$ en $r_{-1} = (r_{-1})_0$ is. De grootheden α_0, r_0, $(\alpha_{-1})_0$ en $(r_{-1})_0$ worden bepaald door de plaats van het punt P in het vlak de kromme K.

De gelijkheid der bogen, die het punt A over de beide krommen K en K' doorloopt, wordt uitgedrukt door

$$\int_0^u R\,du = \int_{v_0}^v R'dv; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

als v_0 de waarde van v is in het punt, waar de richtlijn door de beschrijvende lijn geraakt wordt, op het oogenblik, dat de beweging begint. Met behulp van (10) kan v of u geëlimineerd worden, zoodat ρ in functie van eene dezer veranderlijken is uitgedrukt.

Noemen wij ten slotte w den hoek, dien de normaal PO of PA der cycloïdale sedert het begin der beweging beschreven heeft, dan is

$$dw - dv = d\alpha;$$

want de verandering, die α ondergaat, is gelijk aan de hoeksnelheid van AO om O verminderd met de hoeksnelheid van AC′ om C′. En uit deze gelijkheid volgt

$$w - (v - v_0) = \alpha - \alpha_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Hierbij is aangenomen, dat de hoeken w geteld worden van het oogenblik af, waarop de beweging begint.

Heeft men door integratie van (2) en (6) α, en door integratie van (10) v in functie van u uitgedrukt, dan kan vergelijking (11) dienen, om u in functie van w te vinden, en zoodoende ook ρ; waardoor dan de eigenlijke essentieele vergelijking der cycloïdale bepaald zou zijn. In zeer vele gevallen zal men hierbij op onoverkomelijke bezwaren stuiten. Van de cycloïdische lijnen kan men in het algemeen slechts ρ in functie van u of v, in bijzondere gevallen echter ook in functie van w, uitdrukken.

Somtijds kan het van belang zijn, gebruik te maken van de vergelijkingen

$$d\sigma = \frac{(R - R')r}{RR'}\, ds, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$dw = \frac{(R-R')r + RR' \operatorname{Cos} \alpha}{RR'r} ds; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

waarin $d\sigma$ het boogelement der cycloïdale beteekent, en waarin ds door Rdu of $R'dv$ kon vervangen worden. De eerste dezer vergelijkingen wordt verkregen door op te merken, dat de boogelementen $d\sigma$ en ds evenredig zijn met de snelheden PM en AB, en dat voor deze verhouding gevonden is (blz. 34)

$$\frac{(R-R')r}{RR'}.$$

De tweede vindt men met behulp van de betrekking

$$\rho = \frac{d\sigma}{dw},$$

waaruit
$$dw = \frac{d\sigma}{\rho}.$$

Ten aanzien van den positieven en negatieven toestand der ingevoerde veranderlijke grootheden valt het volgende op te merken.

Van de zijden, die den driehoek APC vormen, kan vooreerst AC $= R$ door *nul* of door *oneindig* heen van teeken veranderen. Maar ook r en r_{-1} kunnen van teeken veranderen; en wel door ∞ heen, als de lijnen K en K_{-1} asymptoten hebben en met één tak de positieve, met een anderen tak de negatieve richting harer asymptoten naderen; door *nul* heen, wanneer de punten A en C het punt P passeeren. Ten einde voor alle mogelijke gevallen de trigonometrische formulen (8) en (9) te doen gelden, stellen wij vast, dat α en α_{-1} de hoeken zijn, gevormd door de *positieve* richtingen der normalen AC en CC_{-1} met de *positieve* richtingen der lijnen AP en CP; en dat die hoeken zelve *positief* zijn, als men in de hoekpunten *rechts* moet draaien, om van de normaal op het andere been over te gaan.

3. *Beschouwing der cycloïdalen, door de verschillende punten van het vlak der beschrijvende kromme gelijktijdig beschreven, als deze de richtlijn in een gegeven punt raakt. Buigpuntscirkel. Focale.*

Wij gaan van de onderstelling uit, dat R en R' beiden van *nul* verschillen, en dat R positief is. Voor alle cycloïdalen, welker beschrijvende punten bij zekeren stand der beschrijvende kromme in de gemeenschappelijke raaklijn der beide krommen liggen, is $\alpha = \pm \frac{1}{2}\pi$, dus $\operatorname{Cos} \alpha = 0$ en $\rho = r$; terwijl, voor $\operatorname{Cos} \alpha \gtrless 0$, ook $\rho \gtrless r$ zal

zijn, wanneer $0 < R < R'$ is, maar $\rho \lesseqgtr r$, wanneer $R > R'$ of $R < 0$ is. De meetkundige beteekenis hiervan is deze, dat van alle cycloïdalen, beschreven door de verschillende punten eener raaklijn aan de beschrijvende kromme, de krommingsmiddelpunten tegelijk in het raakpunt A dier raaklijn vallen op het oogenblik, dat het punt A op de richtlijn ligt; terwijl op dat zelfde oogenblik voor ieder beschrijvend punt P, dat aan de *binnenzijde* der raaklijn (d. i. aan de zijde der kromme) ligt, het krommingsmiddelpunt aan dezelfde zijde van A gelegen is als P, wanneer de lijn *uitwendig-hypocycloïdaal* ($R > R'$) of *epicycloïdaal* ($R < 0$) is; aan de andere zijde, wanneer zij *inwendig-hypocycloïdaal* ($0 < R < R'$) is; voor ieder beschrijvend punt aan de *buitenzijde* der raaklijn juist omgekeerd.

Beschouwen wij het raakpunt zelf als beschrijvend punt, dan is voor dat punt $r = 0$ en dus ook $\rho = 0$. De cycloïdale vormt daar een keerpunt, want uit de vergelijkingen (12) en (13) blijkt, dat $d\sigma$ *wel*, maar $d\omega$ *niet* tegelijk met r van teeken verandert. Hierbij moet in aanmerking genomen worden, dat tegelijk met r ook $Cos\,\alpha$ van teeken verandert; wel is de hoek PAC, onmiddellijk voor en na het oogenblik dat wij beschouwen, scherp, maar de richting van het been AC verandert *niet* van teeken, die van het been PA *wel;* dus moet α stomp worden als hij scherp was, en omgekeerd.

Het raakpunt A der beide krommen is het eenige punt in het vlak der beschrijvende kromme, dat op dit oogenblik een keerpunt vormt.

Is de gemeenschappelijke raaklijn der beide krommen de meetkundige plaats van alle punten, waar het krommingsmiddelpunt der cycloïdalen in het raakpunt ligt; er is nog eene meetkundige plaats van punten, waar de kromtestraal oneindig is, en eene meetkundige plaats van punten, waar hij een maximum of minimum bereikt. De kromtestraal wordt oneindig, als

$$(R-R')r + RR'\,Cos\,\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

is. En daarbij wordt steeds een buigpunt gevormd, tenzij dat $r = 0$ en $Cos\,\alpha = 0$ zijn, welk geval wij reeds besproken hebben; of wel, dat, terwijl r en α de waarden passeeren, die aan vergelijking (14) voldoen, de vorm $(R-R')r + RR'\,Cos\,\alpha$ daarbij niet van teeken verandert. Dan toch verandert ook ρ niet van teeken, en er kan van een buigpunt geen sprake zijn; $\rho = \infty$ is dan een maximum. In het algemeen echter zal ρ door ∞ heen van teeken veranderen; en dan zal, blijkens de vergelijkingen (12) en (13), $d\omega$ door *nul*

heen van teeken veranderen, maar $d\sigma$ niet, waaruit het bestaan van eén buigpunt blijkt.

Nu is vergelijking (14) de poolvergelijking van een cirkel, als de pool in den omtrek ligt; en de middellijn van dezen cirkel is gelijk aan $\frac{RR'}{R-R'}$. Construeert men dus (figuur 2) $AV = \frac{RR'}{R-R'}$ d. i. eene vierde evenredige tot CC', C'A' en CA, en beschrijft men op deze lijn als middellijn een cirkel; dan hebben alle cycloïdalen, welker beschrijvende punten zich in den omtrek van dezen cirkel bevinden, aldaar een buigpunt, uitgenomen in het punt A, waar $r = 0$ en $Cos\,\alpha = 0$ is, en een keerpunt ontstaat, en in het punt, waar $\rho = \infty$ een maximum is. Dit tweede punt kan geen ander dan het punt V zijn. Immers, denkt men zich dienzelfden cirkel geconstrueerd, als de beschrijvende lijn zich in de onmiddellijk voorafgaande en volgende standen bevindt, dan zullen alle beschrijvende punten, waarvoor $(R-R')r + RR'\,Cos\,\alpha$ van teeken verandert, in den voorafgaanden stand buiten en in den volgenden stand binnen den cirkel AV liggen, of omgekeerd; omdat voor ieder punt buiten dien cirkel $(R-R')r + RR'\,Cos\,\alpha > 0$, voor ieder punt er binnen $(R-R')r + {}$ $+ RR'\,Cos\,\alpha < 0$ is. Verandert nu $(R-R')r + RR'\,Cos\,\alpha$ niet van teeken, dan blijft het beschrijvende punt *buiten* den cirkel AV, zoodat de cycloïdale den cirkel *raakt;* en dit kan slechts in V geschieden.

In de figuur ligt de cirkel AV aan de negatieve zijde van de normaal AC, omdat $R > R'$, dus $\frac{RR'}{R-R'}$ positief is; scherpe hoeken α geven dus negatieve waarden voor r, stompe geven positieve. Is echter $0 < R < R'$, dan ligt de cirkel aan de andere zijde van de gemeenschappelijke raaklijn. Voor $R < 0$ komt hij echter weer aan denzelfden kant als in de figuur. Men kan dit ook aldus uitdrukken: bij den *uitwendig-hypocycloïdalen* toestand $(R > R')$ liggen alle buigpunten aan de andere zijde van de gemeenschappelijke raaklijn als de beschrijvende kromme; bij den *inwendig-hypocycloïdalen* $(0 < R < R')$ en den *epicycloïdalen* toestand $(R<0)$ aan dezelfde zijde.

In eene door Cramer aangehaalde verhandeling van de la Hire, voorkomende in de *Mémoires de l'Académie des Sciences* (1706), over de cycloïdale lijnen, is deze zelfde cirkel, dien wij *buigpuntscirkel* zullen noemen, langs zuiver meetkundigen weg gevonden; en vormt hij het uitgangspunt van eene menigte constructiën. Van de meetkundige plaats van alle punten, die bij een gegeven stand der beschrijvende lijn een *top* vormen, spreekt echter de la Hire niet.

Deze meetkundige plaats is eene kromme lijn, waarvan de vergelijking in rechtlijnige coördinaten van den derden graad is. Zij wordt aldus gevonden.

Differentieert men de vergelijking (1) volgens u, dan komt er na herleiding

$$\frac{\delta\rho}{du}=\frac{\left\{\begin{array}{c}(R-R')\{(R-R')r+2RR'\,Cos\,\alpha\}r\dfrac{dr}{du}+r^2\,Cos\,\alpha\left(R'^2\dfrac{dR}{du}-R^2\dfrac{dR'}{du}\right)+\\ +RR'(R-R')r^2\,Sin\,\alpha\dfrac{d\alpha}{du}\end{array}\right\}}{\{(R-R')r+RR'\,Cos\,\alpha\}^2}.$$

Substitueert men hierin de uit (2) en (6) voortvloeiende waarden

$$\frac{dr}{du}=R\,Sin\,\alpha \text{ en } \frac{d\alpha}{du}=\frac{R\,Cos\,\alpha-r}{r},$$

en merkt men op, dat $\dfrac{dR}{du}=R_{-1}$ is; terwijl de kromtestraal $C'C'_{-1}=$ $=R'_{-1}$ der evoluut van K' (figuur 2) gelijk $\dfrac{dR'}{dv}$, en dus

$$\frac{dR'}{du}=\frac{dR'}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=R'_{-1}\frac{R}{R'}$$

is, omdat $Rdu=R'dv$ is; dan verkrijgt men ten slotte, na behoorlijke herleiding,

$$\frac{\delta\rho}{du}=\frac{r}{R'}\cdot\frac{\left\{\begin{array}{c}(R'^3R_{-1}-R^3R'_{-1})r\,Cos\,\alpha+RR'(R-R')(R-2R')r\,Sin\,\alpha+\\ +3R^2R'^2(R-R')\,Sin\,\alpha.Cos\,\alpha\end{array}\right\}}{\{(R-R')r+RR'\,Cos\,\alpha\}^2}.$$

In het algemeen, — dat is, zonder acht te geven op de bijzondere gevallen, dat $r=0$ of de noemer *nul* wordt, welke gevallen reeds behandeld zijn, — zal dit differentiaal-quotient verdwijnen voor

$$\begin{array}{r}(R'^3R_{-1}-R^3R'_{-1})r\,Cos\,\alpha+RR'(R-R')(R-2R')r\,Sin\,\alpha+\\ +3R^2R'^2(R-R')\,Sin\,\alpha.Cos\,\alpha=0\ \ldots\ldots\ (15)\end{array}$$

Deze is de poolvergelijking der kromme, waarop alle punten liggen, die tegelijkertijd een top vormen.

Deelen wij door den derden term, en stellen wij kortheidshalve

$$\frac{3R^2R'^2(R-R')}{R'^3R_{-1}-R^3R'_{-1}}=-X \text{ en } \frac{3RR'}{R-2R'}=-Y,\ \ldots\ (16)$$

dan komt er

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{r}{Sin\,\alpha}+\frac{1}{Y}\frac{r}{Cos\,\alpha}=1;$$

of, als men $r\,Sin\,\alpha = y$ en $r\,Cos\,\alpha = x$ stelt,

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{r^2}{y}+\frac{1}{Y}\cdot\frac{r^2}{x}=1; \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

waaruit vooreerst blijkt, dat de vergelijking in rechthoekige coördinaten van den derden graad is; want $r^2 = x^2 + y^2$.

Denkt men zich nu voor elk punt der meetkundige plaats eene derde evenredige ξ tot y en r, en eene derde evenredige η tot x en r; dan zijn ξ en η de loopende coördinaten eener rechte lijn

$$\frac{\xi}{X}+\frac{\eta}{Y}=1, \ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

die op de lijnen AC en AS (figuur 2), die resp. de abscissen- en ordinaten-assen zijn, segmenten bepaalt, gelijk aan X en Y.

Zonder ons te bekommeren over de wijze hoe, kunnen wij volstaan met de opmerking, dat de segmenten X en Y meetkundig geconstrueerd kunnen worden, als van de richtlijn en van de beschrijvende lijn gegeven zijn de kromtestralen en die harer evoluten, voor het punt, waarin zij elkander raken. Zet men dan deze lijnen $X = \mathrm{A}a$ en $Y = \mathrm{A}b$ op AC en AS af, aan de eene of aan de andere zijde van A, naar gelang X en Y positief of negatief zijn, dan kan de lijn (18) getrokken worden. Vereenigt men dan het punt A met een willekeurig punt q dezer lijn, trekt $qn \perp$ AS en $nm \perp \mathrm{A}q$, dan is vooreerst

$$mn = \frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}};$$

maar $$\xi = \frac{r^2}{y} \text{ en } \eta = \frac{r^2}{x};$$

dus, na substitutie $$mn = \frac{r^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = r,$$

dat is de voerstraal van een punt der kromme. Daar verder $r^2 = \xi y = \eta x$ of $\frac{\xi}{\eta} = \frac{x}{y}$ is, ligt dit punt op de lijn Aq of op haar verlengde, naar gelang ξ en η gelijke of tegengestelde teekens hebben. In de figuur is voor het punt q de *abscis* ξ negatief en de *ordinaat* η positief; dus moet van het punt p der kromme de *ordinaat* y negatief en de *abscis* x positief zijn.

Op deze wijze is in figuur 2 de lijn WAW′ geconstrueerd. Zij is de *focale* van Queteler en wordt door Dr. K. D. Schönfeld, in zijne Dissertatie *„over de omgekeerde kegelsneden"* (1866) verkregen door

omkeering eener gelijkzijdige hyperbool, d. w. z. door uit een willekeurig punt op den omtrek van zulk eene kegelsnede voerstralen te trekken, en daarop, van het willekeurige punt uit, stukken af te zetten, die omgekeerd evenredig zijn met de voerstralen. De poolvergelijking der focale wordt dus gevonden, door in de poolvergelijking eener gelijkzijdige hyperbool, waarbij de pool ergens in den omtrek ligt, voor den voerstraal te substitueeren $\frac{a^2}{r}$; als a de standvastige van omkeering is. Dr. SCHÖNFELD vindt zoodoende voor de vergelijking der focale in rechthoekige coördinaten

$$a^2(x^2-y^2)+2(Cx+Dy)(x^2+y^2)=0;$$

en deze gedaante verkrijgt ook vergelijking (17), als daarin de assen 45° gedraaid worden. Vervangt men namelijk in (17) x door $\frac{1}{2}\sqrt{2}(x-y)$ en y door $\frac{1}{2}\sqrt{2}(x+y)$, dan komt er

$$-XY(x^2-y^2)+\sqrt{2}\left\{(X+Y)x+(X-Y)y\right\}(x^2+y^2)=0.$$

Neemt men nu $a^2=-XY$, dan is

$$C=\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \text{ en } D=\frac{X-Y}{\sqrt{2}}.$$

De vergelijking der hyperbool, door welker omkeering onze focale ontstaat, in coördinaten, die evenwijdig zijn met de hoofdassen, wordt dan

$$x^2-y^2+\sqrt{2}(X+Y)x+\sqrt{2}(X-Y)y=0.$$

Wij zullen ons niet verder met de eigenschappen der focale inlaten. Wij bepalen ons tot de vermelding, dat beide takken eene zelfde lijn asymptotisch naderen, welke asymptoot evenwijdig is aan de lijn, die door vergelijking (18) is voorgesteld; en vestigen de aandacht op de constructie, waardoor wij de focale verkregen hebben, eene constructie, die in de Dissertatie van Dr. SCHÖNFELD niet voorkomt.

Onder bijzondere omstandigheden neemt de focale bijzondere vormen aan.

Als vooreerst $R'^3R_{-1}-R^3R'_{-1}=0$ is, kan het eerste lid van vergelijking (15), in twee factoren gesplitst worden, te weten

$$Sin\,\alpha\left\{(R-2R')r+3RR'\,Cos\,\alpha\right\}=0.$$

De focale is vervormd tot de rechte lijn $Sin\,\alpha=0$, dat is de lijn AC, en een cirkel

$$r=-\frac{3RR'}{R-2R'}Cos\,\alpha,$$

welks middellijn eene lengte heeft $= \dfrac{3RR'}{R-2R'}$ en langs AC ligt.

Deze cirkel ligt links of rechts van ST, naar gelang $\dfrac{3RR'}{R-2R'} \lesseqgtr 0$ is.

Dit geval doet zich onder anderen voor bij de hypo- en epicycloïden.

Is ten tweede $R = 2R'$, dan wordt de vergelijking

$$Cos\,\alpha\left\{(R_{-1}-8R'_{-1})r+3R^2\,Sin\,\alpha\right\}=0;$$

dat is de rechte lijn ST en een cirkel,

$$r=-\frac{3R^2}{R_{-1}-8R'_{-1}}\,Sin\,\alpha,$$

welks middellijn $= \dfrac{3R^2}{R_{-1}-8R'_{-1}}$ langs ST ligt, en wel boven of onder A, naar gelang deze waarde $\lesseqgtr 0$ is.

Is eindelijk $R = R'$, dan blijft van vergelijking (15) slechts de eerste term over, en de focale is gereduceerd tot de raaklijn ST.

Behalve het punt A zullen de buigpunten-cirkel en de focale steeds nog één punt s gemeen hebben. Elimineert men namelijk r tusschen de beide poolvergelijkingen dezer lijnen, dan vindt men

$$Tg\,\alpha=\frac{R'^2R_{-1}-R^2R'_{-1}}{RR'(R-R')(2R-R')}=\frac{Y(R-2R')}{X(2R-R')}.$$

Wel is waar geeft de vergelijking twee waarden voor α, maar van deze kan er slechts ééne aan de cirkelvergelijking voldoen. In dat punt zal het buigpunt blijven bestaan, daar ρ niet nalaat door ∞ heen van teeken te veranderen, terwijl $\dfrac{d\rho}{du}=\dfrac{0}{0}$ wordt, waardoor het kenmerk van een maximum of minimum niet aanwezig is.

4. *Beschouwing der cycloïdalen, beschreven door de verschillende punten eener met de beschrijvende kromme verbonden rechte lijn.*

Wij denken ons eene rechte lijn, die de beschrijvende lijn snijdt en onveranderlijk met deze verbonden is, en volgen de verschillende punten dezer snijlijn in hunne beweging, terwijl de beschrijvende lijn over de richtlijn rolt.

Wij kunnen ons echter nog eene andere voorstelling maken. Wij kunnen ons namelijk voorstellen, dat in ieder punt van de beschrijvende kromme geconstrueerd zijn de buigpuntscirkel en de focale, die dan als het ware een krans vormen om de beschrijvende lijn.

Deze krans zal door de snijlijn doorsneden worden. Deze ontmoet een gedeelte der buigpuntscirkels, en elk van deze ontmoetingspunten is een punt van de snijlijn, dat een buigpunt vormt, als de beschrijvende lijn de richtlijn in het overeenstemmende punt raakt. Op deze wijze vindt men in eens alle punten der snijlijn, die buigpunten vormen. Op eene enkele uitzondering na worden alle focalen door de snijlijn gesneden; en er zal ook geen punt der snijlijn zijn, dat *niet* op eene der focalen ligt. Hieruit blijkt, dat *niet ieder* punt der snijlijn een buigpunt maakt, maar dat *alle* punten vroeger òf later toppen moeten vormen.

Zij nu op zeker oogenblik de stand der beide krommen K en K' als in figuur 1 is voorgesteld, en denken wij ons van dit oogenblik af de beweging voortgezet, dan zal nog gedurende eenigen tijd $R > R'$ d. i. de kromme *uitwendig-hypocycloïdaal* blijven; en zoo lang blijft ook de buigpunts-cirkel aan de buitenzij der raaklijn. Gesteld echter dat het verschil tusschen R en R' voortdurend kleiner en eindelijk *nul* wordt, dan wordt de buigpunts-cirkel steeds grooter en is eindelijk getransformeerd in de raaklijn. De *knoop* der focale daarentegen wordt meer en meer dicht getrokken, totdat ook deze, met hare asymptoot, met de raaklijn samenvalt, als $R = R'$ geworden is. Op dat oogenblik trekken de krommingsmiddelpunten van alle cycloïdalen gelijktijdig over de snijlijn heen; de kromtestralen veranderen van teeken; althans, wanneer R voortgaat sneller af te nemen dan R'; en alle cycloïdalen vormen een keerpunt, daar $d\sigma$ wel, maar dw niet van teeken verandert. Één punt van de snijlijn is er echter, dat eene uitzondering maakt, namelijk haar snijpunt met de raaklijn der beide krommen. Voor dat punt is $Cos\,\alpha = 0$, en wordt dus $\rho = \frac{0}{0}$. Laat ons trachten deze waarde nader te bepalen.

Deelt men teller en noemer der breuk, die de waarde van ρ voorstelt, door $R - R'$, dan komt er

$$\rho = \frac{r}{r + \frac{RR'\,Cos\,\alpha}{R - R'}};$$

en het is duidelijk, dat de waarde der breuk $\frac{Cos\,\alpha}{R - R'}$ voor $\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ en $R = R'$ slechts gezocht behoeft te worden, daar, volgens onderstelling, R, R' noch r nul zijn. Differentieert men teller en noemer dezer breuk, en neemt men daarbij u als onafhankelijk veranderlijke aan, dan verkrijgt men

$$\frac{Sin\,\alpha\,\frac{d\alpha}{du}}{\frac{dR'}{du}-\frac{dR}{du}}.$$

Maar $\frac{d\alpha}{du}=\frac{R\,Cos\,\alpha-r}{r}$, $\frac{dR'}{du}=R'_{-1}\,.\,\frac{R}{R'}$ en $\frac{dR}{du}=R_{-1}$;

dus verandert de breuk in deze

$$\frac{R'\,(R\,Cos\,\alpha-r)\,Sin\,\alpha}{RR'_{-1}\,r-R'R_{-1}\,r};$$

en dit wordt voor $R=R'$ en $\alpha=\pm\frac{1}{2}\pi$

$$\mp\frac{1}{R'_{-1}-R_{-1}}.$$

Substitueert men deze waarde in de formule voor ρ, dan heeft men RR' door R'^2 vervangende,

$$\frac{r^2\,(R'_{-1}-R_{-1})}{r(R_{-1}-R'_{-1})\mp R'^2}.$$

Hieruit blijkt, dat in het bedoelde punt de kromtestraal in het algemeen eene eindige waarde zal hebben en niet van teeken verandert. Uit de vergelijkingen (12) en (13) ziet men bovendien, dat $d\sigma$ en dw beiden door *nul* heen van teeken veranderen, hetgeen zeggen wil, dat er een *snavel* (keerpunt van de tweede soort) ontstaat (verg. Deel I, blz. 9).

Thans worden de cycloïdalen *inwendig-hypocycloïdaal*. De buigpunten-cirkel en de knoop der focale liggen beiden onder de raaklijn; maar de laatste is aan de andere zijde der normaal gekomen.

Wordt $R=0$ en daarna negatief, dan ontstaat de *epicycloïdale* toestand. De overgang is kenbaar, door dat voor alle cycloïdalen $\rho=r$ wordt, dus alle krommingsmiddelpunten in het raakpunt vallen. Toen $R=R'$ was, passeerden alle krommingsmiddelpunten de snijlijn; sommigen echter zullen naar A toe, anderen van A af zich bewogen hebben. Zullen nu ook de laatsten voor $R=0$ in A komen, dan moeten zij het oneindige omtrekken en zoo van de andere zijde A naderen. De cycloïdalen, waartoe deze krommingsmiddelpunten behooren, moeten dus allen een buigpunt verkrijgen in de periode, waarin R van R' tot 0 afneemt; de overigen daarentegen kunnen in die periode geen buigpunt hebben.

Wij moeten nu onderscheid maken, of het punt der beschrijvende lijn, waar R door *nul* heen van teeken verandert, een keerpunt of

een buigpunt is. In het eerste geval verandert ds van teeken, en dus $d\sigma$ en dw *niet*. In het tweede geval verandert ds *niet* van teeken, en dus $d\sigma$ en dw beiden *wel*. De cycloïdalen hebben dus in het eerste geval *geen* bijzonder punt, in het tweede een *snavel*.

Bij den overgang van den hypocycloïdalen tot den epicycloïdalen toestand komen de buigpunten-cirkel en de knoop der focale beiden boven de raaklijn te liggen.

Terwijl R tot ∞ aangroeit, geschiedt er niets bijzonders, behalve dat vele cycloïdalen hare toppen en sommigen hare buigpunten vormen. De krommingsmiddelpunten komen niet voorbij de snijlijn, behalve wanneer het beschrijvende punt op de beschrijvende kromme ligt, en deze in dit punt de richtlijn raakt, waardoor er een keerpunt gevormd wordt. Voor alle overige cycloïdalen *blijft* het krommingsmiddelpunt aan dezelfde zijde van het beschrijvende punt; terwijl op ieder oogenblik het snijpunt van de snijlijn met de gemeenschappelijke raaklijn tot eene cycloïdale behoort, welker krommingsmiddelpunt het punt A voorbijtrekt.

Wij laten nu R door ∞ heen van teeken veranderen, en dus weer positief worden. De vergelijking van den buigpunts-cirkel wordt voor $R = \infty$

$$r + R' \, Cos \, \alpha = 0.$$

Deze cirkel heeft dus den kromtestraal der richtlijn tot middellijn en ligt boven de raaklijn.

De kromtestraal der cycloïdale wordt

$$\rho = \frac{r^2}{r + R' \, Cos \, \alpha};$$

terwijl $\delta\sigma$ en dw al of niet van teeken veranderen, naar gelang ds van teeken verandert. Is derhalve het punt der beschrijvende kromme, waar R door ∞ heen van teeken verandert, een buigpunt, dan is het overeenkomstige punt der cycloïdale een *gewoon punt;* is het een keerpunt, dan heeft de cycloïdale een *snavel*.

De cycloïdale is nu weder uitwendig hypocycloïdaal geworden; en wij hebben de belangrijkste veranderingen, die R ondergaan kan, nagegaan; maar daarbij is stilzwijgend ondersteld, dat R' steeds eindig en positief bleef. Verandert echter R' door *nul* of door ∞ heen van teeken, dan zal daardoor in de cycloïdale een snavel gevormd worden, als $R' = 0$ een buigpunt, of $R' = \infty$ een keerpunt is; terwijl een gewoon punt ontstaat, als $R' = 0$ een keerpunt, of $R' = \infty$ een buigpunt is.

5. *Anticycloïdalen. Gelijkvormige cycloïdalen, voortgebracht door twee beschrijvende lijnen, die over dezelfde richtlijn rollen.*

Wanneer twee congruente beschrijvende lijnen tegelijk over dezelfde richtlijn rollen, en deze telkens in gelijkstandige punten raken, terwijl de kromtestralen steeds tegengestelde teekens hebben; dan zullen twee met betrekking tot de beide beschrijvende lijnen gelijkstandige punten, *anticycloïdale* lijnen beschrijven. Wil men in iederen stand de kromtestralen met elkander kunnen vergelijken, dan moet men in aanmerking nemen, dat met de verschillende waarden van R, u, α, in de eene cycloïdale, overeenkomen $-R$, $-u$, $\pi-\alpha$ in de anticycloïdale; zoodat dus deze laatste voortgebracht wordt door de beweging der kromme

$$-R=f(-u),$$

als

$$R=f(u)$$

de beschrijvende kromme der eerste voorstelt; terwijl het beschrijvende punt der anti-cycloïdale bepaald wordt door de voorwaarde, dat, voor $u=0$, $r=r_0$ en $\alpha=\pi-\alpha_0$ is, als in de cycloïdale, voor $u=0$, $r=r_0$ en $\alpha=\alpha_0$ is.

Denkt men zich twee *verschillende* beschrijvende krommen met dezelfde richtlijn, dan kan men bijv. vragen, aan welke voorwaarde die twee beschrijvende lijnen moeten voldoen, om gelijkvormige cycloïdalen te verkrijgen. Deze vraag hangt samen met het vraagstuk, om de beschrijvende lijn te bepalen, als de richtlijn en de cycloïdale gegeven zijn. Want gesteld, dat de essentieele vergelijking der cycloïdale, voortgebracht door eene der twee zoo even genoemde beschrijvende krommen, is

$$\rho=\Phi(w),$$

dan zal in eene dáármede gelijkvormige cycloïdale, voor dezelfde waarden van w, de kromtestraal k-maal zoo groot zijn; de vergelijking van deze is dus

$$\rho=k\Phi(w);$$

en nu is het slechts de vraag, welke beschrijvende lijn zal, over de richtlijn

$$R'=F(v)$$

rollende, deze laatste cycloïdale voortbrengen?

De oplossing komt hierop neer. Uit verg. (11) volgt

$$w=v-v_0+\alpha-\alpha_0;$$

dus is

$$\rho=k\Phi(v-v_0+\alpha-\alpha_0).$$

Maar ook $$\rho = \frac{(R-R')r^2}{(R-R')r + RR' \, Cos\,\alpha},$$

dus $$\frac{(R-R')r^2}{(R-R')r + RR' \, Cos\,\alpha} = k\,\Phi(v - v_0 + \alpha - \alpha_0).$$

Lost men hieruit R op, na $R' = F(v)$ gesubstitueerd te hebben, dan heeft men R in functie van v, r en α, stel bij voorbeeld

$$R = \psi(v, r, \alpha).$$

Daar echter $$R\,du = R'\,dv = F(v)\,dv$$
moet zijn, heeft men

$$dv = \frac{\psi(v, r, \alpha)}{F(v)}\,du,$$

voeg hierbij $$dr = \psi(v, r, \alpha)\,Sin\,\alpha\,du,$$

en $$d\alpha = \frac{\psi(v, r, \alpha)\,Cos\,\alpha - r}{r}\,du;$$

en men heeft drie gelijktijdige differentiaal-vergelijkingen; lost men daaruit v, r en α op, en substitueert men de gevonden waarden in

$$R = \psi(v, r, \alpha),$$

dan heeft men de vergelijking der bedoelde beschrijvende lijn.

6. *De beschrijvende lijn of de richtlijn is een cirkel of eene rechte lijn.*

a. *De beschrijvende lijn is een cirkel*, dus $R = a$ en $R_{-1} = 0$. De vergelijkingen (3) en (7) geven terstond

$$dr_{-1} = 0, \qquad \text{of } r_{-1} = \text{standvastig} = p;$$
$$d\alpha_{-1} = -du, \qquad \text{of } \alpha_{-1} - (\alpha_{-1})_0 = -u.$$

Uit den driehoek APC volgt nu verder

$$r = \sqrt{a^2 + p^2 - 2ap\,Sin((\alpha_{-1})_0 - u)},$$

$$Cos\,\alpha = \frac{a - p\,Sin((\alpha_{-1})_0 - u)}{\sqrt{a^2 + p^2 - 2ap\,Sin((\alpha_{-1})_0 - u)}}.$$

Substitueert men deze waarden in

$$\rho = \frac{(a-R')r^2}{(a-R')r + aR'\,Cos\,\alpha},$$

dan komt er na herleiding

$$\rho = \frac{(a-R')\sqrt{a^2 + p^2 - 2ap\,Sin((\alpha_{-1})_0 - u)}^{\,3}}{a^3 + (a-R')p^2 - ap(2a - R')\,Sin((\alpha_{-1})_0 - u)},$$

Zij a positief. Neemt men dan $(\alpha_{-1})_0 = \frac{1}{2}\pi$, dat is, laat men de beweging beginnen, als het beschrijvende punt op de lijn CA ligt, en wel aan dezelfde zijde van C als A; dan wordt $Sin((\alpha_{-1})_0 - u) = Cos\,u$. Voor de anticycloïdale is dan a negatief en $(\alpha_{-1})_0 = -\frac{1}{2}\pi$ dus $Sin((\alpha_{-1})_0 - u) = -Cos\,u$. Wij hebben dus in het algemeen

$$\rho = \frac{(a-R')\sqrt{a^2+p^2 \mp 2ap\,Cos\,u}^{\,3}}{a^3+(a-R')p^2 \mp ap(2a-R)\,Cos\,u}, \quad \ldots\ldots (19)$$

waarin het bovenste teeken met positieve, het onderste met negatieve waarden van a moet gebruikt worden.

Voor $p = 0$ wordt $\rho = a - R'$. Als derhalve een cirkel over eene willekeurige richtlijn rolt, is de kromtestraal der cycloïdale, die door het middelpunt van dien cirkel beschreven wordt, steeds gelijk aan het verschil of aan de som van den straal des beschrijvenden cirkels en den kromtestraal der richtlijn, naar gelang de raking in- of uitwendig is.

b. *De beschrijvende lijn is eene rechte.* Voor $R = \infty$ wordt de vergelijking der cycloïdale

$$\rho = \frac{r^2}{r + R'\,Cos\,\alpha}.$$

Noemt men den afstand van het beschrijvende punt tot de beschrijvende rechte q, dan is steeds

$$q = r\,Cos\,\alpha;$$

zoodat q positief is, als P aan de positieve zijde van de beschrijvende rechte ligt; negatief, als P aan de andere zijde valt. Hierdoor wordt

$$\rho = \frac{r^3}{r^2 + R'q}.$$

Verder is $\int_{v_0}^{v} R'dv =$ het gedeelte der lijn, dat reeds over de richtlijn heeft gerold, en dat wij l zullen noemen. Laat men nu de beweging beginnen in het voetpunt der loodlijn q, dan is $r^2 = l^2 + q^2$; en de vergelijking kan aldus geschreven worden

$$\rho = \frac{\sqrt{l^2+q^2}^{\,3}}{l^2+q^2+R'q}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

terwijl dan de gelijkheid

$$\int_{v_0}^{v} R'dv = l,$$

en de betrekking

$$w - (v - v_0) = \alpha - \alpha_0$$

gelegenheid geven om, zoo mogelijk, ρ in functie van w uit te drukken. α_0 is *nul*, als q positief is, maar $= \pi$, als q negatief is.

De middellijn van den buigpunts-cirkels is hier steeds gelijk aan den kromtestraal der richtlijn, maar aan de andere zijde der raaklijn gelegen. Ten aanzien van de focale leert het onderzoek, dat

$$X = \frac{3R'^2}{R'_{-1}} \text{ en } Y = -3R'$$

is.

c. *De richtlijn is een cirkel.* $R' = b$, dus $R'_{-1} = 0$.

$$\rho = \frac{(R-b)r^2}{(R-b)r + Rb \, Cos\, \alpha}.$$

Hierbij valt niets bijzonders op te merken.

d. *De richtlijn is eene rechte lijn.* De vergelijking der cycloïdale wordt

$$\rho = \frac{r^2}{r - R \, Cos\, \alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

De middellijn van den buigpunts-cirkel is, zoowel in grootte als in richting, gelijk aan den kromtestraal der beschrijvende kromme. Voor de focale wordt

$$X = \frac{3R^2}{R_{-1}} \text{ en } Y = \tfrac{3}{2} R.$$

7. *Hypo- en epicycloïden.*

De vergelijkingen der cycloïdische lijnen zijn opgesloten in de formule

$$\rho = \frac{(a-b)\sqrt{a^2 + p^2 \mp 2ap \, Cos\, u}^{\,3}}{a^3 + (a-b)p^2 \mp ap(2a-b) \, Cos\, u},$$

die gevonden wordt, door in vergelijking (19) $R' = b$ te stellen. Hierbij is aangenomen, dat de beweging begint, als het beschrijvende punt op de lijn CA of haar verlengde ligt, en wel aan dezelfde zijde van C als A; terwijl het bovenste teeken voor positieve waarden van a, dus voor hypocycloïden, het onderste voor negatieve waarden van a, dus voor epicycloïden geldt. De cycloïdische lijnen zijn *verlengd*, *gewoon* of *verkort*, naargelang $p \lesseqgtr a$ is; de hypocycloïden zijn *uit-* of *inwendig*, naargelang $a \gtrless b$ is.

De bespreking der verschillende vormen kan aanmerkelijk bekort worden door de volgende stelling.

Wanneer over eenzelfden richtcirkel twee beschrijvende cirkels rollen, waarvan de algebraïsche som der stralen gelijk is aan den straal des richtcirkels; dan beschrijven twee punten, die zoo gekozen zijn, dat het

product van hunne afstanden tot de middelpunten der beschrijvende cirkels gelijk is aan het product van de stralen dezer cirkels, gelijkvormige cycloïdalen.

Zijn bijv. a_1 en a_2 de stralen der beschrijvende cirkels, b de straal van den richtcirkel, p_1 en p_2 de afstanden van twee punten P_1 en P_2 tot de middelpunten C_1 en C_2 der beschrijvende cirkels; dan zal de kromme, die het punt P_1 beschrijft, als het met den cirkel C_1 medegaat, gelijkvormig zijn met de kromme, die door P_2 beschreven wordt, als dit met den cirkel C_2 medegaat; wanneer voldaan is aan de voorwaarden

$$a_1 + a_2 = b \text{ en } p_1 p_2 = \pm a_1 a_2,$$

waarin het bovenste of het onderste teeken moet genomen worden, naargelang a_1 en a_2 gelijke of tegengestelde teekens hebben.

Wij zullen deze stelling afzonderlijk bewijzen, voor de beide gevallen dat $a_1 > b$ en $a_1 < b$ is; en wel voor het eerste geval geometrisch, voor het tweede analytisch.

In figuur 3 is C' het middelpunt van den richtcirkel, C_1, C_2, P_1 en P_2 zijn de plaatsen waar de middelpunten der beschrijvende cirkels en de beschrijvende punten zich bevinden op het oogenblik, dat de beweging begint, en de drie cirkels elkaar raken in A_0. Daar $C_1 A_0$ of a_1 grooter is dan $C'A_0 = b$, is a_2 negatief, en is dus $C_2 A_0 = C_1 C'$ aan de andere zijde van A_0 uitgezet. Denken wij ons nu beide cirkels tegelijk in beweging, totdat de eerste een hoek $A_0 C_1 \alpha_1 = u$ en de tweede een even grooten hoek $A_0 C_2 \alpha_2 = -u$ gedraaid is; dan zullen de middelpunten der beschrijvende cirkels gekomen zijn in C'_1 en C'_2, de beide beschrijvende punten in P'_1 en P'_2; terwijl A_1 en A_2 de punten zijn, waar de richtcirkel door de twee rollende cirkels geraakt wordt. Stellen wij $\angle A_0 C' A_1 = v_1$ en $\angle A_0 C' A_2 = v_2$, dan is

$$b v_1 = a_1 u \text{ en } b v_2 = -a_2 u;$$

dus
$$v_1 - v_2 = \frac{a_1 + a_2}{b} u = u,$$

omdat ondersteld is $a_1 + a_2 = b$. In de figuur is dus $\angle A_1 C' A_2 = u$. Maar als de lijn $C_1 P_1$ den stand $C'_1 P'_1$ verkregen heeft, is $a_1 C_1$ in $A_1 C'_1$ gekomen; dus is ook $\angle P'_1 C'_1 A_1 = P_1 C_1 \alpha_1 = u$; derhalve is $C'_1 P'_1 \parallel C'A_2$. Evenzoo is $\angle P'_2 C'_2 A_2 = P_2 C_2 \alpha_2 = u$, en dus $C'_2 P'_2 \parallel C'A_1$. Het snijpunt A'_0 van $C'_1 P'_1$ en $C'_2 P'_2$ is dus van C'_1 en C'_2 verwijderd op afstanden, die gelijk zijn aan $C_1 A_0$ en $C_2 A_0$. Door beide cirkels wordt dus het punt A_0 in A'_0 ge-

voerd; waaruit de bekende eigenschap volgt, dat de beide beschrijvende cirkels dezelfde *gewone* cycloïdische lijn voortbrengen.

Zijn nu P_1 en P_2 zoo gekozen, dat $P_1C_1 \times P_2C_2 = P'_1C'_1 \times P'_2C'_2 = C_1A_0 \times C_2A_0 = C'C_2 \times C'C_1 = C'C'_2 \times C'C'_1$ is, dan heeft men de evenredigheid

$$\frac{P'_1C'_1}{C'C'_1} = \frac{C'C'_2}{P'_2C'_2}.$$

Vereenigt men dus P'_1 en P'_2 met C', dan zijn de driehoeken $P'_1C'C'_1$ en $P'_2C'C'_2$ gelijkvormig; want zij hebben bovendien $\angle P'_1C'_1C' = \angle P'_2C'_2C'$. Bijgevolg liggen P'_1, P'_2 en C' in eene rechte lijn. En daar

$$\frac{C'P'_1}{C'P'_2} = \frac{C'_1C'}{P'_2C'_2} = \frac{C_1C'}{P_2C_2},$$

dus standvastig blijft, waar ook de punten P_1 en P_2 bij de wenteling der cirkels komen; zoo ziet men, dat de cycloïdalen, door deze punten beschreven, gelijkvormig zijn, en dat C' haar uitwendig gelijkvormigheidspunt is.

Als $a_1 < b$ is, verkrijgt a_2 eene positieve waarde. Beide cirkels geven dus inwendige hypocycloïden. Wij onderstellen daarom, dat in beide beschrijvende cirkels de wentelingshoek u positief is. Zijn dan ρ_1 en ρ_2 de kromtestralen van de twee cycloïdalen, dan is

$$\rho_1 = \frac{(a_1 - b)\sqrt{a_1^2 + p_1^2 - 2a_1p_1 \operatorname{Cos} u}^{\,3}}{a_1^3 + (a_1 - b)p_1^2 - a_1p_1(2a_1 - b)\operatorname{Cos} u}$$

en

$$\rho_2 = \frac{(a_2 - b)\sqrt{a_2^2 + p_2^2 - 2a_2p_2 \operatorname{Cos} u}^{\,3}}{a_2^3 + (a_2 - b)p_2^2 - a_2p_2(2a_2 - b)\operatorname{Cos} u}.$$

Heeft men in de tweede vergelijking

$$a_2 = b - a_1 \text{ en } p_2 = \frac{a_1(b - a_1)}{p_1}$$

gesubstitueerd, dan vindt men voor de verhouding der kromtestralen

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = -\frac{p_1}{a_1};$$

deze is dus standvastig voor gelijke waarden van u. Verder heeft men voor de *twee* cycloïdalen in elk der driehoeken, gevormd door het raakpunt A, het krommingsmiddelpunt C en het beschrijvende punt P,

$$a_1 \operatorname{Sin}\alpha_1 = p_1 \operatorname{Sin}(u + \alpha_1) \text{ en } a_2 \operatorname{Sin}\alpha_2 = p_2 \operatorname{Sin}(u + \alpha_2).$$

Door vermenigvuldiging vindt men, daar $a_1a_2 = p_1p_2$ is,

$$Sin\,\alpha_1 . Sin\,\alpha_2 = Sin(u+\alpha_1) . Sin(u+\alpha_2),$$

waaruit, na ontwikkeling en herleiding, volgt

$$Tg\,u = -\,Tg(\alpha_1+\alpha_2),$$

dat wil zeggen

$$u+\alpha_1+\alpha_2=\pi,$$

en dus voor $u=0$

$$(\alpha_1)_0+(\alpha_2)_0=\pi.$$

Brengt men dit in verband met de betrekkingen

$$b v_1 = a_1 u \qquad \text{en} \qquad b v_2 = a_2 u,$$

$$w_1 - v_1 = \alpha_1 - (\alpha_1)_0 \text{ en } w_2 - v_2 = \alpha_2 - (\alpha_2)_0,$$

waaruit door optelling volgt

$$v_1 + v_2 = u,$$

$$w_1 + w_2 - (v_1+v_2) = \alpha_1+\alpha_2 - ((\alpha\ )_0 + (\alpha_2)_0),$$

dan blijkt het, dat

$$w_1 + w_2 = 0,$$

of

$$w_1 = -\,w_2$$

is. Denkt men zich dus de beide essentieele vergelijkingen

$$\rho_1 = \Phi_1(w) \quad \text{en} \quad \rho_2 = \Phi_2(w)$$

der beide cycloïdalen; dan blijkt uit het voorgaande, dat gelijke arithmetische waarden van w voor ρ_1 en ρ_2 waarden opleveren, die eene standvastige verhouding hebben, — noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor de gelijkvormigheid.

Voor $p_1 = a_1$ en $p_2 = a_2$ is $\rho_1 = \rho_2$: de gelijkvormigheid gaat in congruentie over.

Het onderzoek naar de verschillende vormen van cycloïdische lijnen behoeft zich dus slechts uit te strekken tot de uitwendige hypocycloïden en de inwendige hypocycloïden, waarbij $a > \frac{1}{2} b$.

8. *Buigpunten en toppen bij de hypocycloïden.*

De vergelijking van den buigpunten-cirkel is

$$r + \frac{ab}{a-b}\, Cos\,\alpha = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Zijn middellijn is dus standvastig $= \frac{ab}{a-b}$; en de cirkel zelf ligt voor de uitwendige hypocycloïden aan de andere, voor de inwendige hypocycloïden aan dezelfde zijde van de raaklijn als de beschrijvende cirkel.

De vergelijking der focale wordt, gelijk wij blz. 42 reeds opmerkten,

$$Sin\,\alpha\left\{(a-2b)r+3ab\,Cos\,\alpha\right\}=0.$$

Deze kromme is dus getransformeerd in de rechte lijn

$$Sin\,\alpha=0,$$

dat is de normaal in het raakpunt, en een cirkel

$$r+\frac{3ab}{a-2b}Cos\,\alpha=0,\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

welks middellijn standvastig $=\frac{3ab}{a-2b}$ is. Deze cirkel, dien wij *toppuntscirkel* zullen noemen, ligt aan de andere of aan dezelfde zijde van de raaklijn als de beschrijvende cirkel, naargelang $a \gtrless 2b$ is.

Wij zullen de verschillende hypocycloïdische vormen rangschikken naar het voorkomen van buigpunten en toppen en naar de betrekkelijke ligging dezer punten. Daartoe stellen wij ons voor, dat de lijn, die, op het oogenblik dat de beweging begint, normaal is op de beide cirkels, met den beschrijvenden cirkel vast verbonden is en met dezen de beweging medemaakt. De verschillende punten dezer lijn, die met het raakpunt aan dezelfde zijde van het krommingsmiddelpunt der beschrijvende cirkels liggen, beschrijven dan alle mogelijke cycloïdalen; wij hebben dus slechts te bepalen, in welke punten deze lijn den buigpuntscirkel en den toppuntscirkel kan snijden of raken.

Substitueeren wij in de vergelijkingen dezer cirkels

$$r=\sqrt{a\ \ +p^2-2ap\,Cos\,u}\ \text{ en }\ Cos\,\alpha=\frac{a-p\,Cos\,u}{r},$$

dan wordt de eerste

$$a^3+(a-b)p^2-ap(2a-b)\,Cos\,u_1=0,$$

welke vergelijking ons in staat stelt te bepalen, na welken wentelingshoek u_1 zeker punt, dat op den afstand p van het middelpunt des beschrijvenden cirkels ligt, een buigpunt zal vormen. In het algemeen is

$$Cos\,u_1=\frac{a^3+(a-b)p^2}{ap(2a-b)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Maar deze waarde is slechts bestaanbaar voor

$$-ap(2a-b)<a^3+(a-b)p^2<ap(2a-b),$$

dat is voor

$$(a-b)p^2+a(2a-b)p+a^3>0$$

en $$(a-b)p^2 - a(2a-b)p + a^3 < 0,$$

of voor en
$$\left.\begin{array}{l}\{(a-b)p + a^2\}(p+a) > 0 \\ \{(a-b)p - a^2\}(p-a) < 0.\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Alleen de punten, waarvoor p aan deze voorwaarden voldoet, zullen een buigpunt vormen.

Evenzoo kan men de vergelijking van den toppuntscirkel aldus schrijven

$$a^2(a+b) + (a-2b)p^2 - ap(2a-b)\,Cos\,u_2 = 0,$$

wanneer wij door u_2 den wentelingshoek aanduiden, waarbij het beschrijvende punt een top vormt. Om bestaanbare waarden voor dezen hoek te krijgen moet echter voldaan worden aan

$$-ap(2a-b) < a^2(a+b) + (a-2b)p^2 < ap(2a-b),$$

dat is $$(a-2b)p^2 + a(2a-b)p + a^2(a+b) > 0$$

en $$(a-2b)p^2 - a(2a-b)p + a^2(a+b) < 0,$$

of ook en
$$\left.\begin{array}{l}\{(a-2b)p + a(a+b)\}(p+a) > 0 \\ \{(a-2b)p - a(a+b)\}(p-a)0 < .\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Slechts als p aan deze voorwaarden voldoet heeft de cycloïdale een top.

Er is nog één punt van onderzoek, waarvan wij vooraf het uitgangspunt kunnen aangeven. Het geldt namelijk de vraag, of in de verschillende toppen de kromtestraal eene grootste of eene kleinste waarde bereikt; welke twee gevallen wij onderscheiden door te spreken van *maximum-toppen* en *minimum-toppen*. Men dient evenwel op te merken, dat als ρ negatief is, de waarde van ρ in een maximum-top een minimum zal zijn, en in een minimum-top een maximum. Het is daarom noodzakelijk telkens te bepalen het teeken van ρ en het teeken van het tweede differentiaal-quotient. Maar het is niet noodig, dit te onderzoeken voor elken top afzonderlijk, dien eene cycloïdale hebben kan. Immers, als men van den eersten top weet, of hij een maximum- of een minimum-top is, dan blijkt dit van de volgende voldoende uit het verdere beloop der kromme. Nu vormt elke hypocycloïde een top op het oogenblik, dat de beweging begint, d.i. voor $u = 0$. Het is derhalve voldoende na te gaan, welk teeken de waarde ρ_0 van ρ voor $u = 0$ heeft, en welk teeken de overeenkomstige waarde $\left(\frac{d^2\rho}{du^2}\right)_0$ van het tweede differentiaal-quotient heeft.

In het algemeen is

$$\rho_0 = \frac{(a-b)r_0^{\,3}}{a^3+(a-b)p^2-a(2a-b)p} = \frac{(a-b)r_0^{\,3}}{\{(a-b)p-a^2\}(p-a)}, \quad . \ (27)$$

waarin $r_0 = \pm(p-a)$ is, naar gelang $p \gtrless a$ is. Verder zal men vinden

$$\left(\frac{d^2\rho}{du^2}\right)_0 = \frac{a(a-b)pr_0}{\{a^3+(a-b)p^2-ap(2a-b)\}^2}\{(a-2b)p^2-a(2a-b)p+a^2(a+b)\}$$

$$= \frac{a(a-b)pr_0}{\{(a-b)p-a^2\}^2} \cdot \frac{(a-2b)p-a(a+b)}{p-a}; \quad \ldots\ldots \ (28)$$

zoodat het teeken van $\left(\frac{d^2\rho}{du^2}\right)_0$ hetzelfde is als dat van

$$\frac{(a-2b)p-a(a+b)}{p-a},$$

of het tegengestelde, naargelang $a \gtrless b$ is.

(*Wordt vervolgd.*)

KLEINERE MEDEDEELINGEN.

PRIJSVRAAG N°. 12,

BEANTWOORD DOOR

W. MANTEL.

Men vraagt te bewijzen, dat de waarde der coëfficiënten, die men bij het onderzoek naar de deelbaarheid door een priemgetal, in elk talstelsel naar willekeur, bezigen moet, om door middel van aftrekking, een, twee, drie, enz. cijfers te elimineeren, periodiek is. En ten tweede, dat het aantal termen der periode gelijk is aan het aantal cijfers van het repetendum, dat bij de deeling door hetzelfde priemgetal wordt opgeleverd.

Men stelle het priemgetal p, de basis van 't talstelsel b. Om door aftrekking m cijfers te elimineeren, moet men het getal dier m cijfers, vermenigvuldigd met een getal $x_m b^m + 1$, dat door p deelbaar is, van 't gegeven getal aftrekken, en de rest door b^m deelen. Men zal dan kunnen zeggen.

Een getal is door p deelbaar of niet, naargelang dit al of niet het geval is met de rest, verkregen door x_m-maal 't getal der m laatste cijfers van dat der voorgaande af te trekken.

Het komt nu aan op de bepaling van x_m; dit geschiedt door oplossing der congruentie

$$x_m b^m \equiv -1 \ (\text{mod.}\, p),$$

en bepaaldelijk neemt men den kleinsten positieven wortel.

De rei der coëfficiënten, welke ons ter onderzoeking is voorgelegd, vormen dus de kleinste positieve wortels der volgende congruentiën

$$xb \equiv -1 \pmod{p},$$
$$xb^2 \equiv -1 \pmod{p},$$
$$xb^3 \equiv -1 \pmod{p},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Omdat deze wortels alle tusschen 0 en p liggen, zijn ze niet alle verschillend. Laten x_r en x_s gelijk zijn, en daartusschen geen gelijke liggen; men heeft dan

$$b^r x_r \equiv -1 \pmod{p}.$$

Zij y de kleinste positieve wortel van

$$x \equiv b x_r \pmod{p},$$

dan zal
$$b^{r-1} y \equiv -1 \pmod{p}$$

zijn; dus $y = x_{r-1}$. Maar men heeft ook $y \equiv x_s b \pmod{p}$; dus $y = x_{s-1} = x_{r-1}$.

Hieruit kan men weer afleiden

$$x_{s-2} = x_{r-2},$$
$$x_{s-3} = x_{r-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_1 \quad = x_{r-s+1}.$$

Men heeft verder $b^r(x_r + pn) \equiv -1 \pmod{p}$.

Men zoeke den kleinsten positieven wortel n_1 van

$$x_r + pn \equiv 0 \pmod{b},$$

en stelle
$$\frac{x_r + pn_1}{b} = z;$$

dan is
$$b^{r+1} z \equiv -1 \pmod{p},$$

dus $z = x_{r+1}$; maar men vindt evenzoo $z = x_{s+1}$, dus

$$x_{r+1} = x_{s+1}.$$

En hieruit weer
$$x_{r+2} = x_{s+2},$$
$$x_{r+3} = x_{s+3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Hiermede is de periodiciteit bewezen. Stellende $r - s = k$, is k het aantal cijfers der periode. Wij merken op, dat we geen gebruik hebben gemaakt van de onderstelling, dat p een priemgetal is.

Uit
$$b x_1 \equiv -1,\ b^{k+1} x_1 \equiv -1 \pmod{p},$$

volgt
$$b x_1 \equiv b^{k+1} x_1 \pmod{p}.$$

Omdat $bx_1 + 1$ door p deelbaar, is bx_1 betrekkelijk ondeelbaar met p; men mag dus door bx_1 deelen, waardoor men vindt

$$b^k \equiv 1 \text{ (mod. } p).$$

De repeteerende breuk voor $\frac{2}{p}$ heeft dus een periode van k cijfers of een kleinere; maar uit $b^m \equiv 1$ volgt $bx_1 \equiv b^{m+1} x_1 \equiv -1$, dus zou, indien $m < k$ was, de periode der coëfficiënten x ook minder dan k termen bevatten. De beide perioden bevatte dus evenveel termen.

Wij zullen ten slotte nog de volgende stelling bewijzen.

Wanneer één der coëfficiënten gelijk is aan één der resten, die men verkrijgt als men $\frac{a}{p}$ tot een repeteerende breuk herleidt, dan zijn de coëfficiënten de resten in gelijke doch tegengestelde cyclische volgorde, mits p betrekkelijk ondeelbaar met b zij.

Laat de coëfficiënt x_k gelijk zijn aan de rest r_l; men heeft dan

$$bx_k \equiv x_{k-1} \text{ (mod. } p),$$

en

$$br_l \equiv r_{l+1} \text{ (mod. } p).$$

Omdat x_{k-1} en r_{l+1} verder $< p$ zijn, zijn ze gelijk; daaruit volgt dan weer

$$x_{k-2} = r_{l+2},$$
$$x_{k-3} = r_{l+3}.$$
enz.

Uit $x_k \equiv bx_{k+1}$ en $r_l \equiv br_{l-1}$ (mod. p) volgt eveneens, wegens $x_k = r_l$, $bx_{k+1} \equiv br_{l-1}$ (mod. p), $x_{k+1} \equiv r_{l-1}$; dus $x_{k+1} = r_{l-1}$; hieruit leidt men weer af $x_{k+2} = r_{l-2}$, $x_{k+3} = r_{l-3}$ enz., waarmede de stelling is bewezen.

Is 't aantal coëfficiënten even, $= 2k$, dan zal $x_1 + x_{k+1} = x_2 + x_{k+2} = \ldots\ldots\ldots = p$ zijn; want uit $b^{2k} - 1 \equiv 0$ (mod. p) volgt dan $b^k + 1 \equiv 0$; is nu $b^t x_t \equiv -1$ (mod. p), dan leidt men gemakkelijk af

$$b^{k+t}(p - x_t) \equiv -1 \text{ (mod. } p),$$

dus

$$p - x_t = x_{k+t}.$$

Al het behandelde blijft doorgaan voor de kenmerken van deelbaarheid door optelling.

BEANTWOORDING VAN PRIJSVRAAG N°. 3,

DOOR

D^R. G. A. OSKAMP.

In eenig punt van het ronde oppervlak van een onbeweeglijken regten cirkelvormigen cylinder met horizontale as, is het uiteinde van een volkomen buigbaren en onrekbaren draad van bepaalde lengte bevestigd, terwijl het andere uiteinde met een massieven bol van gegeven gewicht bezwaard is. Indien nu deze draad regtuit gespannen is in een hellende rigting, die echter in een vlak loodregt op de as des cylinders gelegen is, en dan aan het middelpunt van den bol een bepaalde snelheid, loodregt op de rigting van den draad en in het genoemde vlak, wordt medegedeeld, vraagt men de beweging van dien bol na te gaan, en tevens de spanning van den draad op elk tijdstip der beweging te bepalen. Hierbij wordt bedoeld, dat de draad bij den aanvang der beweging n*-malen om den cylinder gewonden zijn kan, terwijl* n *een geheel of gebroken getal tot oneindig toe voorstelt.*

Naar aanleiding der gegevens zullen we den draad als mathematisch beschouwen, en bijgevolg zijn gewicht buiten rekening laten. Evenzoo zullen noch zijne dikte, noch de adhesie aan den cylinder van invloed zijn. De beweging wordt geacht in het ledige plaats te grijpen. Waar we het noodig vinden ons aan een bepaalde voorstelling te houden, zullen we aannemen dat de straal des cylinders grooter is dan die des bols.

In figuur 1 zij $P_3M = R$, $pm = r$. $R > r$.

Het vlak van het papier zij het vlak van doorsnede, door het middelpunt van den bol, loodrecht op de as des cylinders. am_1 is

de initiale richting van den draad $am_1 = l$; $\angle a M P_3 = \alpha$. De aanvankelijk aangebrachte hoeksnelheid zij gelijk I, het gewicht van den bol gelijk G, voorgesteld door de verticale kracht mg. Is dan bm een willekeurige richting bij de beweging, $\angle a M b = \phi$, en draait de draad voor een ondeelbaar oogenblik om b, zoo hebben we

$$bm \times mv = T \times \frac{d^2\phi}{dt^2},$$

waarbij T het traagheidsmoment van den bol is;

dus $$(l+R\phi) \times G\,Cos\,gmv = M(\tfrac{2}{5}r^2+mb^2)\frac{d^2\phi}{dt^2},$$

waarbij M de massa van den bol voorstelt;

of $$(l+R\phi)Mg\,Sin(\alpha+\phi) = M\left\{\tfrac{2}{5}r^2+(l+R\phi)^2\right\}\frac{d^2\phi}{dt^2};$$

waaruit volgt $$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{g(l+R\phi)Sin(\alpha+\phi)}{\frac{2}{5}r^2+(l+R\phi)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Zonder op storende wijze aan de algemeenheid te kort te doen, kunnen we den oorsprong van hoeken zoodanig kiezen, dat de aanvankelijke lengte van den draad gelijk zij aan die van den boog, begrepen tusschen het initiale raakpunt en het punt, waar de oorsprong van hoeken den cirkel snijdt; terwijl de draad geacht wordt door den bol heen te gaan en met het uiteinde in het middelpunt bevestigd te zijn. Hierdoor wordt $am_1 = bg\,aP_3 = R \times \alpha = l$, en (1) gaat over in

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{gR(\alpha+\phi)Sin(\alpha+\phi)}{\frac{2}{5}r^2+R^2(\alpha+\phi)^2}.$$

Voor $\alpha+\phi = \psi$ is $$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{gR\psi\,Sin\,\psi}{\frac{2}{5}r^2+R^2\psi^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1_a)$$

Hieruit volgt $$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2gR\int\frac{\psi\,Sin\,\psi}{\frac{2}{5}r^2+R^2\psi^2}\,d\psi.$$

Stellen we $\frac{r}{R}\sqrt{\frac{2}{5}} = a$, dan is

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{R}\int\frac{\psi\,Sin\,\psi}{a^2+\psi^2}\,d\psi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

De uitvoering der integratie, die, na ontwikkeling van $Sin\,\psi$ in een reeks, gemakkelijk tot stand komt, levert een som van oneindig voortloopende reeksen; voorgesteld door de vergelijking

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{R}\sum_0^\infty \left\{\frac{a^{2p+1}}{1^{2p+1/1}}\sum_p^\infty (-1)^{p+2}\frac{\psi^{2p+3}}{(2p+3)a^{2p+3}}\right\} + C \,.\,.\, (3)$$

Bij den aanvang is $\psi = \alpha$, $\frac{d\psi}{dt} = I$; dus

$$C = I^2 - \frac{2g}{R}\sum_0^\infty \left\{\frac{a^{2p+1}}{1^{2p+1/1}}\sum_p^\infty (-1)^{p+2}\frac{\alpha^{2p+3}}{(2p+3)\,a^{2p+3}}\right\}.$$

Hoewel op deze wijze de hoeksnelheid in functie van den veranderlijken hoek ψ is uitgedrukt, is toch de gevondene formule ongeschikt voor de beschouwing der beweging. Alvorens een meer praktische uitdrukking op te sporen, zullen we de spanning van den draad aangeven, waarmede we voor de bedoelde beschouwing noodzakelijk moeten bekend zijn.

Om eenig raakpunt, waarvoor de bijbehoorende straal des cirkels, die de doorsnede van den cylinder voorstelt, een hoek $\psi = \phi + \alpha$ met de aanvangsrichting maakt, draait de draad een oneindig kleine hoeveelheid; beschrijft dus het middelpunt des bols een oneindig klein cirkelboogje, wiens middelpunt het raakpunt is. De snelheid van het middelpunt is dan $R\psi \times \frac{d\psi}{dt}$. Heeten we de centrifugaalversnelling F_1 dan is dus

$$F_1 = \frac{\left(R\psi\,\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{R\psi} = R\psi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Tengevolge dier versnelling blijft de draad gespannen; maar daarenboven wordt er in de richting van den draad een zekere versnelling aangebracht door de component der zwaarte in die richting. Die versnelling is gelijk $g\,Cos\,(180-\psi) = -g\,Cos\,\psi$; zoodat men voor de versnelling F der spanning verkrijgt

$$F = R\psi\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - g\,Cos\,\psi; \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (4)$$

waarin nu de gevondene waarde van $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$ uit (3) kan gesubstitueerd worden.

De formulen (1_a), (3) en (4) geven de hoekversnelling, de hoeksnelheid en de versnelling der spanning aan. Voor de twee laatste formulen moeten wij een gedaante zoeken, die voor het onderzoek der beweging geschikt is. Daartoe maken we gebruik van de bekende vergelijking, voorkomende in de theorie der bepaalde integralen,

$$\int_a^b F(x)f(x)dx = F\left\{a+\theta(b-a)\right\}\int_a^b f(x)dx \ldots 1>\theta>0;$$

welke voor ons geval geeft

$$\int_\alpha^\psi \frac{\psi}{a^2+\psi^2} Sin\,\psi\,d\psi = \frac{\alpha+\theta(\psi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(\psi-\alpha)\right\}^2}(Cos\,\alpha - Cos\,\psi).$$

Stellen we dus de hoeksnelheid door H voor, dan is volgens het voorgaande

$$H^2 = \frac{2g}{R}\left(\frac{\alpha+\theta(\psi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(\psi-\alpha)\right\}^2}\right)(Cos\,\alpha - Cos\,\psi) + I^2 \;.\;.\;.\; (5)$$

De versnelling der spanning gaat over in

$$F = 2g\psi\left(\frac{\alpha+\theta(\psi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(\psi-\alpha)\right\}^2}\right)(Cos\,\alpha - Cos\,\psi) + R\psi I^2 - g\,Cos\,\psi. \;(5_a)$$

We zijn nu voldoende toegerust, om de beweging van den bol en de spanning van den draad gedurende die beweging na te gaan. Daar echter onze ruimte beperkt is, kunnen onmogelijk alle gevallen uitvoerig besproken worden. Met enkele zal dit het geval zijn; met andere bepalen we ons tot een eenvoudige opgaaf.

Beschouwen we vooreerst de verplaatsing van het raakpunt tot aan P_1, en noemen we de hoekversnelling K, dan is, volgens (1_a),

$$K = \frac{d^2\psi}{dt^2} = gR\frac{\psi\,Sin\,\psi}{\frac{2}{5}r^2+R^2\psi^2} = \frac{g}{R}\cdot\frac{\psi\,Sin\,\psi}{a^2+\psi^2},$$

een steeds positieve grootheid, die tegelijk met ψ zal toenemen; of wel zal afnemen, wanneer ψ aangroeit, naarmate $\frac{dK}{d\psi} \gtrless 0$ is. Nu is

$$\frac{dK}{d\psi} = \frac{\psi(a^2+\psi^2)Cos\,\psi + (a^2-\psi^2)Sin\,\psi}{(a^2+\psi^2)^2}; \;.\;.\;.\;.\;.\;. (6)$$

de vraag is dus, wanneer is $\psi(a^2+\psi^2)Cos\,\psi \gtrless (\psi^2-a^2)Sin\,\psi$. Volgens onderstelling is hierin $\psi>a$; want $\psi>\frac{1}{2}\pi>1$ en $a=\frac{r}{R}\sqrt{\frac{2}{5}}<1$.

Daar verder $Sin\,\psi>0$ en $Cos\,\psi<0$ is, geldt van af het beginpunt tot aan P_1 slechts het onderste teeken $<$; zoodat K afneemt, als ψ aangroeit tot $\psi=\pi$. Op het oogenblik dat $\psi=\pi$ wordt, dat alzoo het raakpunt in P_1 valt, is $K=0$.

De hoeksnelheid zal voor de waarden van ψ tusschen de gezegde grenzen steeds toenemen; daar $K>0$ is. Voor $K=0$ heeft zij haar maximum bereikt, waarvan volgens (5) de waarde is

$$H^2 = \frac{2g}{R}\left(\frac{\alpha+\theta(\pi-\alpha)}{a^2+\{\alpha+\theta(\pi-\alpha)\}^2}\right)(1+Cos\,\alpha)+I^2.$$

Het onderzoek naar de spanning van den draad zou ons tot de beschouwing van $\frac{dF}{d\psi}$ voeren; ware het niet dat, voor de tot nu toe gestelde grenzen van ψ, onmiddelijk uit (5_c) bleek, dat F voortdurend met ψ toeneemt; daar H^2, ψ en $-Cos\,\psi$ steeds grooter worden. Voor de grens $\psi = \pi$ heeft men

$$F = 2\pi g\,\frac{\alpha+\theta(\pi-\alpha)}{a^2+\{\alpha+\theta(\pi-\alpha)\}^2}(1+Cos\,\alpha)+R\pi I^2+g.$$

Bij de verplaatsing van het raakpunt van P_1 naar P_2, kunnen de beschouwingen op de aanvankelijk gevolgde wijze worden voortgezet. K wordt van af P_1 negatief; bereikt hare grootste negatieve waarde voor de waarde van ψ, volgende uit de vergelijking $Tg\,\psi = \frac{a^2+\psi^2}{\psi^2-a^2}\times\psi$; en gaat voor het raakpunt P_2, over in $-\frac{g}{R}\cdot\frac{6\pi}{4a^2+9\pi^2}$. Wat H betreft volgt uit (5), dat voor $\psi = 2\pi-\alpha$, $H = I$ wordt; waaruit blijkt dat het raakpunt, waarvoor dit plaats heeft, juist even hoog boven de horizontale ligt als het aanvangsraakpnnt er beneden gelegen was. Verder blijkt nog, dat het middelpunt van den bol het niveau van P_2 bereiken zal, wanneer men heeft

$$I^2 \geqq \frac{2g}{R}\left(\frac{\alpha+\theta(\frac{3}{2}\pi-\alpha)}{a^2+\{\alpha+\theta(\frac{3}{2}\pi-\alpha)\}^2}\right)\times(-Cos\,\alpha); \qquad (\alpha>\tfrac{1}{2}\pi)$$

zoodat wij, met het oog op de grenswaarden van θ, als grenswaarden van den coëfficient van $-Cos\,\alpha$ in de uitdrukking voor I^2, vinden

$$\frac{2g}{R}\cdot\frac{6\pi}{4a^2+9\pi^2} \text{ en } \frac{2g}{R}\cdot\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2}.$$

Omdat $\frac{\alpha}{a^2+\alpha^2} > \frac{6\pi}{4a^2+9\pi^2}$ is, zal het niveau zeker bereikt worden wanneer men heeft

$$I^2 = -\frac{2g\alpha}{R(a^2+\alpha^2)}\,Cos\,\alpha.$$

Voor $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ zou $I = 0$ zijn. Zonder initiale snelheid zou alzoo het gezegde niveau bereikt worden, zoo slechts de initiale richting van den draad horizontaal was. Wanneer de hoeksnelheid voor $\alpha > \frac{1}{2}\pi$ uitgeput was, vóór het niveau werd bereikt, zij voor $\psi = \beta$, dan vindt men, dat voor de waarde van I^2, uitgedrukt door de formule

$$I^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{\beta}{a^2+\beta^2}(Cos\,\beta - Cos\,\alpha),$$

het bereiken van het niveau onmogelijk zijn zou. De berekening leert, dat de versnelling der spanning van den draad, zoo voor $\psi = \beta$ de hoeksnelheid gelijk nul werd, door $-g\,Cos\,\beta$ voorgesteld wordt; zoodat de spanning blijft bestaan, totdat het niveau bereikt wordt; F blijft positief voor $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$. Is alzoo de hoeksnelheid uitgeput vóór het niveau bereikt wordt, dan blijft de draad toch gespannen, en er ontstaat een beweging in tegengestelden zin van vroeger, die weer aan beschouwing onderworpen kan worden; van welke beschouwing de uitkomst is, dat de bol een voortdurende oscilleerende beweging zal verkrijgen, waarbij de grensraakpunten steeds verticaal boven elkaar liggen.

Het geval, waarbij $\frac{3}{2}\pi < \psi < 2\pi$ is, noodzaakt tot meer omslachtige bespreking. K blijft steeds negatief, en komt dus nog altijd als vertraging voor; die voor $\psi = 2\pi$ in 0 overgaat. De hoeksnelheid is dus afnemend; terwijl het weer van de waarde van I afhangt, of het middelpunt van den bol verticaal boven P_3 komen zal. F neemt ook af; want behalve dat zij tegelijk met H kleiner wordt, is nu het teeken van $g\,Cos\,\psi$ omgekeerd. Vandaar dat F spoediger nul kan worden dan H. Is bijv.

$$I^2 = \frac{2g}{R}\,\frac{\alpha+\theta(\gamma-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(\gamma-\alpha)\right\}^2}(Cos\,\gamma - Cos\,\alpha);$$

zoodat blijkens de waarde van H de hoek γ juist zou bereikt worden, dan was F, volgens het voorgaande, $-g\,Cos\,\gamma$; waarin $Cos\,\gamma > 0$ moet zijn. Had daarentegen I^2 zoodanige waarde dat, volgens (5_c)

$$4\,g\,\pi\,\frac{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}^2}(Cos\,\alpha - 1) + 2\,R\,\pi\,I^2 - g = 0$$

was, dus $I^2 = \dfrac{g}{2R\pi}\left(1 - \dfrac{4\pi\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}^2}(Cos\,\alpha - 1)\right)$, ($8_a$)

dan wordt de hoek $\psi = 2\pi$ bereikt, en op hetzelfde oogenblik is de spanning gelijk nul geworden.

Meer nauwkeurig zullen we nu het geval nagaan, dat de spanning gelijk nul wordt, vóór de hoeksnelheid die waarde verkregen heeft. We nemen aan dat de hoek, waarbij dit plaats grijpt, $\gamma < 2\pi$ is. Daarvoor moet men hebben

$$I^2 = \frac{g}{R\gamma}\left(Cos\,\gamma - \frac{2\gamma\{\alpha+\theta(\gamma-\alpha)\}}{a^2+\{\alpha+\theta(\gamma-\alpha)\}^2}(Cos\,\alpha - Cos\,\gamma)\right).$$

Op het oogenblik, dat de spanning nul is, vindt men voor H de waarde

$$H = \sqrt{\frac{g\,Cos\gamma}{R\gamma}}.$$

De richting der beweging is noodwendig die der raaklijn aan de ontwindende des cirkels, dus loodrecht op de richting van den draad voor dit punt, evenwijdig aan den straal van het raakpunt; maakt alzoo met de horizontale een scherpen hoek $= 2\pi - \gamma$. De snelheid V in de richting der raaklijn is

$$V = R\gamma \times \sqrt{\frac{g\,Cos\,\gamma}{R\gamma}} = \sqrt{Rg\gamma\,Cos\gamma}.$$

De bol, nu niet langer door de spanning gebonden, is aan de versnelling g der zwaartekracht overgegeven, en in het bezit van een eigene snelheid V in een richting, die een hoek $= 2\pi - \gamma$ met de horizontale maakt; verkeert dus in de omstandigheid van een voortgeworpen zwaar lichaam, dat voor het overige geheel vrij is.

In figuur 2 zij mB $\|$ MR de richting der raaklijn aan de ontwinwindende op het oogenblik dat $F = 0$ wordt; dan is $\angle$BmE $=$ $= \angle$RMP$_3 = 2\pi - \gamma$. De plaats van m op dit oogenblik, die we als oorsprong van een rechthoekig coördinaat-stelsel aannemen, wordt bepaald door den horizontalen en verticalen afstand tot het vaste punt M. Trekken we de in de figuur voorgestelde lijnen, wier onderlinge stand duidelijk is, dan hebben we

$$\mathrm{A}m = mR\,Cos(2\pi-\gamma) - \mathrm{P}_2\mathrm{Q} = R\gamma\,Cos\gamma - R\{1 - Sin(2\pi-\gamma)\} = \\ = R(\gamma\,Cos\gamma - 1 - Sin\,\gamma);$$

$$\mathrm{B}_1 m = mR\,Sin(2\pi-\gamma) - \mathrm{QR} = -R(\gamma\,Sin\gamma + Cos\gamma).$$

Is nu mE de richting der x-as, dan hebben we na een tijd t

$$x = Vt\,Cos\gamma,\ y = -Vt\,Sin\,\gamma - \tfrac{1}{2}gt^2;$$

na eliminatie van t

$$y = -x\,Tg\gamma - g\frac{x^2}{2V^2\,Cos^2\gamma}.$$

De baan, door het middelpunt doorloopen, is een parabool. Na substitutie der waarde van V verkrijgen we

$$v = -x\,Tg\gamma - \frac{x^2}{2R\gamma\,Cos^3\gamma}, \qquad \text{. . . . . (8}_a\text{)}$$

$$\text{Parameter} = 2\,R\gamma\,Cos^2\,\gamma.$$

De draad zal, zooals uit zichzelf klaar is, vooreerst niet gespannen worden; de beweging zal ongestoord zijn, zoolang de bol zich boven den cylinder bevindt, zonder hem aan te raken. De loos van den draad kan dan voor ieder punt der parabool gevonden worden. Als merkwaardige punten bespreken we het hoogste punt der baan en het tweede snijpunt met de x-as.

Voor $y = 0$ wordt, behalve $x = 0$, ook $x = -2\,R\,Cos^2\gamma.Sin\gamma = X$ gevonden; de x van het toppunt is dus $-R\,Cos^2\gamma\,.Sin\gamma = \frac{1}{2}X$. De y is gelijk $\frac{1}{2}R\,Sin^2\gamma.\,Cos\gamma = Y$. In de figuur is $m\mathrm{R} = R\gamma$; $\mathrm{RE} = R\gamma\,Cos\gamma$; $\mathrm{RF} = R\gamma\,Cos^2\gamma$; $\mathrm{FG} = -R\gamma\,Cos^2\gamma.Sin\gamma = \frac{1}{2}X = m\mathrm{H}$; dus $2m\mathrm{H} = X = m\mathrm{H}_1$. Verder $\mathrm{EF} = -R\gamma\,Cos\gamma.Sin\gamma$; $\mathrm{EG} = R\gamma\,Sin^2\gamma.\,Cos\gamma$; $\mathrm{IG} = \frac{1}{2}R\gamma\,Sin^2\gamma.\,Cos\gamma = Y = \mathrm{H}p$. Het middelpunt van den bol gaat alzoo door m, p en H_1, natuurlijk onder voorwaarde dat $m\mathrm{A} > r$ of $R(\gamma\,Cos\gamma - Sin\gamma - 1) > r$ is: zijnde $\frac{3}{2}\pi < \gamma < 2\pi$. Voor de kleinste grens is $m\mathrm{A} = 0$; voor de grootste grenswaarde is $m\mathrm{A} = R(2\pi - 1)$; in het laatste geval alleen is $m\mathrm{A} > r$. Voor gegevene r en R kan door benadering de γ gevonden worden, waarvoor $m\mathrm{A} \overset{<}{\underset{>}{=}} r$ zijn moet; waarvoor dus de parabool boven de x-as niet of al doorloopen kan worden. Zoo dadelijk komen we op de mogelijke gevallen terug.

De lengte van $p\mathrm{L}$, loodrecht op AP_2 is $p\mathrm{H}+\mathrm{HL} = \frac{1}{2}R\gamma Sin^2\gamma.\,Cos\gamma + R(\gamma\,Cos\gamma - Sin\gamma - 1)$; $\mathrm{LL}_1 = \mathrm{P}_2\mathrm{Q} = R(1 + Sin\gamma)$; dus $p\mathrm{L}_1 = \frac{1}{2}R\gamma(2 + Sin^2\gamma)\,Cos\gamma$; $\mathrm{L}_1\mathrm{R} = \mathrm{HE} = m\mathrm{E} - m\mathrm{H} = -R\gamma\,Sin\gamma + R\gamma\,Cos^2\gamma.Sin\gamma = R\gamma\,(Cos^2\gamma - 1)\,Sin\gamma = -R\gamma\,Sin^3\gamma$; dus ook

$$\mathrm{R}p = \sqrt{p\mathrm{L}_1{}^2 + \mathrm{L}_1\mathrm{R}^2} = R\gamma\sqrt{\tfrac{1}{4}(2 + Sin^2\gamma)^2\,Cos^2\gamma + Sin^6\gamma}.$$

De hier voorkomende functie van γ neemt tegelijk met γ toe, en heeft alzoo voor de grens $\gamma = 2\pi$ hare grootste waarde, namelijk $2R\pi$. In dit geval zou de draad dus nog juist gestrekt zijn; maar volgens onderstelling, komt die stand nog niet in aanmerking. In de gevallen, die we hier op het oog hebben, zou de waarde der loos van den draad zijn

voor het punt p ... loos $= R\gamma\,(1 - \sqrt{\tfrac{1}{4}(2 + Sin^2\gamma)^2\,Cos^2\gamma + Sin^6\gamma})$;

voor het punt H_1 .. loos $= R\gamma\,(1 - \sqrt{Cos^2\gamma + Sin^2\gamma.Cos^2\,2\gamma})$;

voor elk willekeurig punt der kromme is op die wijze de loos te berekenen.

De vraag of de bol den cylinder zal treffen hangt onmiddellijk

samen met het onderzoek naar den loop der parabool. Trekken we de raaklijnen P_3E_1 en P_1E_2, dan zien we dat de kromme den cylinder slechts dan zal kunnen ontmoeten, wanneer zij de horizontale raaklijn in P_2 binnen die twee verticale raaklijnen treft. De ordinaat van eenig punt der horizontale door P_2 heeft tot waarde $y = -\mathrm{A}m = -R(\gamma\, Cos\,\gamma - Sin\,\gamma - 1)$. De bijbehoorende x volgt door substitutie dezer waarde in de vergelijking der parabool; men vindt

$$x = -R\gamma\, Cos^2\gamma . Sin\gamma \pm R\sqrt{\gamma^2 Cos^4\gamma . Sin^2\gamma + 2\gamma(\gamma\, Cos\gamma - Sin\,\gamma - 1)\, Cos^3\gamma}.$$

Voor ons geval hebben we slechts met het bovenste teeken te maken. Zal nu de cylinder getroffen kunnen worden, dan moet vooreerst $m\mathrm{E}_1 > x$ zijn, d. i.

$$1 - \gamma\, Sin\,\gamma - Cos\,\gamma > -\gamma\, Cos^2\gamma\, Sin\,\gamma +$$
$$+\sqrt{\gamma^2\, Cos^4\gamma . Sin^2\gamma + 2\gamma(\gamma\, Cos\,\gamma - Sin\,\gamma - 1)\, Cos^3\gamma};$$

of

$$(1 - Cos\,\gamma)^2 > \gamma\left\{(\gamma\, Sin^2\gamma - Sin\,2\gamma)\, Cos\,2\gamma - \right.$$
$$\left. -(Cos\,\gamma - Sin\,\gamma)(2 + Sin\,2\gamma) + 2\gamma\, Cos^4\gamma\right\}.$$

De ongelijkheid aldus herleid schijnt nog het meest geschikt ter berekening. Slechts bij tasting en benadering kan de waarde van γ gevonden worden, die er aan voldoet. Zoo vindt men voor $\gamma = \frac{7}{4}\pi$, $m\mathrm{E}_1 < x$; terwijl voor $\gamma = \frac{5}{3}\pi$, $m\mathrm{E}_1 > x$ is.

Ten tweede moet nu $x > m\mathrm{E}_2$ zijn, of

$$\gamma\left\{\gamma Sin^2\gamma Cos2\gamma - (Cos\gamma + Sin\gamma)(2 - Sin2\gamma) - Sin2\gamma - 2\gamma Cos^4\gamma\right\} > (1 + Cos\gamma)^2$$

Alles te zamen genomen geeft een ruwe berekening $300^0 < \gamma < 315^0$.

De waarde van γ, waarvoor de kromme door P_2 loopt, wordt gevonden door de vergelijking

$$(\gamma\, Sin\,\gamma + Cos\,\gamma)^2 = 2\gamma(\gamma - Cos\,\gamma)\, Cos^2\gamma;$$

waaruit bij ruwe benadering $\gamma = 304^0$. De overeenkomstige waarden van V worden voor gegevene R bepaald door de gevondene vergelijking $V = \sqrt{Rg\gamma\, Cos\,\gamma}$.

We zagen alzoo dat de waarde van γ de vraag beslist, of de baan van het middelpunt de horizontale door P_2 ter rechter- of ter linkerzijde van de verticale raaklijnen ontmoeten zal. De waarde van γ was daarbij onafhankelijk van den straal des cylinders; terwijl V evenredig aan den vierkantswortel uit den straal is. Nu is ongetwijfeld de botsing onvermijdelijk, zoo de bedoelde snijding binnen de verticale raaklijnen geschiedt; doch die botsing is nog mogelijk,

zoo het snijpunt daar buiten valt. De bol toch is geen mathematisch punt, hij heeft een straal gelijk r, en het is van diens lengte dat het mede afhangt, of er al dan niet botsing zal plaats grijpen. Twee hoofdgevallen, elk met twee nevengevallen, zijn mogelijk

1. Er ontstaat geen botsing $\begin{cases} a. \text{ De bol gaat ter linkerzijde voorbij.} \\ b. \text{ De bol gaat ter rechterzijde voorbij.} \end{cases}$

2. Er ontstaat wel botsing $\begin{cases} a. \text{ De botsing geschiedt links van } P_2. \\ b. \text{ De botsing geschiedt rechts van } P_2. \end{cases}$

De beschouwingen en berekeningen, welke op deze gevallen betrekking hebben, bezitten een zoodanige uitgebreidheid, en de berekeningen vertoonen zulk een onderlingen samenhang, dat het niet mogelijk is de eerste in haar geheel, de tweede, of geheel of gedeeltelijk hier mee te deelen. Zoo krijgen we in het geval 1_a vooreerst met den samenhang te doen, welke er bestaat tusschen de waarde van γ en den afstand, waarop m zich van P_1 bij den daar bedoelden voorbijgang bevindt. Bij het dalen van den bol doorloopt m aanvankelijk ongestoord de parabolische baan, die voor een bepaalden passage-afstand, dus voor een gegeven γ, of liever voor een bekende I, bekend is. De bol wentelt niet bij dien voortgang, maar de loos van den draad zal tengevolge der beweging het oppervlak des bols ten deele omgeven; zoodat er, als de draad gestrekt wordt, tegelijk met den schok een koppel ontstaat, dat een bepaalde wenteling veroorzaakt. De plaats, waar m zich op dit oogenblik bevindt, alsmede de snelheid, waarmee dit punt dan aangedaan is, moeten berekend worden. Die snelheid bezit de richting der raaklijn aan de parabool in het bedoelde punt; ze ondergaat de noodige ontbinding, en de bekendheid der componenten stelt in staat zoowel de volgende beweging van m als de wenteling des bols na te gaan. Bij den schok komt de elasticiteit van den draad niet in rekening; deze is wegens de gegeven onrekbaarheid buitengesloten. Anders is het met de veerkracht van den cylinder en den bol, ze mag niet verwaarloosd worden. Wat verder de beweging van m aangaat, ze is op nieuw parabolisch en wordt óf door botsing tegen den cylinder óf door strekking van den draad, óf door beide tegelijk gestoord, waarbij noodwendig de wenteling een beduidenden invloed vertoont. Die wenteling verandert, bij het op nieuw strak worden van den draad, van teeken. Tegelijk met de botsing treedt wrijving op, wier werking niet buiten rekening blijven kan. Men ziet, hier is stof tot bespreking en berekening. De uitslag der be-

weging 1_a blijkt in ieder geval te moeten zijn een slingering met kleine of oneindig kleine amplitudo. Naargelang de waarde der optredende koppels zal de wenteling na korteren of langeren tijd oneindig gering worden; in elk geval neemt ze steeds af. Zonder botsing vindt men, dat eerst na een oneindig aantal heen- en weerwentelingen en telkens straktrekken van den draad, de rotatie ophoudt.

Na de behandeling der vier gezegde gevallen moeten we onze aandacht bepalen bij de omstandigheid waarin I zoodanige waarde bezit, dat de spanning niet gelijk nul wordt tusschen $\frac{3}{2}\pi$ en 2π. Werd de spanning gelijk nul, juist op het oogenblik dat $\psi = 2\pi$ was, dan hadden we volgens (8_a)

$$I^2 = \frac{g}{2R\pi}\left(1 - \frac{4\pi\left\{\alpha + \theta(2\pi - \alpha)\right\}}{a + \left\{\alpha + \theta(2\pi - \alpha)\right\}^2}(Cos\,\alpha - 1)\right) \ldots (12_n)$$

Voor de waarde van H^2 wordt gevonden

$$H^2 = \frac{g}{2R\pi}; \text{ dus } V = \sqrt{2gR\pi}.$$

De richting dier snelheid is horizontaal, en m is verticaal boven P_3 in figuur 1. De onderstelling ligt voor de hand, dat er op nieuw een parabool zal beschreven worden, wier vergelijking en parameter zijn moeten

$$y = -\frac{x^2}{4R\pi}, \; P = 4R\pi;$$

wanneer de plaats van m, op het oogenblik dat de spanning nul wordt, als punt van oorsprong, en de horizontale als x-as wordt aangenomen van een rechthoekig stelsel.

Een nauwkeurige beschouwing en de berekening doen echter zien dat die toestand bij de wording reeds wordt opgeheven, daar F slechts nul wordt om onmiddelijk weer positief te worden. Waaruit dus volgt dat, zoo de initiale snelheid groot genoeg was om den bol tot bij den stand te brengen, waarbij de draad verticaal naar boven gericht was, de beweging ongestoord moet doorgaan; zij het ook dat de spanning in dien stand gelijk nul werd.

Uitgaande van de onderstelling, dat de spanning op het bedoelde oogenblik nul was, kunnen we de beweging verder nagaan, en den bol in een stand beschouwen, waarbij $2\pi < \psi < \frac{5}{2}\pi$ is. De vroeger gevondene formulen kunnen dan op nieuw ven dienst zijn, en wel

in dien zin, dat we de beweging beschouwen als aangevangen op het oogenblik, dat de draad raaklijn in P_3 was. De hoek ψ wordt dan in denzelfden zin als vroeger geteld, en begint met $\alpha = 2\pi$. De initiale hoeksnelheid is thans $I_1 = \sqrt{\frac{g}{2R\pi}}$. De formulen gaan over in

$$K_1 = \frac{g}{R} \cdot \frac{\psi \, Sin \, \psi}{a^2 + \psi^2}.$$

$$H_1^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{2\pi + \theta(\psi - 2\pi)}{a^2 + \left\{2\pi + \theta(\psi - 2\pi)\right\}^2} (1 - Cos\,\psi) + \frac{g}{2R\pi}.$$

$$F_1 = 2g\psi \left(\frac{2\pi + \theta(\psi - 2\pi)}{a^2 + \left\{2\pi + \theta(\psi - 2\pi)\right\}^2}\right)(1 - Cos\,\psi) + \frac{g\psi}{2\pi} - g\,Cos\,\psi.$$

De hoekversnelling en hoeksnelheid nemen nu voortdurend toe. Evenals vroeger geeft het kenmerk, ontleend aan de waarde van $\frac{dK_1}{d\psi}$, aanleiding tot de ongelijkheid

$$\psi(a^2 + \psi^2) > (\psi^2 - a^2)\, Tg\,\psi;$$

zoolang ψ niet in de nabijheid van $\frac{5}{2}\pi$ komt; in die nabijheid toch nadert $Tg\,\psi$ tot oneindig groot, en het ongelijkteeken keert om. Hoe grooter echter ψ wordt, wegens het aantal omgangen, hoe langer die wisseling verschoven wordt. Terwijl dus K_1 begint af te nemen in de nabijheid van $\psi = \frac{5}{2}\pi$, blijft H_1 steeds aangroeien; daar $K_1 > 0$ blijft, zoolang $Sin\,\psi > 0$ is. Ook de spanning wordt grooter, daar de snelheid toe- en $g\,Cos\,\psi$ afneemt. Voor $\psi = \frac{5}{2}\pi$ is

$$K_1 = \frac{g}{R} \cdot \frac{10\pi}{4a^2 + 25\pi^2}; \quad H_1^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{\pi(2 + \frac{1}{2}\theta)}{a^2 + \pi^2(2 + \frac{1}{2}\theta)^2} + \frac{g}{2R\pi};$$

$$F_1 = 5g\pi \cdot \frac{\pi(2 + \frac{1}{2}\theta)}{a^2 + \pi^2(2 + \frac{1}{2}\theta)^2} + \frac{5g}{4}.$$

Voor de grens $\theta = 0$ is

$$H_1^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{2\pi}{a^2 + 4\pi^2}; \quad F_1 = \frac{5}{4} g \frac{a^2 + 12\pi^2}{a^2 + 4\pi^2} > g.$$

Voor de grens $\theta = 1$ is

$$H_1^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{10\pi}{4a^2 + 25\pi^2}; \quad F_1 = \frac{5}{4} g \cdot \frac{4a^2 + 35\pi^2}{4a^2 + 25\pi^2} > g.$$

De centrifugaal-versnelling blijkt dus voor beide grenzen grooter dan de versnelling der zwaartekracht te zijn; en de draad is alzoo gespannen door een kracht die het gewicht van den bol overtreft.

De draad heeft nu een horizontale richting en is raaklijn in het laagste punt des cylinders.

Laten we ψ verder aangroeien, dan komen de vroegere toestanden weldra op nieuw te voorschijn, met die wijziging, dat de draad een stuk langer is geworden, gelijk aan den omtrek des cylinders. Daar in de ongelijkheid

$$\psi(a^2+\psi^2)\,Cos\,\psi \gtrless (\psi^2-a^2)\,Sin\,\psi$$

$Cos\,\psi < 0$ is geworden, geldt het onderste teeken; zoodat de versnelling K_1 nu blijft afnemen, totdat bovenstaande ongelijkheid in een gelijkheid overgaat, dus nadat $\psi = 3\pi$ is geworden. Voor gegevene a kan de waarde van ψ voor het oogenblik van overgang gevonden worden, daarbij bedenkende dat $3\pi < \psi < \frac{7}{2}\pi$ moet zijn.

H_1 neemt nog steeds toe zoolang $K_1 > 0$ blijft, dus tot $\psi = 3\pi$. F_1 groeit mede aan, zoowel wegens de grooter wordende snelheid als wegens het teeken van de component der gravitatie.

Vergelijken we de waarden van K_1, H_1 en F_1 met de overeenkomstige van K, H en F, dan kunnen we, waar het gelijke standen geldt, de goniometrische functiën buiten rekening laten; daar zij alsdan onderling gelijke waarden bezitten. Voor de hoekversnelling hebben we voor zekere $\psi = \psi'$,

$$K = \frac{g}{R}\cdot\frac{\psi'\,Sin\,\psi'}{a^2+\psi'^2}; \quad K_1 = \frac{g}{R}\cdot\frac{(2\pi+\psi')\,Sin\,\psi'}{a^2+(2\pi+\psi')^2};$$

waarbij we met elkaar moeten vergelijken $\dfrac{\psi'}{a^2+\psi'^2}$ met $\dfrac{2\pi+\psi'}{a^2+(2\pi+\psi')^2}$.
Bedenken we dat

$$\frac{d}{d\psi}\,\frac{\psi'}{a^2+\psi'^2} = \frac{a^2-\psi'^2}{(a^2+\psi'^2)^2} < 0, \ldots\ldots \text{daar } a < \psi';$$

dan zien we, dat $\dfrac{\psi'}{a^2+\psi'^2}$ een afnemende functie is; waaruit volgt dat voor $r \leqq R$ altijd $K_1 < K$ is. Volgens de onderstelling, dat de straal des cylinders grooter dan die des bols zou zijn, heeft deze ongelijkheid zeker voor iedere nieuwe ψ plaats. Wilde men echter weten, wat het geval zijn zou voor een willekeurige verhouding tusschen de beide stralen, dan zou de daareven gebezigde formule niet kunnen dienen. We zouden dan teruggewezen worden naar de meer algemeene formule 1, namelijk naar de vergelijking

$$K = g\cdot\frac{(l+R\phi)\,Sin(\alpha+\phi)}{\frac{2}{5}r^2+(l+R\phi)^2};$$

en dus naar het onderzoek der uitdrukking $\frac{l+R\Phi}{\frac{2}{5}r^2+(l+R\Phi)}$; die na differentiatie met betrekking tot Φ, het kenmerk

$$\tfrac{2}{5}r^2 \gtrless (l+R\Phi)^2$$

aan de hand doet. Nu was noodwendig $r \leqq l$, zoodat alleen het onderste teeken van dit kenmerk mag gebezigd worden, en dus voor elken willekeurigen straal $K_1 < K$ is. De onderstelling $K_1 = K$, die we ter toelichting kunnen bespreken, leidt na herleiding tot de uitdrukking, voor zekere $\Phi = \psi'$,

$$R(l^2 + 2lR\pi + 2lR\psi' + 2R^2\pi\psi' + R^2\psi'^2) = 0;$$

waaraan met het oog op de onderstelde positieve waarde van ψ' slechts kan voldaan worden, zoo de cylinder in een rechte lijn overging. Werden negatieve ψ' in rekening gebracht, d. i. werd de draad, uitgaande van eenigen initialen stand, opgewonden, dan had men voor $-\psi' = \Phi'$,

$$\Phi' = \pi + \frac{l}{R} \pm \pi; \text{ dus } \Phi' = \frac{l}{R}, \text{ of } \Phi' = 2\pi + \frac{l}{R};$$

voor welke gelijke standen nu $K_1 = K$ zijn zou. Maar l was de initiale afstand van het raakpunt op den cylinder tot aan het middelpunt van den bol; dus is $l:R$ de boog in eenheden van den straal, die het raakpunt in negatieven zin zou moeten doorloopen, om het punt m op den omtrek van den cylinder te brengen; iets dat slechts voor $r = 0$ mogelijk zou zijn; terwijl ook na het doorloopen van den boog $l:R$ verdere negatieve beweging onmogelijk zijn zou. We zien er ons alzoo toe gebracht aan te nemen dat, welke ook de stralen van den cylinder en den bol mogen zijn, in de ware beteekenis van het vraagstuk, altijd $K > K_1$ moet zijn; of, meer algemeen gesproken, dat de versnelling voor overeenkomstige standen met het aantal wentelingen afneemt.

Wat de waarde van $H_1{}^2$ betreft, ze is nu zoodanig, dat ze langer voor geen enkele ψ nul kan worden. De vroegere uitdrukking (5_b) werd gelijk nul, zoo $I^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{\alpha + \theta(\psi - \alpha)}{a^2 + \{\alpha + \theta(\psi - \alpha)\}^2}(Cos\,\psi - Cos\,\alpha)$ was. Dit is thans niet mogelijk, daar de factor $(1 - Cos\,\psi)$, die in H_1 voorkomt, steeds positief is, en tot minimum de waarde nul heeft; waarbij $H_1{}^2 = g : 2R\pi$ wordt. Deze minimum-waarde zal dus de hoeksnelheid bezitten, telkens wanneer het middelpunt van den bol verticaal boven P_3 staat. In alle andere overeenkomstige standen

zal echter de hoeksnelheid bij iederen volgenden omgang afgenomen zijn; daar, zooals we weten, de factor $\frac{2\pi+\theta(\psi-2\pi)}{a^2+\left\{2\pi+\theta(\psi-2\pi)\right\}^2}$ afneemt bij het aangroeien van ψ.

De snelheid in elk punt der baan wordt verkregen, door de hoeksnelheid voor dit punt met den bijbehoorenden straal te vermenigvuldigen. In den eersten, verticaal opwaarts gerichten stand bedroeg zij $V_1=\sqrt{2gR\pi}$, bij den tweeden $V_2=2\sqrt{2gR\pi}$, voor den derden $V_3=4\sqrt{2gR\pi}$; voor den n-den wordt ze $V_n=2^{n-1}\sqrt{2gR\pi}$; dus

$$V_p:V_q=2^{p-1}:2^{q-1}; \text{ of } (p-q)Log\,2=Log\,V_p-Log\,V_q=Log\,\frac{V_p}{V_q}.$$

De aantallen omgangen zijn dus rekenkunstig evenredig met de logarithmen der snelheden, die de bol bij den overeenkomstigen omgang in het hoogste punt der baan heeft.

Ook voor ieder willekeurig punt der baan neemt de snelheid bij elken omgang toe, daar

$$V^2=2Rg\psi^2\cdot\frac{2\pi+\theta(\psi-2\pi)}{a^2+\left\{2\pi+\theta(\psi-2\pi)\right\}^2}(1-Cos\,\psi)+\frac{gR\psi^2}{2\pi},$$

afgezien van de waarde der goniometrische functie, met ψ aangroeit. Bij deze toenemende snelheid behoort echter voor elken volgenden omgang een grootere omloopstijd, aangezien de hoeksnelheid afnam.

De spanning van den draad, die vroeger gelijk nul kon gesteld worden, daar hare waarde van I afhing, blijkt nu steeds positief te blijven. Haar minimum heeft ze nog steeds in den hoogsten stand van den bol, voor iederen omgang; omdat alsdan in de uitdrukking

$$F_1=2g\psi\frac{2\pi+\theta(\psi-2\pi)}{a^2+\left\{2\pi+\theta(\psi-2\pi)\right\}^2}(1-Cos\,\psi)+\frac{g\psi}{2\pi}-g\,Cos\,\psi,$$

$Cos\,\psi$ de grootst mogelijke waarde bezit, $Cos\,2n\pi=1$, n een geheel getal voorstellende. Voor den eersten omgang was $\psi=2\pi$ en werd, zooals we zagen, $F_1=0$; daarna wordt voor iederen omgang ψ met 2π vermeerderd; zoodat men voor de opvolgende minima heeft

1$^{\text{ste}}$ minimum $=0$; 2$^{\text{de}}$ minimum $=g$; 3$^{\text{de}}$ minimum $=2g$, enz.;
n^{de} minimum $=(n-1)g$.

$$m_p:m_q=p-1:q-1.$$

De minima van verschillende aantallen omgangen verhouden zich alzoo als die aantallen min één.

Het valt op te merken dat het hier behandelde geval, waarbij de spanning voor $\psi = 2\pi$ gelijk nul werd, hoewel het als een bijzonder geval moest beschouwd worden, uitkomsten oplevert, welke overeenstemmen met die, welke men voor het meer algemeene geval verkrijgt, waarbij de spanning voor het eerste minimum grooter dan nul blijft. De initiale hoeksnelheid heeft dan zoodanige waarde, dat

$$I^2 > \frac{g}{2R\pi}\left(1 - \frac{4\pi\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha\right\}}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha\right\}^2}(Cos\,\alpha-1)\right) \quad . \; . \; . \; (14)$$

is. Ook dan gaat de beweging ongestoord door, zooals daareven. Voor de versnelling is de formule, dus ook de waarde voor overeenkomstige punten, dezelfde die voor het bijzondere geval gebezigd werd. Omtrent de overige uitdrukkingen stellen we een onderzoek in.

We behouden nu den aanvankelijken vorm der formulen; daar er thans geen enkele aanleiding bestaat om bij het punt P_3 op nieuw te beginnen. De hoeken worden doorgeteld in de uitdrukkingen (5_b) en (5_c). De eerste leert dan, in overeenstemming met het daareven gevondene, dat de hoeksnelheid voor overeenkomstige punten met iederen volgenden omgang afneemt, wegens het kleiner worden der breuk $\dfrac{\alpha+\theta(\psi\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(\psi-\alpha)\right\}^2}$ bij aangroeiing van ψ, zoolang namelijk de factor $(Cos\,\alpha - Cos\,\psi)$ positief blijft; terwijl voor die punten, waarvoor $(Cos\,\alpha - Cos\,\psi) < 0$ is, de hoeksnelheid in de bedoelde omstandigheid grooter wordt. Nu heeft, volgens de figuur en de onderstelling, het eerste geval plaats van af het begin der beweging, totdat het raakpunt verticaal boven het aanvangsraakpunt gekomen is, waar $Cos\,\psi = Cos\,\alpha$ en dus $H = I$ wordt. Daarop wordt $Cos\,\psi > Cos\,\alpha$, en blijft dit, totdat het raakpunt weer in het beginpunt aangekomen is, en dientengevolge weer $H = I$ wordt. Van het beginpunt uitgaande, is dus telkens voor alle punten van een volgenden omgang, de hoeksnelheid geringer dan bij de overeenkomstige punten van den voorgaanden; totdat het raakpunt, dat verticaal boven het beginpunt ligt, bereikt is; waarna ze grooter wordt dan voor de vroegere homostatische punten. In de bedoelde overgangspunten wordt de hoeksnelheid periodiek, tweemaal bij elken omgang, gelijk aan de initiale hoeksnelheid. Voor $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ zouden de perioden, gelegen tusschen de punten waar $H = I$ wordt, aan elkaar gelijk worden, de wegen door het raakpunt af te leggen zouden telkels gelijk den halven cirkelomtrek $R\pi$ zijn.

Met de snelheid in de baan is het eenigszins anders gelegen. We hebben

$$V^2 = 2gR\psi^2 \cdot \frac{\alpha+\theta(\psi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(\psi-\alpha)\right\}^2}(Cos\,\alpha - Cos\,\psi) + R^2\psi^2 I^2.$$

Hier neemt de determineerende breuk, die nu een factor ψ^2 meer in den teller bezit, met ψ toe. Terwijl dus de waarde der snelheid voor $Cos\,\psi = Cos\,\alpha$ van iederen volgenden omgang, wegens den factor ψ^2 van I^2, grooter geworden is, wordt van af het beginpunt in de eerste periode van iederen omgang de snelheid voor elk punt grooter, dan voor het overeenkomstige punt bij den voorgaanden omloop; en in de tweede periode, waar $Cos\,\psi > Cos\,\alpha$ wordt, moet een dergelijke aangroeiing voorkomen. Gemakkelijk wordt men dat gewaar, zoo men den aangroeienden factor ψ^2 buiten haakjes plaatst, en opmerkt dat alsdan $I^2 R^2$ bij iederen volgenden omgang, met een kleinere waarde, altijd in de tweede periode, verminderd wordt. Daar ψ gedurende iedere periode met een grootheid toeneemt, die voor de overeenkomstige perioden steeds dezelfde is, neemt de snelheid in de overgangspunten regelmatig toe bij de opvolgende omgangen. Voor de overeenkomstige overgangspunten, d. i. telkens na elken omzwaai, is de snelheid met $2R\pi I$ vermeerderd.

De spanning van den draad, die door (5 c) wordt aangegeven, neemt, bij vergelijking der overeenkomstige punten der elkaar opvolgende omgangen, toe; daar ook hier, even als bij de snelheid, de gezegde breuk aangroeit tegelijk met ψ, wegens de toevoeging van den factor ψ in den teller. De waarde der spanningsversnelling in de overgangspunten, na iederen geheelen omgang, vermeerdert met $2R\pi I^2$. Ze is achtervolgens $RI^2\alpha - g\,Cos\,\alpha$; $(2\pi-\alpha)RI^2 - g\,Cos\,\alpha$; $(2\pi+\alpha)RI^2 - g\,Cos\,\alpha$; $(4\pi-\alpha)RI^2 - g\,Cos\,\alpha$ enz. voor de opvolgende overgangspunten.

We weten nu met zekerheid dat, zoowel voor het bijzondere als voor het meer algemeene geval, de beweging steeds zal doorgaan, onder voorwaarde dat

$$I^2 \overline{\overline{>}} \frac{g}{2R\pi}\left(1 - \frac{4\pi\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}^2}(Cos\,\alpha - 1)\right) \quad . \; . \; . \; (14_a)$$

is. Daar voor $\theta = 0$ de breuk $\dfrac{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}^2}$ hare grootste waarde erlangt, is men zeker den doorgang te verkrijgen, zoo $I^2 = \dfrac{g}{2R\pi}\left(1 + \dfrac{4\pi\alpha}{a^2+\alpha^2}(1 - Cos\,\alpha)\right)$ genomen wordt. Was de draad bij den aanvang horizontaal, dus $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, dan werd

$$I^2 = \frac{g}{2R\pi}\left(\frac{8r^2+45R^2\pi^2}{8r^2+5R^2\pi^2}\right);\text{ voor } R=2r \text{ is } I = 1{,}19625\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

De verticaal naar omlaag gerichte kracht, welke die hoeksnelheid zou moeten aanbrengen, heeft tot waarde $K = M \times V = 1{,}879\, G\sqrt{\frac{R}{g}}$. Die voor een ondeelbaar oogenblik werkende kracht is dus evenredig aan het gewicht van den bol en aan den vierkantswortel uit den straal des cylinders. Was $R = g = 9{,}812$ meters, dan was K ongeveer het dubbele van het gewicht.

Is het aantal slagen, die de draad aanvankelijk om den cylinder gewonden is, eindig, b. v. n, kunnende n geheel of gebroken zijn, dan zal, als de draad geheel van den cylinder gewonden is, $\psi = 2n\pi + \alpha$ zijn; dus

$$K_n = \frac{g}{R}\cdot\frac{2n\pi+\alpha}{a^2+(2n\pi+\alpha)^2}\,Sin(2n\pi+\alpha).$$

Vervolgens is er eenig verschil in de formulen, die voor het algemeene en het bijzondere geval behooren gebezigd te worden. Gebruiken we ter onderscheiding weer de indices, die voor het bijzondere geval, d. i. wanneer de spanning in den eersten hoogsten stand nul wordt, vroeger gebezigd werden; dan schrijven we

$$H_n^2 = \frac{2g}{R}\cdot\frac{\alpha+2n\pi\theta}{a^2+(\alpha+2n\pi\theta)^2}\left\{Cos\,\alpha - Cos(2n\pi+\alpha)\right\} + I^2.$$

$$H_{1n}^2 = \frac{4g\pi}{R}\cdot\frac{1+\theta(n-2)}{a^2+4\pi^2\left\{1+\theta(n-2)\right\}^2}\left\{1-Cos(2n\pi+\alpha)\right\} + \frac{g}{2R\pi}.$$

$$V_n^2 = 2Rg(2n\pi+\alpha)^2\cdot\frac{\alpha+2n\pi\theta}{a^2+(\alpha+2n\pi\theta)^2}\left\{Cos\,\alpha - Cos(2n\pi+\alpha)\right\} +$$
$$+ R^2I^2(2n\pi+\alpha)^2.$$

$$V_{1n}^2 = 4Rg\pi(2n\pi+\alpha)^2\cdot\frac{1+\theta(n-2)}{a^2+4\pi^2\left\{1+\theta(n-2)\right\}^2} + \frac{gR(2n\pi+\alpha)^2}{2\pi}.$$

$$F_n = (2n\pi+\alpha)\left(2g\cdot\frac{\alpha+2n\pi\theta}{a^2+(\alpha+2n\pi\theta)^2}\left\{Cos\,\alpha - Cos(2n\pi+\alpha)\right\} + RI^2\right) -$$
$$-g\,Cos(2n\pi+\alpha).$$

$$F_{1n} = g(2n\pi+\alpha)\left(\frac{2\pi\left\{1+\theta(n-2)\right\}}{a^2+4\pi^2\left\{1+\theta(n-2)\right\}^2}\left\{1-Cos(2n\pi+\alpha)\right\} + \frac{1}{2\pi}\right) -$$
$$-g\,Cos(2n\pi+\alpha).$$

Was n een geheel getal, dan gingen $Sin(2n\pi+\alpha)$ en $Cos(2n\pi+\alpha)$ in $Sin\,\alpha$ en $Cos\,\alpha$ over; waardoor voor het algemeene geval $H_n = I$ werd. De eindhoeksnelheid is dan gelijk aan de initiale; terwijl de snelheid in de baan door $RI(2n\pi+\alpha)$ aangegeven zou worden. De spanningsversnelling zou tot waarde hebben $RI^2(2n\pi+\alpha) - g\,Cos\,\alpha$. Het is duidelijk, dat deze uitkomsten ook voor het bijzondere geval moeten gelden; ze worden daar echter slechts merkbaar, wanneer men er de voor dit geval passende I in terugbrengt. De eindversnelling, waarin I niet voorkomt, heeft voor beide gevallen dezelfde waarde, namelijk

$$K_n = \frac{g}{R} \cdot \frac{2n\pi+\alpha}{a^2+(2n\pi+\alpha)^2}\, Sin\,\alpha.$$

Welke ook de eindige waarde van n zij, zeker is het dat de bol, tengevolge der bestaande eindsnelheid, na de ontwinding niet zal in rust blijven, en dat de mogelijkheid eener nieuwe opwinding bestaat. Zoodra het aanhechtingspunt van den draad aan den cylinder als laatste raakpunt gediend heeft, zal het middelpunt van den bol een halven cirkel trachten te beschrijven, om dit aanhechtingspunt als middelpunt; totdat het middelpunt in de verlengde richting der laatste raaklijn van de ontwinding gekomen is; de eerste stand der raaklijn voor de opwinding is dan bereikt.

Stel dat in den laatsten stand der ontwinding de draad rm, figuur 3, zoodanig geplaatst zij dat rM, de straal van het raakpunt, een hoek $r\mathrm{MP}_1 = \beta$ met de horizontale door M maakt, of, gerekend van af het beginpunt P_1, een hoek gelijk $\pi+\beta$, waarin β, onafhankelijk van de figuur, een willekeurige waarde kleiner dan π bezit. De waarde van β is dan uit de gegevene n en α te vinden; want $2n\pi+\alpha = p\pi+\pi+\beta$, met de voorwaarden $\beta<\pi$ en $p=$ een geheel getal; waardoor voor gegevene n en α, p en β te berekenen zijn. Is bijv. $n = 5\frac{2}{3}$, $\alpha = 140°$, dan is $11\frac{1}{3}\pi + \frac{7}{9}\pi = = p\pi+\pi+\beta$; waaruit $p = 11$, $\beta = 20°$.

Is daarop de bol, tengevolge der eindsnelheid, zoover voortgeslingerd, dat de hoek β een willekeurige waarde ϕ heeft verkregen, en beschouwen we dan de beweging, dan hebben we

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{m_1 r \times G\,Sin\,\phi}{T+(2n\pi+\alpha)^2 R^2 M} = -\frac{gR(2n\pi+\alpha)}{\frac{2}{5}r^2+R^2(2n\pi+\alpha)^2}\,Sin\,\phi.$$

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{2gR(2n\pi+\alpha)}{\frac{2}{5}r^2+R^2(2n\pi+\alpha)^2}\,Cos\,\phi + C;\ \text{of}\ \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = A\,Cos\,\phi + C.$$

Voor $\phi = \beta$ is $\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = H_n^2$; dus $C = H_n^2 - A\,Cos\,\beta$, en

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = A\,(Cos\,\phi - Cos\,\beta) + H_n^2.$$

Is m in m_2 gekomen, dan is $\phi = \pi + \beta$; dus het vierkant der hoeksnelheid

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = H_n^2 - 2A\,Cos\,\beta.$$

Zal die stand bereikt worden, dan moet, in het algemeen, $H_n^2 \overset{=}{>} 2A\,Cos\,\beta$ zijn; of, zoo we aan A de vroegere gedaante geven, en voor H_n^2 de waarde in functie van β substitueeren,

$$\frac{2g}{R}\cdot\frac{\alpha+2n\pi\theta}{a^2+(\alpha+2n\pi\theta)^2}\left(Cos\left\{(2n-p-1)\pi-\beta\right\} - Cos\left\{(p+1)\pi+\beta\right\}\right)+$$
$$+ I^2 \overset{=}{>} \frac{4g}{R}\cdot\frac{\alpha+2n\pi}{a^2+(\alpha+2n\pi)^2}\,Cos\,\beta.$$

Waaruit blijkt dat het, voor elke waarde van n en β, van I^2 afhangt of de omzwaai al of niet mogelijk zal zijn. Zou echter de eerste omgang, en dus ook de volgende, tot stand kunnen komen, dan moet volgens (14_a)

$$I^2 \overset{=}{>} \frac{g}{2R\pi} + \frac{2g}{R}\cdot\frac{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}^2}\,(1-Cos\,\alpha)$$

zijn; terwijl $Cos\,\beta$ de grootste waarde voor $\beta = 0$ bezit. Nemen we dus de geheele lengte van den draad niet kleiner dan $3R\pi$, dan zou, zoo I^2 de boven aangeduide waarde bezit, niet alleen de doorgang der ontwinding plaats hebben, maar ook zou de omzwaai tot stand komen, voor zoover het de hoeksnelheid betreft, en aanvangen voor $\beta = 0$, wanneer het middelpunt van den bol verticaal beneden P_1 was. Alsdan had men

$$H_n^2 = \frac{2g}{R}\cdot\frac{\alpha+\theta(3\pi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(3\pi-\alpha)\right\}^2}(1+Cos\,\alpha) + \frac{g}{2R\pi} +$$
$$+ \frac{2g}{R}\cdot\frac{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2\pi-\alpha)\right\}^2}\,(1-Cos\,\alpha) >$$
$$> \frac{g}{2R\pi} + \frac{4g}{R}\cdot\frac{\alpha+\theta(3\pi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(3\pi-\alpha)\right\}^2} > \frac{4g}{R}\cdot\frac{3\pi^2}{a^2+9\pi^2} = 2A_1.$$

Laat nu de lengte van den draad grooter ondersteld worden, dan nemen beide cyclometrische breuken af; maar die, welke bij H_n^2 behoort in mindere mate, dan die van A_1; daarenboven wordt dan van de waarde van H_n^2 slechts een deel met $Cos\,\beta$ vermenigvuldigd; terwijl $2A_1$ in haar geheel dien factor verkrijgt; waaruit onmiddellijk volgt, dat des te meer $H_n^2 > 2A_1\,Cos\,\beta$ zal zijn. Is dus de lengte van den draad grooter dan $3R\pi$, zoo zal, na het bereiken van den verticalen stand in P_3, zoo I^2 de gezegde waarde bezit, de beweging niet slechts onafgebroken doorgaan, totdat het laatste raakpunt verkregen is; maar ook zal, nadat de ontwinding geëindigd is, de omzwaai krachtens de bestaande hoeksnelheid kunnen geschieden.

Het tot stand komen van den omzwaai hangt echter ook van de spanning van den draad af, die daartoe positief zal behooren te blijven. Nu is in het algemeen de spanningsversnelling bij de cirkelvormige beweging

$$S = \rho\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 + g\,Cos\,\phi;$$

dus in den hoogsten stand, voor $\rho = 3R\pi$,

$$S = 3R\pi(H_n^2 - 2A) - g.$$

Volgens het daareven gevondene is $H_n^2 - 2A > \frac{g}{2R\pi}$; dus

$$S > \frac{3R\pi}{2R\pi}g - g > 0,$$

zoodat de spanning in het hoogste punt blijft bestaan. Duidelijk is het na het voorgaande, dat dit ook bij grootere lengten het geval zou zijn.

Verschillende gevallen, waarbij de lengte kleiner dan $3R\pi$ is, zouden nog kunnen worden behandeld. Daarbij kwam dan tevens de opwinding van den draad ter sprake, die weer tot uitgebreide beschouwingen en berekeningen aanleiding geven kan; ook hier treden botsingen en worpbewegingen op. Afgezien daarvan willen we hier nog het een en ander mededeelen, dat betrekking heeft op de opwinding in een meer algemeen geval, om dan met de beschouwing omtrent $n = \infty$ te eindigen.

Bij den aanvang der opwinding zij het vierkant der hoeksnelheid H_n^2, welke waarde ondersteld wordt groot genoeg te zijn om de spanning te bewaren. Wanneer de opwinding begint, maakt de draad een scherpen hoek met de horizontale door het middelpunt des cy-

linders, zij die hoek gelijk v. Die richting wordt ondersteld de aanvangsrichting te zijn, van waar men de hoeken ψ begint te meten. De hoek, welken de draad in zekeren stand met de aanvangsrichting maakt, tevens den boog aangevende, over welken de opwinding heeft plaats gehad, vindt men

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \pm \frac{g}{R} \cdot \frac{2n\pi + \alpha - \psi}{a^2 + (2n\pi + \alpha - \psi)^2} \, Cos(\psi \pm v).$$

Van de beide teekens onder den Cosinus moet het bovenste gebezigd worden, wanneer de draad zelf de horizontale ontmoet, het onderste, wanneer dit met het verlengde van den draad plaats heeft. Het plus- of minteeken van het tweede lid moet gebruikt worden, naarmate de versnelling g ten bate der beweging komt, of haar tegenwerkt. Verder is nu

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \pm \frac{2g}{R} \cdot \frac{2n\pi + \alpha - \theta\psi}{a^2 + (2n\pi + \alpha - \theta\psi)^2} \left\{Sin(\psi \pm v) \mp Sin\, v\right\} + h_n^2;$$

$$F = \pm 2g(2n\pi + \alpha - \psi) \cdot \frac{2n\pi + \alpha - \theta\psi}{a^2 + (2n\pi + \alpha - \theta\psi)^2} \left\{Sin(\psi \pm v) \mp Sin\, v\right\} +$$
$$+ R(2n\pi + \alpha - \psi)h_n^2 \pm g\, Sin(\psi \pm v).$$

Gelden de bovenste teekens, dan heeft men den stand, die in figuur 4 is voorgesteld; waarbij slechts op de richting, niet op de lengte van den draad gelet is.

Het valt gemakkelijk een reeks van maxima en minima voor opvolgende waarden van $\psi + v$ te vinden; waaruit ten slotte blijkt, dat en de hoeksnelheid en de spanning voldoende zullen zijn om de geheele opwinding tot stand te brengen, zoo men had

$$H_n^2 > \frac{2g}{R} \cdot \frac{2n\pi + \alpha - \theta\left(\frac{4n-1}{2}\pi - v\right)}{a^2 + \left\{2n\pi + \alpha - \theta\left(\frac{4n-1}{2}\pi - v\right)\right\}^2}(1 + Sin\, v) +$$
$$+ \frac{2g}{R(2\alpha + \pi + 2v)};$$

of door invoering der voor H_n op bladz. 77 gevondene waarde

$$I^2 > \frac{2g}{R}\left(\frac{2n\pi + \alpha - \theta\left(\frac{4n-1}{2}\pi - v\right)}{a^2 + \left\{2n\pi + \alpha - \theta\left(\frac{4n-1}{2}\pi - v\right)\right\}^2}(1 + Sin\, v) +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\alpha + \pi + 2v} - \frac{\alpha + 2n\pi\theta}{a^2 + (\alpha + 2n\pi\theta)^2}\left\{Cos\,\alpha - Cos(2n\pi + \alpha)\right\}\right).$$

Ook voor het geval dat men de onderste teekens der algemeene formulen kiest, kan de figuur geteekend, en kunnen beschouwingen gehouden worden, diè tot op zekere hoogte overeenstemmen met die, welke bij het gebruik der bovenste teekens gelden. Hetzelfde kan gezegd worden omtrent hetgeen men verkrijgt, zoo eene der nog overige vereenigingen der teekens in de formulen gebezigd wordt.

Wanneer $n = \infty$ is kan er alleen van ontwinding sprake zijn. Gebruik makende van het gevondene, komen we dan tot de navolgende besluiten.

1. De hoekversnelling neemt voortdurend af en wordt oneindig klein. Immers bij den aanvang was

$$K = \frac{g}{R} \cdot \frac{\psi \, Sin \, \psi}{a^2 + \psi^2},$$

en voor de homostatische punten, is ze bij den $(n+1)$ den omgang

$$K_n = \frac{g}{R} \cdot \frac{(2n\pi + \psi) \, Sin \, \psi}{a^2 + (2n\pi + \psi)^2} = \frac{g}{R} \cdot \frac{1}{\frac{a^2}{(2n\pi + \psi)^2} + 1} \times \frac{Sin \, \psi}{2n\pi + \psi}.$$

2. De hoeksnelheid neemt toe, bij opvolgende omgangen, voor die homostatische punten, waarvoor $Cos \, \alpha < Cos \, \psi$ is; ze neemt af, waar men heeft $Cos \, \alpha > Cos \, \psi$. De onderlinge verschillen voor de verschillende punten worden echter kleiner en kleiner, zoodat de hoeksnelheid meer en meer tot een standvastige grootheid, namelijk tot de initiale hoeksnelheid I, nadert. Bij den eersten omgang was

$$H^2 = \frac{2g}{R} \cdot \frac{\alpha + \theta(\psi - \alpha)}{a + \{\alpha + \theta(\psi - \alpha)\}^2} (Cos \, \alpha - Cos \, \psi) + I^2;$$

en bij den $(n+2)$ den omgang

$$H_n^{\,2} = \frac{2g}{R} \cdot \frac{\alpha + \theta(2n\pi - \psi - \alpha)}{a^2 + \{\alpha + \theta(2n\pi + \psi - \alpha)\}^2} (Cos \, \alpha - Cos \, \psi) + I^2.$$

3. De snelheid in de baan streeft mede naar standvastigheid, en wel naar de waarde ∞. Het verschil, dat er voor homostatische punten bij verschillende omgangen te ontdekken was, verdwijnt meer en meer. Gemakkelijk ontdekt men die waarheid, zoo men de uitdrukking voor den $(n+1)$ den omgang schrijft onder de navolgende gedaante.

$$V_n{}^2 = (2n\pi+\psi)^2 \left(2gR \cdot \frac{\alpha+\theta(2n\pi+\psi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2n\pi+\psi-\alpha)\right\}^2}(Cos\alpha - Cos\psi) + R^2 I^2\right).$$

4. Voor de spanning geldt wat onder 3 voor de snelheid bij de baan gezegd is. Ook zij vertoont kleiner en kleiner verschillen voor homostatische punten bij opvolgende omgangen, en vordert tot ∞; zooals uit de formule voor den $(n+1)$ den omgang onmiddellijk blijken kan.

$$F_n = 2g\,(2n\pi+\psi)\frac{\alpha+\theta(2n\pi+\psi-\alpha)}{a^2+\left\{\alpha+\theta(2n\pi+\psi-\alpha)\right\}^2}(Cos\,\alpha - Cos\,\psi) +$$
$$+ R\,(2n\pi+\psi)\,I^2 - g\,Cos\,\psi.$$

De gevondene einduitkomsten gelden natuurlijk ook voor het geval dat de beperkingen, die we ons gemakshalve en ter wille der duidelijkheid veroorloofden, ophouden te bestaan. Gemakkelijk blijkt dit dan ook, wanneer men de eindformulen voor het meest algemeene geval overschrijft. Zoo wordt dan uit (1)

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{g\,(l+R\Phi)\,Sin\,(\alpha+\Phi)}{\frac{2}{5}r^2+(l+R\Phi)^2},$$

voor den $(n+1)$ den omgang verkregen

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{g\left\{l+R(2n\pi+\Phi)\right\}Sin\,(\alpha+\Phi)}{\frac{2}{5}r^2+\left\{l+R(2n\pi+\Phi)\right\}^2}.$$

Evenzoo vindt men voor het vierkant der hoeksnelheid bij den $(n+1)$ den omgang

$$H_n{}^2 = \frac{2g\left\{l+R\theta(2n\pi+\Phi)\right\}}{\frac{2}{5}r^2+\left\{l+R\theta(2n\pi+\Phi)\right\}^2}\left\{Cos\,\alpha - Cos(\alpha+\Phi)\right\} + I^2;$$

en zoo vervolgens voor de overige formulen.

PRIJSVRAAG No. 12,

BEANTWOORD DOOR

Dr. G. A. OSKAMP.

Men vraagt te bewijzen dat de waarde der coëfficienten, die men bij het onderzoek naar de deelbaarheid door een priemgetal, in elk talstelsel naar willekeur, bezigen moet, om door middel van aftrekking,

een, twee, drie enz. cijfers te elimineeren, periodiek is. En ten tweede, dat het aantal termen der periode gelijk is aan het aantal cijfers van het repetendum, dat bij de deeling door hetzelfde priemgetal wordt opgeleverd.

In de cijferkunst wordt geleerd, dat men bij 't onderzoek naar de deelbaarheid van eenig getal door een willekeurig priemgetal, uitgenomen 2 en 5, een coëfficient behoeft, waarvan de waarde gevonden wordt door de formule

$$f = \frac{pq-1}{10};$$

wanneer p 't priemgetal is en q een getal, dat men zoodanig moet kiezen, dat $pq-1$ een 10-voud wordt. Die formule is meer algemeen te maken; dat is, ze kan dienen voor 't geval, dat 't grondtal niet een bepaald getal, maar willekeurig, stel gelijk G, is. Om dit aan te toonen, en tevens de beteekenis en 't gebruik van den coëfficient f te doen inzien, diene 't navolgende.

Ieder getal G kan, in 't G-tallig stelsel geschreven, voorgesteld worden door

$$\text{G} = GS + a_0,$$

als S 't aantal G-tallen en a_0 't aantal eenheden aangeeft. 't Onderzoek naar de deeling door p zou dan op de eenvoudigste wijze aldus in te stellen zijn, dat men van dit getal een willekeurig p-voud aftrok, en naging, of de rest door p deelbaar was. Bestond die deelbaarheid, dan was ook G door p deelbaar; bestond ze niet, dan was G geen p-voud. Ondertusschen zou een eerste aftrekking in den regel niet voldoende zijn, om over de deelbaarheid in quaestie op 't oog af te oordeelen; een herhaling der bewerking is dan noodzakelijk. Wil men dat bij elke aftrekking telkens één cijfer, dat der eenheden, wegvalt, dan moet men 't af te trekken p-voud zoodanig kiezen, dat men heeft

$$mp = Gb + a_0.$$

't Aantal G-tallen van mp, dat is b, is hier onbepaald, en wordt uitgedrukt door de formule

$$b = \frac{mp - a_0}{G}.$$

Daar nu b, behalve van p en m, ook van a_0 afhangt, zou 't beoogde doel slechts te bereiken zijn, zoo men bij elke vernieuwde

aftrekking een andere waarde voor b koos. Bedenkt men echter dat, wegens 't voorkomen der onderling afhankelijke, maar voor 't overige willekeurige, b en m, geschreven mag worden, $b = fa_0$, $m = qa_0$, dan kan men door substitutie en deeling door a_0 verkrijgen

$$f = \frac{pq-1}{G};$$

de juistheid dezer formule wilden wij aantoonen.

Omdat f nu onafhankelijk van 't cijfer der eenheden van 't te onderzoeken getal is, zal die coëfficient bij elke volgende aftrekking dezelfde waarde hebben, en alleen met p veranderen.

In de praktijk komt de bewerking volgens 't voorgaande neer op 't zoeken van f, 't vermenigvuldigen van 't aantal eenheden met dien coëfficient, 't verminderen van 't aantal G-tallen van 't te onderzoeken getal met dit product, en 't weglaten van 't cijfer der eenheden. 't Verkregene verschil wordt op gelijke wijze behandeld, enz.; totdat men een rest verkrijgt, waarvan men onmiddellijk ontdekken kan of ze een p-voud is.

Van deze bewerkingen is de eerste de minst werktuigelijke; men kan zelfs de vraag stellen of ze steeds uitvoerbaar is, of men in ieder geval q zoodanig kan kiezen, dat $pq-1$ een G-voud wordt. De mogelijkheid daarvan is bewezen, als men kan aantoonen dat, bij beurtelingsche vermenigvuldiging van p met alle getallen van 1 tot en met $G-1$, 't product eenmaal het cijfer der eenheden 1 oplevert. En dat dit 't geval moet zijn, wordt weer boven allen twijfel verheven, zoo men bewijst, dat bij die vermenigvuldigingen 't cijfer der eenheden voor ieder product een ander is.

Stel dat $$pq = Gb + a$$

is; dan merken we vooreerst op dat p een priemgetal is, dat niet als factor in G kan voorkomen; zoodat men niet heeft $G = pk$, daar anders

$$f = \frac{pq-1}{G} = \frac{\frac{Gq}{k}-1}{G} = \frac{Gg-K}{Gk}$$

geen geheel getal zijn zou; en daar verder q volgens onderstelling tusschen 0 en $G-1$ moet liggen, kan wel b maar niet $a = 0$ zijn. Was 't nu mogelijk dat, voor een andere waarde van q, 't cijfer der eenheden ook gelijk a werd, dan was

$$pq_1 = Gb_1 + a;$$

en door aftrekking bekwam men

$$p(q-q_1)=G(b-b_1);$$

't geen in verband met 't betoogde onmogelijk is.

Men kan dus altijd voor q zoodanige waarde, kleiner dan G, vinden, dat f een geheel getal wordt. Voor $q<G$ is noodwendig $f<p$.

Had men bij de aftrekking $G-mp$ niet slechts 't cijfer der eenheden maar ook dat der G-tallen willen doen wegvallen, dan moest men schrijven

$$G=G^2 b_1+a_0{}^1;$$

waarbij b_1 't aantal G^2-tallen aangeeft, en $a_0{}^1$ een getal van twee cijfers in 't G-tallig stelsel is. De voorgaande redeneering volgende vinden we dan voor de verlangde bewerking den coëfficient

$$f_2=\frac{pq_2-1}{G^2}, \qquad q_2<G^2,\ f_2<p.$$

q_2 behoort zoodanig gekozen te worden dat, na vermenigvuldiging met p, niet slechts de eenheid als cijfer der eenheden optreedt, maar ook 't cijfer der G-tallen gelijk nul is. Hiertoe moet q_2 de gedaante Gc_1+q hebben; zijnde c_1 zoodanig, dat de vermenigvuldiging met p een product doet ontstaan, dat na met f_1 vermeerderd te zijn een G-voud oplevert; zoodat men heeft

$$\frac{c_1p+f_1}{G}=f_2.$$

Op den aangewezen weg doorgaande zou men nu $3, 4, \ldots n$ cijfers bij elke aftrekking kunnen doen wegvallen. Volgens 't voorgaande is

$$f_3=\frac{pq_3-1}{G^3};\ q_3<G^3,\ f_3<p.$$

$$q_3=G^2c_2+Gc_1+q=G^2c_2+q_2;\ \frac{c_2p+f_2}{G}=f_3,$$

en in 't algemeen

$$f_k=\frac{pq_k-1}{G^k};\ q_k<G^k,\ f_k<p.$$

$$q_k=G^{k-1}c_{k-1}+G^{k-2}c_{k-2}+\ldots\ldots+q=G^{k-1}c_{k-1}+q_{k-1};$$

$$\frac{c_{k-1}p+f_{k-1}}{G}=f_k \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ (\alpha)$$

Voor de opvolgende coëfficienten schrijven we

$$f_1=\frac{pq_1-1}{G};\ f_2=\frac{pq_2-1}{G^2};\ f_3=\frac{pq_3-1}{G^3};\ldots f_n=\frac{pq_n-1}{G^n}.\ (\delta)$$

Wat 't gebruik dier coëfficienten betreft, daaromtrent valt op te merken dat 't onderzoek te sneller afloopt, naarmate men meer cijfers tegelijk laat wegvallen. Natuurlijk mag dit aantal hoogstens de helft van 't aantal cijfers zijn van 't getal, dat men onderzoekt; zoodat er alle kans bestaat dat men bij een zelfde bewerking verschillende f moet gebruiken. Als eenvoudig voorbeeld kiezen we 't onderzoek van 't getal 80987654321, geschreven in ons talstelsel, met betrekking tot de deelbaarheid door 7. Daar dit getal uit 11 cijfers bestaat, zullen we er aanvankelijk 5 laten wegvallen. Voor $p = 7$, $G = 10$ en $n = 5$ is

$$f_5 = \frac{7 \times 57143 - 1}{100000} = 4.$$

80987654321
217284
592592
592
0 deelbaar door 7.

$$f_3 = \frac{7 \times 143 - 1}{10} = 1;$$

Gemakkelijk zien we in, dat 't aantal onderling verschillende f voor een zelfden p begrensd is. Immers hadden we voor alle f, $f < p$; 't bedoelde aantal kan dus hoogstens gelijk $p - 1$ zijn. Ten behoeve van de samenstelling eener tafel der f is deze opmerking van belang; maar van grooter belang daarvoor is de beantwoording der vraag, of de f ook een onderlinge betrekking, bijv. een periodiciteit bezitten; zooals de prijsvraag in quaestie aanleiding geeft te vermoeden. Is dit vermoeden juist, dan moet van af zekere f, bijv. f_{n-1},

$$f_n = f_1, \; f_{n+1} = f_2, \; f_{n+2} = f_3, \ldots f_{n+k-1} = f_k$$

zijn; waarin k alle geheele positieve waarden hebben kan.

Volgens (δ) wordt hieruit

$$\frac{pq_1 - 1}{G} = \frac{pq_n - 1}{G^n}; \; \frac{pq_2 - 1}{G^2} = \frac{pq_{n+1} - 1}{G^{n+1}}; \; \frac{pq_3 - 1}{G^3} = \frac{pq_{n-2} - 1}{G^{n+2}} \text{ enz.}$$

$$\frac{pq_k - 1}{G^k} = \frac{pq_{k+n-1} - 1}{G^{k+n-1}};$$

waaruit volgt

$$G^{n-1}q_1-q_n=\frac{G^{n-1}-1}{p};\quad G^{n-1}q_2-q_{n+1}=\frac{G^{n-1}-1}{p};$$

$$G^{n-1}q_3-q_{n+2}=\frac{G^{n-1}-1}{p};\quad G^{n-1}q_k-q_{k+n-1}=\frac{G^{n-1}-1}{p}.$$

De conditio sine qua non, waarop alle bovenstaande vergelijkingen wijzen, is dat $\frac{G^{n-1}-1}{p}$ een geheel getal zijn moet; dezelfde voorwaarde, waaronder de ontwikkeling van $\frac{1}{p}$ in een periodieke breuk een repetendum van $n-1$ cijfers zal opleveren. De juistheid der laatste stelling wordt bewezen door de overweging, dat men bij een dergelijke ontwikkeling 't deeltal met zoodanige macht van 't grondtal vermenigvuldigt, dat de rest der deeling op nieuw de eenheid oplevert. Nu zullen er $n-1$ cijfers in 't quotient te voorschijn komen, wanneer men met de $(n-1)$ de macht van 't grondtal vermenigvuldigt, omdat 't quotient een G-deelige breuk moet zijn, en de nul als cijfer in rekening komt. Men heeft dan

$$\frac{G^{n-1}\times 1}{p}=\frac{G^{n-1}-1+1}{p}=\frac{G^{n-1}-1}{p}+\frac{1}{p}.$$

Is dus $\frac{G^{n-1}-1}{p}$ een geheel getal, dan is dit 't quotient en de eenheid treedt als rest te voorschijn; dit quotient is dan de periode, die uit $n-1$ cijfers bestaat. Hierin kan n nooit grooter dan p zijn; en zoo $n<p$ is, moet $n-1$ een evenmatig deel van $p-1$ zijn. Immers onder de gestelde voorwaarden, dat G en p geheele getallen zijn, en 't tweede een priemgetal, niet deelbaar op 't eerste, geldt 't bekende theorema van Fermat, volgens 't welk de uitdrukking $\frac{G^{p-1}-1}{p}$ een geheel getal voorstelt; waaruit we afleiden dat de p-de rest der deeling weer gelijk aan de eenheid zijn moet; zoodat er steeds een periode van $p-1$ cijfers moet bestaan. Waar alzoo $n<p$ is, zal de periode van $n-1$ cijfers een onderperiode van de periode van $p-1$ cijfers voorstellen, daar toch een onzuivere periode hier niet mogelijk is; $n-1$ is dan een evenmatig deel van $p-1$. Natuurlijk zou, bij een veelvoudige periode, $n-1$ een veelvoud van $p-1$ zijn.

Ondertusschen is hiermee 't bewijs voor de periodiciteit der coëfficienten f nog niet geleverd. Wat we na 't gevondene met zekerheid mogen zeggen is, dat, zoo die periodiciteit bestaat, 't aantal

f der periode voor zekere p, altijd óf gelijk aan 't aantal cijfers van 't repetendum van $\frac{1}{p}$ zal zijn, óf er een veelvoud of evenmatig deel van is.

Voeren we de deeling $\frac{1}{p}$ op de bekende wijze uit, en stellen we dat 't quotient een periode van $n-1$ cijfers levert, waarbij dan de rest der deeling gelijk 1 is. Stellen we de cijfers van 't quotient in volgorde door a_1, a_2, a_3 enz. voor, de vereenigingen van 2, 3,... cijfers door P_2, P_3,.... de overeenkomstige resten der deelingen door r_1, r_2, r_3,... dan verkrijgen we

$$G:p=a_1+\frac{r_1}{p};\quad G^2:p=Ga_1+a_2+\frac{r_2}{p}=P_2+\frac{r_2}{p};$$

$$G^3:p=G^2a_1+Ga_2+a_3+\frac{r_3}{p}=P_3+\frac{r_3}{p},\ \text{enz.}\ G^{n-1}:p=P_{n-1}+\frac{1}{p}.$$

Gaan we dan verder door, dan vinden we

$$G^n:p=P_n+\frac{r_1}{p};\quad G^{n+1}p=P_{n+1}+\frac{r_2}{p},$$

en in 't algemeen

$$G^k:p=P_k+\frac{r_k}{p};\quad G^{k+n-1}:p=P_{k+n-1}+\frac{r_k}{p}.$$

Vermenigvuldigen we beide leden der aldus verkregene vergelijkingen met de overeenkomstige f, en tellen we daarna bij beide leden $\frac{1}{p}$ op, dan komt er

$$\frac{f_1G+1}{p}=f_1a_1+\frac{f_1r_1+1}{p};\quad \frac{f_2G^2+1}{p}=f_2P_2+\frac{f_2r_2+1}{p};$$

$$\frac{f_3G^3+1}{p}=f_3P_3+\frac{f_3r_3+1}{p}\ \text{enz.}\ \frac{f_{n-1}G^{n-1}+1}{p}=f_{n-1}P_{n-1}+\frac{f_{n-1}+1}{p};$$

$$\frac{f_nG^n+1}{p}=f_nP_n+\frac{f_nr_1+1}{p};\quad \frac{f_{n+1}G^{n+1}+1}{p}=f_{n+1}P_{n+1}+\frac{f_{n+1}r_2+1}{p};$$

en in 't algemeen

$$\frac{f_kG^k+1}{p}=f_kP_k+\frac{f_kr_k+1}{p};$$

$$\frac{f_{k+n-1}G^{k+n-1}+1}{p}=f_{k+n-1}P_{k+n-1}+\frac{f_{k+n-1}r_k+1}{p}.$$

Uit de formulen (δ) leiden we af

$$\frac{f_1 G+1}{p}=q_1;\ \frac{f_2 G^2+1}{p}=q_2;\ \frac{f_3 G^3+1}{p}=q_3, \ldots$$

$$\frac{f_{n-1} G^{n-1}+1}{p}=q_{n-1}.$$

$$\frac{f_n G^n+1}{p}=q_n;\ \frac{f_{n+1} G^{n+1}+1}{p}=q_{n+1}; \ldots$$

en in 't algemeen

$$\frac{f_k G^k+1}{p}=q_k;\ \frac{f_{k+n-1} G^{k+n-1}+1}{p}=q_{k+n-1}.$$

De eerste leden van deze vergelijkingen zijn gelijk aan de overeenkomstige der onmiddellijk voorgaande, twee aan twee genomen; zoodat we de overeenkomstige tweede leden aan elkaar gelijk mogen stellen; waardoor we na een kleine herleiding verkrijgen

$$p(q_1-f_1 a_1)=f_1 r_1+1; \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

$$p(q_2-f_2 P_2)=f_2 r_2+1; \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

$$p(q_3-f_3 P_3)=f_3 r_3+1; \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

$$p(q_{n-1}-f_{n-1} P_{n-1})=f_{n-1}+1; \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$p(q_n-f_n P_n)=f_n r_1+1; \ldots \ldots \ldots (5)$$

$$p(q_{n+1}-f_{n+1} P_{n+1})=f_{n+1} r_2+1; \ldots \ldots (6)$$

$$\ldots \ldots \ldots$$

en in 't algemeen

$$p(q_k-f_k P_k)=f_k r_k+1; \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

$$p(q_{k+n-1}-f_{k+n-1} P_{k+n-1})=f_{k+n-1} r_k+1 \ldots \ldots (8)$$

De vergelijkingen (1) en (5), evenzoo (2) en (6), ... (7) en (8) nemen we te zamen, en vinden door aftrekking

$$r_1(f_n-f_1)= \text{een } p\text{-voud};\ r_2(f_{n+1}-f_2)= \text{een } p\text{-voud};$$

en in 't algemeen

$$r_k(f_{k+n-1}-f_k)= \text{ een } p\text{-voud.}$$

De r zoowel als de f zijn alle kleiner dan p; zoodat aan de laatste vergelijkingen slechts voldaan kan worden, wanneer men heeft

$$f_n=f_1;\ f_{n+1}=f_2 \text{ enz. } f_{k+n-1}=f_k.$$

Daar gezegde vergelijkingen niet hypothetisch, maar volgens hare afleiding identiek zijn, is 't bestaan der periodiciteit absoluut bewezen. Ook 't tweede gevorderde bewijs, dat namelijk 't aantal termen der f-periode gelijk aan 't aantal cijfers van 't overeenkomstige repe-

tendum moet zijn, ligt in 't voorgaande opgesloten. We zagen toch dat 't terugkeeren eener rest onvermijdelijk 't op nieuw verschijnen eener f met zich bracht; zoodat 't aantal termen der f-periode niet grooter dan dat der r-periode zijn kan. Blijkt dus omgekeerd, dat 't niet terugkeeren der r 't op nieuw verschijnen der f onmogelijk maakt, dan zijn de bedoelde aantallen gelijk, en 't bewijs der tweede stelling van de prijsvraag is geleverd. Volgens (7) is nu voor twee verschillende resten r_k en r_l

$$\begin{array}{l} p(q_k - f_k P_k) = f_k r_k + 1; \\ \underline{p(q_l - f_l P_l) = f_l r_l + 1;} \\ f_k r_k - f_l r_l = \text{een } p\text{-voud.} \end{array} \qquad \text{aftrekkende}$$

Was nu de mogelijkheid van gelijke f bij verschillende r niet uitgesloten, dan werd de laatste vergelijking voor $f_l = f_k$

$$f_k (r_k - r_l) = \text{een } p\text{-voud};$$

't geen onmogelijk is; daar p een ondeelbaar getal, grooter dan elk der onderling ongelijke r, en grooter dan f_k zijn moet.

Onze taak is hiermee geëindigd. — Daar 't echter, met 't oog op de praktijk, van eenig belang geacht mag worden een gemakkelijke rekenwijze te bezitten, tot 't vervaardigen der coëfficienten-tafel, zoeken we daarvoor een algorithmus.

Volgens (α) is in 't algemeen

$$\frac{c_k p + f_k}{G} = f_{k+1};$$

waaruit volgt

$$\frac{f_{k+1} G}{p} = c_k + \frac{f_k}{p}.$$

Deze formule leert dat, wanneer een zekere coëfficient der periode met 't grondtal vermenigvuldigd, en 't product door 't priemgetal in quaestie gedeeld wordt, de rest der deeling den voorgaanden coëfficient aangeeft; zoodat iedere voorgaande gemakkelijk en steeds op dezelfde wijze uit zijn volgende gevonden wordt. Bedoelde vermenigvuldiging komt voor elk grondtal daarop neer, dat men zich achter den bekenden coëfficient een nul denkt. Herinneren we ons verder dat uit (4) volgt

$$f_{n-1} + 1 = \text{een } p\text{-voud},$$

en bedenken we dat alle $f < p$ zijn, dan komen we tot 't besluit dat de laatste coëfficient der periode gelijk aan 't priemgetal min de eenheid is. De aangegevene bewerking levert verder den voorlaatsten, op twee na den laatsten, enz. den eersten coëfficient.

Daarbij is 't overbodig van te voren met 't aantal termen der periode, d. i. met 't aantal der cijfers van 't overeenkomstige repetendum der deeling, bekend te zijn; daar immers, wegens de onderlinge ongelijkheid der coëfficienten, 't terugkeeren der rest $p-1$ zegt dat men de grens der periode overschreden is; dat alzoo de voorlaatste rest de eerste coëfficient f_1 voorstelt.

Als voorbeelden ter toelichting zoeken we de perioden der f voor $p = 23$ en $p = 101$, in ons talstelsel.

$p = 23$

$p - 1 = 22 = f_{n-1}$	$1 = f_{n-12}$
$\underline{207}$	$\underline{0}$
$13 = f_{n-2}$	$10 = f_{n-13}$
$\underline{115}$	$\underline{92}$
$15 = f_{n-3}$	$8 = f_{n-14}$
$\underline{138}$	$\underline{69}$
$12 = f_{n-4}$	$11 = f_{n-15}$
$\underline{115}$	$\underline{92}$
$5 = f_{n-5}$	$18 = f_{n-16}$
$\underline{46}$	$\underline{161}$
$4 = f_{n-6}$	$19 = f_{n-17}$
$\underline{23}$	$\underline{184}$
$17 = f_{n-7}$	$6 = f_{n-18}$
$\underline{161}$	$\underline{46}$
$9 = f_{n-8}$	$14 = f_{n-19}$
$\underline{69}$	$\underline{138}$
$21 = f_{n-9}$	$2 = f_{n-20}$
$\underline{207}$	$\underline{0}$
$3 = f_{n-10}$	$20 = f_{n-21}$
$\underline{23}$	$\underline{184}$
$7 = f_{n-11}$	$16 = f_{n-22}$
$\underline{69}$	$\underline{138}$
$1 = f_{n-12}$	$22 = p - 1$

$\underline{n = 23,\ f_{n-22} = f_1 = 16.}$

$$
\begin{array}{lr}
p = 10 \quad n-1 = & 100 = f_{n-1} \\
 & \underline{909} \\
 & 91 = f_{n-2} \\
 & \underline{909} \\
 & 1 = f_{n-3} \\
 & \underline{0} \\
 & 10 = f_{n-4} \\
 & \underline{0} \\
 & 100 = p-1
\end{array}
$$

$$n = 5,\ f_{n-4} = f_1 = 10$$

BIJLAGE.

De stelling dat $\dfrac{G^{p-1}-1}{p}$ een geheel getal voorstelt, bewijs ik als volgt. $\dfrac{G^{p-1}-1}{p}$ zal een geheel getal zijn, wanneer dit met $\dfrac{G^{p-1}-1}{p} \times G = \dfrac{G^p - G}{p}$ het geval is; omdat volgens onderstelling G en p onderling ondeelbaar zijn. Stelt men $G = H + 1$, dan is

$$G^p = (H+1)^p = H^p + \frac{p}{1} H^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1\,.\,2} H^{p-2} + $$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1\,.\,2\,.\,3} H^{p-3} + \ldots\ldots + \frac{p}{1} H - 1,$$
$$G = \qquad\qquad\qquad H + 1$$

$$G^p - G = H^p - H + p\left\{ H^{p-1} + \frac{p-1}{2} H^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2\,.\,3} H^{p-3} + \ldots + H \right\}.$$

De tusschen de accolades geplaatste termen stellen allen geheele getallen voor; daar binomiaal coëfficienten, verkregen door ontwikkeling van eigenlijke machten, wegens hunne beteekenis nimmer breuken kunnen zijn, en het wegnemen van p uit den teller die coëfficienten niet tot breuken maken kan; omdat p ondeelbaar en grooter dan elk der factoren is, die in de noemers voorkomen. Schrijven we voor de som der geheele getallen tusschen de accolades het teeken S_1, dan hebben we

$$\frac{G^p - G}{p} = \frac{H^p - H}{p} + \frac{S_1 p}{p} = \frac{H^p - H}{p} + S_1.$$

Stellen we daarop $H = I + 1$, dan geven een ontwikkeling en een redeneering, geheel overeenkomende met de voorgaande,

$$\frac{H^p - H}{p} = \frac{I^p - I}{p} + S_2; \text{ of } \frac{G^p - G}{p} = \frac{I^p - I}{p} + S_1 + S_2.$$

Aldus doorgaande verkrijgen we, daar G een geheel getal is, ten slotte de vergelijking

$$\frac{G^p - G}{p} = \frac{1^p - 1}{p} + S_1 + S_2 + S_3 + \text{ enz.} \ldots + S_{g-1} = \sum_1^{g-1} S_m;$$

waardoor het gestelde bewezen is. Ik geef dit eenvoudige bewijs, dewijl het mij niet bekend is dat het ergens gevonden wordt.

IETS OVER DE

„THEORIE DES FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES,

Par M. MAXIMILIEN MARIE."

Door D. BIERENS DE HAAN.

(*Vervolg van Deel* III, *blz.* 32.)

37. Voor de theorie der *kromming* heeft men de kromme lijn noodig, wier vergelijking in imaginaire coördinaten met die van den cirkel overeenkomt, namelijk

$$(x-p-p'i)^2+(y-q-q'i)^2=(r+r'i)^2.$$

Wanneer wij hierbij de imaginaire omhullende zoeken, dan moet (zie N°. 31) het differentiaalquotient $\frac{dy}{dx}$, voor $x=\alpha+\beta i$, $y=\alpha'+\beta' i$, bestaanbaar worden. Dit geeft hier

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-p-p'i}{y-q-q'i}=\frac{(\alpha-p)+(\beta-p')i}{(\alpha'-q)+(\beta'-q')i} \text{ bestaanbaar; dus } \frac{\alpha-p}{\alpha'-q}=\frac{\beta-p'}{\beta'-q'}.$$

Vervolgens geeft de vergelijking der kromme, als men de waarde van x en y substitueert, en het bestaanbare van het onbestaanbare gedeelte scheidt,

$$(\alpha-p)^2-(\beta-p')^2+(\alpha'-q)^2-(\beta'-q')^2=r^2-r'^2,$$

$$(\alpha-p)(\beta-p')+(\alpha'-q)(\beta'-q')=rr'.$$

Om uit deze drie vergelijkingen de $\beta-p'$ te elimineeren, worden beide laatste

$$(\alpha-p)^2-\frac{(\alpha-p)^2(\beta'-q')^2}{(\alpha'-q)^2}+(\alpha'-q)^2-(\beta'-q')^2=r^2-r'^2=$$

$$=(\alpha-p)^2+(\alpha'-q)^2-\frac{(\alpha-p)^2+(\alpha'-q)^2}{(\alpha'-q)^2}(\beta'-q')^2,$$

$$\frac{(\alpha-p)^2(\beta'-q')}{\alpha'-q}+(\alpha'-q)(\beta'-q')=rr'=(\beta'-q')\frac{(\alpha-p)^2+(\alpha'-q)^2}{(\alpha'-q)};$$

en nu, door het elimineeren van $\beta'-q'$,

$$r^2 - r'^2 = (\alpha - p)^2 + (\alpha' - q)^2 - \frac{r^2 r'^2}{(\alpha - p)^2 + (\alpha' - q)^2}$$

of $$[(\alpha - p)^2 + (\alpha' - q)^2 - r^2][(\alpha - p)^2 + (\alpha' - q)^2 + r'^2] = 0,$$

dus noodzakelijk $(\alpha - p)^2 + (\alpha' - q)^2 = r^2$; de vergelijking van een cirkel met den straal r, en wiens middelpunt p en q tot coördinaten heeft. Trekt men hiervan af, de waarde van $r^2 - r'^2$, dan worden de $\alpha - p$ en $\alpha' - q$ geelimineerd en men houdt over $(\beta - p')^2 + (\beta' - q')^2 = r'^2$; de vergelijking van een cirkel, waarbij de coördinaten van het middelpunt zijn p' en q', en de straal r' is.

En met deze beide betrekkingen wordt de vergelijking der imaginaire omhullende in bestaanbare coördinaten

$$(x - p - p')^2 + (y - q - q')^2 = (r + r')^2;$$

dat is een cirkel met den straal $r + r'$, terwijl het middelpunt tot coördinaten heeft $p + p'$ en $q + q'$.

38. Wanneer twee gekoppelde krommen eene gemeenschappelijke waarde y hebben, en voor dat punt tevens de $\frac{dy}{dx}$ gelijk en bestaanbaar is, verkrijgen wij de imaginaire omhullende; wij moeten nu opsporen, welke betrekking er dan bestaat tusschen haar kromming en de $\frac{d^2y}{dx}$.

Voor $x = \alpha + \beta i$, $y = \alpha' + \beta' i$ volgt weder $\frac{dy}{dx} = \frac{d\alpha' + i d\beta'}{d\alpha + i d\beta}$; zij hare waarde $= t$, bestaanbaar, dan moet noodzakelijk $\frac{d\alpha'}{d\alpha} = t$ en $\frac{d\beta'}{d\beta} = t$ zijn.

Zij verder in ditzelfde punt, de waarde van $\frac{d^2y}{dx^2} = u + iv$, die in het algemeen imaginair zal wezen; dan moet in een naastbijgelegen punt, met de coördinaten ξ en η,

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dy}{dx} + (\xi - \eta)\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots = t + (u + iv)(\xi - \eta) + \ldots$$

zijn; en opdat het punt $x + d\alpha + i d\beta$, $y + d\alpha' + i d\beta'$ ook op die omhullende ligge, moet de aangroeiing van $\frac{d\eta}{d\xi}$, dat is $(u + iv)(d\alpha + i d\beta)$, ook bestaanbaar wezen; derhalve $v\,d\alpha + u\,d\beta = 0$, dus $\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{v}{u}$. Men heeft dus

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = t,\quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{v}{u},\quad \frac{d\beta'}{d\alpha} = \frac{d\beta'}{d\beta}\,\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{vt}{u}.$$

Men vindt nu

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{d\eta}{d\alpha} : \frac{d\xi}{d\alpha} = \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} + i\frac{d\beta'}{d\alpha}\right) : \left(1 + i\frac{d\beta}{d\alpha}\right);$$

zal nu het tweede differentiaal-coëfficient in beide gevallen gelijk zijn, zoo moet

$$u + iv = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \left(\frac{d}{d\alpha}\frac{d\eta}{d\xi}\right) : \frac{d\xi}{d\alpha} =$$

$$= \frac{\left(1 + i\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + i\frac{d^2\beta'}{d\alpha}\right) - \left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} + i\frac{d\beta'}{d\alpha}\right) i\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\left(1 + i\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^3}$$

zijn, of na invoering der $\frac{d\alpha'}{v\alpha'}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}$,

$$= \frac{\left(1 - i\frac{v}{u}\right)\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + i\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\right) - \left(t - i\frac{vt}{u}\right) i\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{\left(1 - i\frac{v}{u}\right)^3} =$$

$$= u^2\frac{(u - iv)\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + i\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\right) - t(u - iv)i\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}}{(u - iv)^3} =$$

$$= \frac{u^2}{(u - iv)^2}\left[\frac{d^2\alpha'}{d\alpha'} + i\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - ti\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right];$$

dus de breuken wegmakende, daar $(u + iv)(u - iv)^2 = (u^2 + v^2)(u - iv)$ is, na scheiding der bestaanbare en onbestaanbare gedeelten

$$\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} = \frac{u^2 + v^2}{u}, \quad \frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} - t\frac{d^2\beta}{d\alpha^2} = -\frac{v}{u^2}(u^2 + v^2),$$

twee voorwaarden, die niet genoegzaam zijn ter bepaling der drie onbekenden $\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$, $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$. Trouwens om te bepalen, dat het derde naastbijgelegen punt ook op de omhullende moest blijven, zoude men de tweede differentien van $\frac{d\eta}{d\xi}$ ook aan de voorwaarde van bestaanbaarheid moeten binden; en dit zoude de kennis der bestaanbare en imaginaire gedeelten van $\frac{d^3\eta}{d\xi^3}$ vereischen; deze ontbreekt ons evenwel.

Men ziet echter, dat voor beide omhullenden $\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}$ bepaald is; dat dit niet het geval zoude zijn met $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}$ en $\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ afzonderlijk, maar

wel met den zamengestelden vorm $\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}-t\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}=\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}-\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$.
Vanwaar deze paradox? anders, dan dat de kromming der beide omhullende in het gegeven punt, juist van dien zamengestelden vorm afhangt; en dit is gemakkelijk te bewijzen.

Noem namelijk x_1 en y_1 de bestaanbare coördinaten van eene imaginaire kromme, dan hangt de kromming in dit punt af van $\frac{dy_1}{dx_1}$ en van $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$. Nu is $x_1=\alpha+\beta$, $y_1=\alpha'+\beta'$, dus

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{d\alpha+d\beta'}{d\alpha+d\beta}=\left[\frac{d\alpha'}{dx}+\frac{d\beta'}{d\alpha}\right]:\left[1+\frac{d\beta}{d\alpha}\right],$$

en
$$\frac{d^2y_1}{dx_1}=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dy_1}{dx_1}\right):\frac{dx_1}{d\alpha}=$$

$$=\left[\left(1+\frac{d\beta}{d\alpha}\right)\cdot\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha'}+\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\right)-\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}+\frac{d\beta'}{d\alpha}\right)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right]:\left[1+\frac{d\beta}{d\alpha}\right]^2.$$

Maar bij het gemeenschappelijke punt, moeten ook hier telkens $\frac{d\alpha'}{d\alpha}$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}$ dezelfde waarde hebben. Dus heeft $\frac{dy_1}{dx_1}$ ook dezelfde waarde; en voor $\frac{d^2y_1}{dx_1^2}$ kan men de vroegere waarden $\frac{d\alpha'}{d\alpha}=t$, $\frac{d\beta'}{d\alpha}=-\frac{vt}{u}$, $\frac{d\beta}{d\alpha}=-\frac{v}{u}$ invoeren; alzoo wordt

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\left[\left(1-\frac{v}{u}\right)\left(\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}+\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}\right)-\left(t-\frac{vt}{u}\right)\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right]:\left[1-\frac{v}{u}\right]^2$$

$$=\left[\left(1-\frac{v}{u}\right)\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2}+\left(1-\frac{v}{u}\right)\left(\frac{d^2\beta'}{d\alpha^2}-t\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}\right)\right]:\left[1-\frac{v}{u}\right]^2,$$

zoodat werkelijk de kromming van den zamengestelden vorm $\frac{d\ \beta''}{d\alpha^2}-t\frac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ en van de waarde $\frac{d\ \alpha'}{d\alpha^2}$ afhangt.

39. Wanneer men nu met behulp der gewone formulen den *kromtecirkel*

$$(x-p-p'i)^2+(y-q-q'i)^2=(r+r'i)^2$$

gevonden heeft, is naar § 37

$$(x-p-p')^2+(y-q-q')^2=(r+r')^2$$

de imaginaire omhullende van de gekoppelde krommen.

Bereken dus voor eenig punt der imaginaire omhullende

$$x - \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} \frac{dy}{dx} : \frac{d^2y}{dx^2} = p + p'i,$$

$$y + \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\} : \frac{d^2y}{dx^2} = q + q'i, \quad \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2} : \frac{d^2y}{dx^2} = r + r'i,$$

zoo wordt de kromtecirkel van dit punt

$$(x - p - p')^2 + (y - q - q')^2 = (r + r')^2.$$

40. Dit kort overzicht over de beschouwingswijze van den heer MAXIMILIEN MARIE, en hare voornaamste toepassingen bij de hoofdpunten der gewone analytische meetkunde, — snijpunten, constructie, middelpunten, middellijnen, raaklijnen, omhullende, asymptoten, kromming en kromtecirkel, — moge volstaan. De lezer kan zich nu een denkbeeld vormen van deze beschouwingswijze, en, wanneer hij de studie van het werk zelf onderneemt, zal hij daarbij menige belangrijke bijzonderheid aantreffen. De titel is

Théorie des fonctions de variables imaginaires. Par M. MAXIMILIEN MARIE. Paris 1874—1876. III Volumes, in 8°.

Tome I. Nouvelle géométrie analytique, pages 271. 1874.

Tome II. Applications de la méthode à la théorie générale des fonctions, pages 292. 1875.

Tome III. Histoire de cet ouvrage, pages 344. 1876.

Bij de studie van dezen arbeid is er eene zekere overeenkomst niet te miskennen met de „Théorie des cordes idéales" van PONCELET; wat deze in meetkundigen zin wilde bereiken, is hetzelfde doel, waarnaar MAXIMILIEN MARIE langs den weg der analyse streefde.

EEN EN ANDER OVER DE INTEGRAAL

$$\int_0^1 l\Gamma(x+u)\,du,$$

DOOR

T. J. STIELTJES Jr.

In het volgende zal ik laten zien, dat de waarde van deze integraal gevonden kan worden door onmiddellijke toepassing van de gewone definitie van een bepaalde integraal; en daaraan eenige opmerkingen toevoegen over eene functie, waarvan de afgeleide van $l\Gamma(x)$ een bijzonder geval is.

De waarde van de bovenstaande integraal is bekend, en wel

$$\int_0^1 l\Gamma(x+u)\,du = \tfrac{1}{2}\,l\,2\pi + x\,lx - x \text{ [1]} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Hierin wordt x positief ondersteld; als uiterste waarde kan $x=0$ nul zijn; dan is

$$\int_0^1 l\Gamma(u)\,du = \tfrac{1}{2}\,l\,2\pi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

In dit laatste integraal wordt $l\Gamma(u)$ voor $u=0$ oneindig, maar uit

$$\int_0^1 l\Gamma(u)\,du = \int_0^1 l\Gamma(u+1)\,du - \int_0^1 lu\,du,$$

ziet men, dat het integraal toch een eindige waarde heeft, en welke die waarde is; want de eerste integraal rechts is volgens (1) gelijk aan $\frac{1}{2}\,l\,2\pi - 1$, en de tweede is gelijk aan -1.

Ik onderstel nu x positief, en ga uit van de bekende formulen

$$\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(x+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right) = n^{-nx+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(nx), \quad (3)$$

$$l\Gamma(x) = \tfrac{1}{2}\,l\,2\pi + (x-\tfrac{1}{2})\,lx - x + \frac{\theta}{12x}, \quad 0<\theta<1 \quad \ldots \quad (4)$$

---

[1]) Zie Bierens de Haan, *Tables d'Intégrales définies.*

De formule (4) is de gewone ontwikkeling van $l\Gamma(x)$ in een half-convergeerende reeks, tot de eerste termen beperkt.

Uit (3) volgt

$$\frac{1}{n}\left[l\Gamma(x)+l\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)+\ldots+l\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\right]=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)l\,2\pi-\left(x-\frac{1}{2n}\right)l\,n+\frac{1}{n}l\Gamma(nx)\;\ldots\ldots\;(5)$$

Voor $n=\infty$ gaat het eerste lid over in

$$\int_0^1 lg\,\Gamma(x+u)\,du;$$

en de limiet van het tweede lid wordt met behulp van (4) gemakkelijk gevonden.

Vooraf behandel ik het geval $x=\frac{1}{n}$. In dit bijzonder geval kan de formule (3) veel gemakkelijker afgeleid worden dan in het algemeene; en wel is hiertoe de formule $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{Sin\,\pi x}$ voldoende. In plaats van (5) komt er dan

$$\frac{1}{n}\left[l\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)+l\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)+\ldots+l\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\right]=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)l\,2\pi-\frac{1}{2n}\,ln;$$

en voor $n=\infty$ vindt men de formule (2).

In het algemeene geval wordt het tweede lid van (5) met behulp van (4)

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right)l2\pi-\left(x-\frac{1}{2n}\right)ln+\frac{1}{2n}l\,2\pi+\left(x-\frac{1}{2n}\right)lnx-x+\frac{\theta}{12n^2x}=$$
$$=\frac{1}{2}l\,2\pi+\left(x-\frac{1}{2n}\right)lx-x+\frac{\theta}{12n^2x};$$

en voor $n=\infty$ vindt men de formule (1).

Door de formule (1) ten opzichte van x te differentieëren, komt er

$$\int_0^1\psi(x+u)\,du=l\,x,\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(6)$$

waarbij gesteld werd $\frac{d}{dx}l\Gamma(x)=\psi(x)$.

Uit deze formule (6) kan men weêr (1) terugvinden; door integratie ten opzichte van x volgt namelijk

$$\int_0^1 l\Gamma(x+u)\,du=C+x\,lx-x.$$

De onderstelling $x=0$ of $x=1$ kan dienen tot bepaling van

de standvastige C, wanneer men namenlijk de formule (2) bekend onderstelt. Deze formule (2) kan echter, zooals boven opgemerkt werd, vrij gemakkelijk gevonden worden.

De formule (6) is een bijzonder geval van een algemeenere. Stelt men namenlijk als definitie van eene functie $\psi(x, p)$,

$$\psi(x,p) = lim. \left\{\frac{n^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+1)^p} - \ldots - \frac{1}{(x+n-1)^p}\right\},$$
$$n = \infty, \quad p > 0, \quad x > 0; \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

wat voor $p = 1$ overgaat in

$$\psi(x, 1) = lim. \left\{lg\, n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \ldots - \frac{1}{x+n-1}\right\}, \ n = \infty;$$

en voor $p > 1$ in

$$\psi(x,p) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+1)^p} - \frac{1}{(x+2)^p} - \ldots;$$

dan is het gemakkelijk te zien dat $\psi(x, p)$ werkelijk een eindige waarde heeft; en verder is $\psi(x, 1)$ identisch met hetgeen zooeven door $\psi(x)$ aangeduid werd.

Het is, wanneer men alleen met reële functien te doen wil hebben, nog niet noodzakelijk altijd $x > 0$ te onderstellen; zoo kan bijv. in de definitie voor $\psi(x, 1)$ de x zeer wel negatief worden.

Is k een geheel positief getal, dan volgt uit (7)

$$\psi(x,p) + \psi\left(x + \frac{1}{k}, p\right) + \psi\left(x + \frac{2}{k}, p\right) + \ldots + \psi\left(x + \frac{k-1}{k}, p\right) =$$

$$= lim. k^p \left\{\left(\frac{(nk)^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{(kx)^p} - \frac{1}{(kx+1)^p} - \ldots - \frac{1}{(kx+nk-1)^p}\right) - \frac{k^{1-p}-1}{1-p}\right\},$$

of

$$\psi(x,p) + \psi\left(x + \frac{1}{k}, p\right) + \ldots + \psi\left(x + \frac{k-1}{k}, p\right) = k^p\left(\psi(kx,p) - \frac{k^{1-p}-1}{1-p}\right); \quad (8)$$

zooals dadelijk blijkt, wanneer men in (7) x door kx, n door kn vervangt. Voor $p = 1$ gaat deze formule (8) over in eene andere die uit (5) ontstaat door met n te vermenigvuldigen en dan ten opzichte van x te differentieeren. Deelt men (8) door k en stelt dan $k = \infty$, dan gaat het eerste lid over in

$$\int_0^1 \psi(x+u, p)\, du.$$

Om echter te zien, wat hierbij uit het tweede lid wordt, zal ik eerst eenige andere eigenschappen van de functie $\psi(x, p)$ afleiden.

Uit de als definitie gestelde formule (7) volgt onmiddellijk

$$\left.\begin{aligned}&\psi(x+1,p)=\psi(x,p)+\frac{1}{x^p},\\ &\text{en algemeener}\\ &\psi(x+k,p)=\psi(x,p)+\frac{1}{x^p}+\frac{1}{(x+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(x+k-1)^p}.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Uit deze laatste formule blijkt, dat (7) ook aldus geschreven kan worden

$$\psi(x,p)=lim.\left(\frac{n^{1-p}-1}{1-p}-\psi(x+n,p)+\psi(x,p)\right),\ n=\infty;$$

of

$$0=lim.\left(\frac{n^{1-p}-1}{1-p}-\psi(x+n,p)\right),\ n=\infty;$$

waarvoor men verder mag schrijven

$$0=lim.\left(\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p}-\psi(x+n,p)\right),\ n=\infty;$$

want het verschil

$$\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p}-\frac{n^{1-p}-1}{1-p}$$

convergeert voor $n=\infty$ tot nul. Voor $p>1$ en voor $p=1$ ziet men dit dadelijk; en wanneer p tusschen 0 en 1 ligt, blijkt het uit

$$\frac{(x+n)^{1-p}-1}{1-p}-\frac{n^{1-p}-1}{1-p}=\int_0^{x+n}\frac{du}{u^p}-\int_0^{n}\frac{du}{u^p}=$$

$$=\int_n^{x+n}\frac{du}{u^p}=\frac{x}{(n+\theta x)^p},\ 0<\theta<1.$$

Vervangt men nog $n+x$ dcor x, dan volgt

$$lim.\left(\frac{x^{1-p}-1}{1-p}-\psi(x,p)\right)=0,\ x=+\infty\ .\ .\ .\ .\ .\ (10)$$

Door nu (8) door k te deelen volgt

$$\frac{1}{k}\left[\psi(x,p)+\psi\left(x+\frac{1}{k},p\right)+\cdots+\psi\left(x+\frac{k-1}{k},p\right)\right]=$$

$$=k^{p-1}\left(\psi(kx,p)-\frac{k^{1-p}-1}{1-p}\right)=k^{p-1}\left(\psi(kx,p)-\frac{(kx)^{1-p}-1}{1-p}\right)+\frac{x^{1-p}-1}{1-p}.$$

Is nu x positief en $0<p\leqq 1$, dan volgt hieruit voor $k=\infty$, op (10) lettende

$$\int_0^1\psi(x+u,p)\,du=\frac{x^{1-p}-1}{1-p},\ x>0,\ 0<p\leqq 1\ .\ .\ (11)$$

Stelt men in de formule, waaruit dit door grensovergang afgeleid werd, $x = \frac{1}{k}$ en daarna $k = \infty$; dan blijkt, dat de formule (11) ook nog geldt voor $x = 0$.

Uit deze formule (11) ontstaat nu voor $p = 1$ de formule (6).

Ik eindig met eenige verdere opmerkingen omtrent de functie $\psi(x, p)$.

Is x positief, dan kan $\psi(x, p)$ door eene bepaalde integraal uitgedrukt worden.

$$\psi(x,p) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{e^{-(x-1)u}}{1-e^{-u}}\right) e^{-u} u^{p-1} du, \quad . \; . \; . \quad (12)$$

waaruit men weder verdere ontwikkelingen kan afleiden, bijv.

$$\psi(x,p) = \psi(1,p) + \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^1 \frac{1-u^{x-1}}{1-u} \left(lg\,\frac{1}{u}\right)^{p-1} du, \quad . \quad (13)$$

$$\psi(x,p) = \frac{x^{1-p}-1}{1-p} - \frac{1}{2x^p} - \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{1-e^{-u}} - \frac{1}{u} - \frac{1}{2}\right) e^{-xu} u^{p-1} du. \; (14)$$

Men kan namenlijk, wanneer x positief is, de formule (7) herleiden door $\frac{1}{x^p}$, $\frac{1}{(x+1)^p}$ enz. als bepaalde integralen te schrijven

$$\frac{1}{a^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty u^{p-1} e^{-au} du,$$

en eveneens de eerste term

$$\frac{n^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^\infty \frac{e^{-u}-e^{-nu}}{u} u^{p-1} du.$$

Deze laatste formule ontstaat uit de voorafgaande, door met da te vermenigvuldigen, en tusschen de grenzen $a = 1$ en $a = n$ te integreeren. Op deze wijze vindt men, na eenige herleiding, de formule (12), waaruit (13) en (14) gemakkelijk volgen.

De formule (14), waaruit men dadelijk weder tot (10) besluiten kan, levert ook een half-convergeerende reeks voor $\psi(x, p)$, die men trouwens ook onmiddellijk uit (7) zou kunnen afleiden door toepassing van een bekende formule van Maclaurin.

REGISTER, NAAR DE ONDERWERPEN GERANGSCHIKT, OP EENIGE WISKUNDIGE TIJDSCHRIFTEN.

MECHANICA.

J. V. CR. B. 81, S. 62—80. Ueber stationäre Flüssigkeitsbewegungen mit Berücksichtigung der inneren Reibung. Von *A. Oberbeck.*

id. S. 96. Zur Abhandlung des Herrn O. E. Meijer, über innere Reibung. Von *L. Boltzmann.*

id. S. 324—336. Ueber die Fortpflanzungs-geschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder. Von *L. Pochhammer.*

id. B. 82, S. 316—342. Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges. Von *R. Lipschitz.*

N. CORR. M. T. 2, p. 354, 355. Extrait d'une lettre de M. *V. Liguine.*

id. p. 395, 396. Question 180. Par *V. Liguine.*

J. DE L. T. 2, p. 33—68, 161—164. Mémoire sur le mouvement de rotation de la lune. Par M. *E. Matthieu.*

id. p. 165—168. Note sur le mouvement du système de deux pendules simples, dont l'un est attaché à un point fixe et l'autre à la masse qui termine le premier. Par M. *H. Résal.*

id. p. 175, 176. Explication d'un passage de la Mécanique analytique de Lagrange, relatif à la composition des moments en statique. Par M. *P. Breton* (*de Champ*).

id. p. 233—239. Sur les cas d'exception au théorème des forces vives. Résumé et conséquenses d'un Mémoire de M. Betti. Par M. *E. Lemmi.*

id. p. 342—344. Note sur les petits mouvements d'un fluide incompressible dans un tuyau élastique. Par M. *H. Résal.*

id. p. 345—370. Mémoire sur le problème de trois corps. Par M. *E. Matthieu.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 219—224. Die Bewegung materieller Punkte auf vorgeschriebenen beweglichen Bahnen. Von *R. Mischer.*

id. S. 450, 451. Zwei Satze vom Schwerpunkte. Von *V. Schlegel.*

N. A. DE M. T. 15, p. 37—41. Question 1153. Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 41—44. Question 1158. Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 63—67. Question de licence. Faculté de Paris (1872). Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 69—72. Question de licence. (Novembre 1874). Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 77—81. Question de licence. (Août 1874). Par M. *Moret-Blanc.*

N. A. DE M. T. 15, p. 166, 167. Solution de la question de Mécanique élémentaire donnée au Concours d'agrégation en 1869. Par M. *Tourrettes.*

id. p. 229—231. Question 1188. Par M. *Tournois.*

id. p. 231, 232. Question 1189. Par M. *Moret-Blanc.*

BULL. MATH. T. 8, p. 191—206. Sur la transformation des équations de l'élasticité en coordonnées orthogonales générales. Par M. *C. W. Borchardt.*

MEETKUNDE (VLAKKE).

GR. ARCH. B. 59, S. 323—328. Ueber den Feuerbach'schen Kreis. Von *E. Hain.*
id. S. 445—447. Eine geometrische Aufgabe. Von *E. Liebrecht.*
N. ARCH. Dl. 2, blz. 177—179. Verdeeling van den hoek in drie gelijke deelen. Door *J. H. van Leeuwen.*
N. CORR. M. T. 1, p. 25, 26. Note sur les bissectrices des angles du triangle. Par M. *D. André.*
id. p. 44—47. Concours d'agrégation des sciences mathématiques. Paris 1873. Par *Neuberg.*
id. p. 92, 93. Question 15. Par *J. Derousseau.*
id. p. 93, 94. Question 16. Par *O. Charlier.*
id. p. 94. Question 17. Par *Medulfus.*
id. p. 163—165. Questions 19 et 20. Par M. *Beimann.*
id. p. 165, 166. Question 28. Par *O. Charlier.*
id. p. 166, 167. Question 29. Par M. *J. B. Barztn.*
id. p. 195, 196. Question 18. Par *Ledent.*
id. T. 2, p. 83, 84. Problèmes de géométrie. Par M. *P. Busschop.*
id. p. 106, 107. Question de géométrie II. Par M. *H. Brochard.*
id. p. 109, 110. Démonstration d'un théorème de géométrie. Par M. *Even.*
id. p. 157, 158. Question 66. Par *van Aubel.*
id. p. 158. Question 55. Par *Vl. Habbé.*
id. p. 184, 185. Question 67. Par *van Aubel.*
id. p. 185. Question 68. Par *van Aubel.*
id. p. 218. Question 84. Par *Mouard.*
id. p. 219. Question 12. Par *J. Neuberg.*
id. p. 220. Question 31. Par *J. Neuberg.*
id. p. 248. Question 32. Par *J. Neuberg.*
id. p. 315. Question 109. Par *van Aubel.*
id. p. 316, 317. Question 111. Par *van Aubel.*
id. p. 338—340. Cas remarquable d'inégalité de deux triangles. Par M. *Gelin.*
SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 294—297. Ueber Bertrand's Beweis des Parallelenaxioms. Von *J. Lüroth.*
id. S. 297—300. Die Malfatti'sche Aufgabe für das geradlinige Dreieck. Von *F. Mertens.*

MEETKUNDE IN DE RUIMTE.

GR. ARCH. B. 59, S. 1—17. Ueber den Zusammenhang gewisser Sätze, welche sich auf geschlossene Reihen geometrischer Gebilde beziehen. Von *F. August.*
N. CORR. M. T. 2, p. 118. Questions de géometrie III. Par M. *H. Brochard.*
SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 449. Zur Geometrie der Geraden. Von *C. Moshammer.*

MEETKUNDE (NIET-EUCLIDISCHE).

GR. ARCH. B. 58, S. 416—422. Die Fundamental-Gleichungen der nicht-euklidischen Trigonometrie auf elementarem Wege abgeleitet. Von *M. Réthy.*
id. B. 59, S. 76—82. Der Körperinhalt der senkrechten Cylinders und Kegels in der absoluten Geometrie. Von *A. von Frank.*

ONTWIKKELING VAN FUNCTIËN.

N. CORR. M. T. 2, p. 308, 309. Sur la developpement de Arctang x. Par *P. M.*

CL. M. ANN. B. 10, S. 137—142. Ueber die Convergenz der Entwicklung einer arbiträren Function $f(x)$ nach die Bessel'schen Functionen $I^a(\beta_1 x)$, $I^a(\beta_2 x)$, $I^a(\beta_3 x), \ldots$, wo $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ die positieve Wurzeln der Gleichung $I^a(\beta) = 0$ vorstellen. Von *L. Schläfli.*

J. DE L. T. 2, p. 291—312. Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable. Par M. *G. Darboux.*

N. A. DE M. T. 15, p. 422, 423. Sur la Série de Lagrange. Par M. *G. Zolotareff.*

OPPERVLAKKEN (THEORIE).

J. V. CR. B. 81, S. 230—242. Beitrag zu der Theorie der Krümmung. Von *R. Lipschitz.*

id. S. 295—300. Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface. Par M. *R. Lipschitz.*

id. S. 337—348. Ueber Minimalflächen. Von *L. Kiepert.*

GR. ARCH. B. 59, S. 225—322. Principien der Flächentheorie. Von *R. Hoppe.*

id. S. 407—414. Beispiel der Bestimmung einer Fläche aus der Indicatrix der Normale. Von *R. Hoppe.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 55—162. Ueber Complexe und Congruenzen. Von *A. Voss.*

id. S. 241—244. Ueber die Zahl der Kreispunkte einer allgemeinen Fläche n^{ter} Ordnung. Von *A. Voss.*

id. S. 297—320. Ueber Flächen transformationen. Von *A. V. Bäcklund.*

id. S. 321—332. Sur une classe de points singuliers de surfaces. Par *H. G. Zeuthen.*

id. S. 573—575. Zur Theorie der algebraischen Flächen. Von *R. Sturm.*

id. B. 10, S. 446—546. Revision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. Par *H. G. Zeuthen.*

J. DE L. T. 2, p. 325—330. Des surfaces sur lesquelles un point peut se mouvoir suivant une certaine loi. Par M. *A. de Saint-Germain.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 264—277. Beziehungen zwischen Meridian- und Contourcurve orthogonal dargestellter Rotationsflächen. Von *R. Müller.*

N. A. DE M. T. 15, p. 36, 37. Question 1152. Par M. *Moret-Blanc.*

OPPERVLAKKEN VAN DEN TWEEDEN GRAAD.

J. V. CR. B. 81, S. 143—192. Die Krümmungsmittelpunktfläche des elliptischen Paraboloids. Van *F. Caspary.*

N. CORR. M. T. 1, p. 64. Question. Par *P. S.*

id. T. 2, p. 136—142. Note sur diverses propriétés de l'ellipsoide et de l'ellipse. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 207—209. Sur quelques articles de la Nouvelle Correspondance. Par M. *J. Neuberg.*

id. p. 296—300. Sur l'enveloppe d'un cylindre de révolution. Par M. *Le Paige.*

id. p. 362—364. Question 132. Par *B. Niewenglowski.*

id. p. 396, 397. Question 163. Par *E. Guillet.*

J. V. CR. B. 82, S. 47—53. Zum Hauptaxenproblem der Flächen zweiten Grades. Von *Geiser.*

CL. M. ANN. B. 10, S. 142—188. Die Linien-geometrie und ihre Anwendung auf die Flächen zweites Grades. Von *A. Voss.*

id. S. 318—364. Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung. Von *H. Schubert.*

N. A. DE M. T. 15, p. 10, 11. Sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre. Par M. *Laguerre.*

id. p. 67, 68. Question de licence (Novembre 1874). Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 73—76. Question de licence (Août 1874). Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 127—129. Sur un théorème de Jacques Bernoulli. Par M. *B. Nieuwenglowski.*

id. p. 167—170. Questions de licence ès sciences mathématiques. Par M. *J. Graindorge.*

id. p. 269—274. Question proposée au concours général de mathématiques spéciales (1875). Par M. *A. Tourrettes* et M. *A. Genty.*

id. p. 331—333. Question 1203. Par M. *H. Jacob.*

id. p. 333, 334. Question 1204. Par M. *Bourguet.*

id. p. 416—422. Sur l'attraction des ellipsoides homogènes. Par M. *G. Zolotareff.*

id. p. 514—516. Question 1141. Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 561, 562. Question 1185. Par M. *Demartres.*

OPPERVLAKKEN (BIJZONDERE).

N. CORR. M. T. 1, p. 119—121. Théorèmes sur les courbes et les surfaces du troisième ordre. Par M. *L. Saltel.*

id. T. 2, p. 398. Question 164. Par *E. Guillet.*

id. p. 399. Question 165. Par *E. Guillet.*

CL. M. ANN. B. 10, S. 227—272. Ueber diejenigen Flächen dritten Grades, auf denen sich drei gerade Linien in einem Punkte schneiden. Von *F. E. Eckardt.*

J. DE L. T. 2, p. 145—154. Sur une surface de quatrième classe dont on peut déterminer les lignes de courbure. Par M. *Laguerre.*

N. A. DE M. T. 15, p. 223—226. Question 1130. Par M. *Bourguet.*

id. p. 503—507. Solution de la question d'Analyse proposée au concours d'agrégation de 1875. Par M. *Gambey.*

id. p. 516—518. Question 1154. Par M. *Gambey.*

BULL. MATTH. T. 9, p. 142—144. De quelques surfaces à courbure constante. Par M. *N. Nicolaides.*

id. p. 169—172. Remarque sur le Note de M. Nicolaides. Par M. *O. Bonnet.*

POTENTIAAL.

J. V. CR. B. 81, S. 349—356. Ueber einen Satz aus der Potentialtheorie. Von *H. Bruns.*

id. B. 82, S. 85—130. Ueber die Ableitung einer neuen electrodynamischen Grundgesetzes. Von *R. Clausius.*

CL. M. ANN. B. 10, S. 273—286. Ueber die Anziehung einer homogenen Ellipsoide. Von *H. Züge.*

J. DE L. T. 2, p. 169—174. Mémoire sur l'attraction des sphéroides elliptiques homogènes. Par M. *F. Tisserand.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 47—72. Ueber eine einfache Behandlungweise derjenigen Probleme der Hydromechanik, in welchen Ellipsoïde mit kleinen Excentricitäten vorkommen. Von *A. Giesen.*

N. A. DE M. T. 15, p. 226—228. Question 1156. Par M. *H. Durrande.*

REEKSEN.

N. ARCH. Dl. 2, blz. 161—176. Over benaderingsformulen voor de som van reeksen, welke uit een groot aantal termen bestaan. Door *D. J. Korteweg.*

id. blz. 186—192. Convergentie van reeksen met complexe termen. Door *A. Benthem Gzn.*

N. CORR. M. T. 1, p. 201—205. Question 44. Par M. *Laisant* et *de Tilly.*

id. T. 2, p. 201—206. Sur l'emploi du calcul symbolique dans la théorie des séries récurrentes. Par M. *E. Lucas.*

id. p. 303—306. Sur la généralisation d'une formule de M. Catalan. Par M. *Tchebycheff.*

N. A. DE M. T. 15, p. 135—138. Question 1181. Par M. *L. Barbarin.*

id. p. 189. Question 1190. Par M. *R. W. Genese.*

BULL. MATH. T. 10, p. 204—208. Sommation de quelques séries. Par M. *Falck.*

STELKUNDE.

N. CORR. M. T. 1, p. 63. Racine Cubique d'une expression imaginaire. Par *P. M.*

id. p. 200, 201. Question 37. Par *P. S.*

id. T. 2, p. 119, 120. Théorème d'Algébre. Par *P. M.*

id. p. 176, 177. Note sur la méthode d'approximation des parties proportionnelles. Par *H. B.*

CL. M. ANN. B. 10, S. 572—575. Ueber den Fundamentalsatz der Algebra. Von *P. Gordan.*

N. A. DE M. T. 15, p. 138—140. Question 1183. Par M. *Moret-Blanc.*

SUBSTITUTIËN.

N. ARCH. Dl. 2, blz. 62—72. Iets over eene transformatie van den tweeden graad. Door *M. C. Paraira.*

N. CORR. M. T. 2, p. 15—32, 41—49. Sur la théorie des transformations linéaires. Par M. *P. Mansion.*

J. DE L. T. 2, p. 241—256. Méthodes de transformations fondées sur la conservation d'une relation invariable entre les dérivées de même ordre. Par M. *Haton de la Goupillière.*

BULL. MATH. T. 11, p. 221—233. Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même. Par M. *J. Tannery.*

SYNTHETISCHE MEETKUNDE.

GR. ARCH. B. 59, S. 18—38. Construction der Durchschnittspunkte von Geraden mit Kegelschnittslinien. Von *G. A. V. Peschka.*

id. S. 39—49. Beiträge zur Lösung einiger bekannten geometrischen Aufgaben. Von *Mendthal.*

id. 351—374. Pol und Polare des Dreiecks. Von *M. Greiner.*

id. 415—419. Ueber eine Classe irrationaler Symmetriepunkte des Dreiecks. Von *E. Hain.*

id. 420—425. Allgemeine Beziehungen der Symmetriepunkte eines Dreiecks. Von *E. Hain.*

N. CORR. M. T. 1, p. 160, 161. Sur le cercle des neuf points. Par *J. N.*

id. T. 2, p. 1—9, 34—40, 65—70. Sur les polygones circonscrits à une conique. Par M. *J. Neuberg.*

id. p. 89, 90. Question 61. Par *Even.*

id. p. 90—94. Question 45. Par *van Aubel.*

id. p. 249, 250. Question 33. Par *J. Neuberg.*

id. p. 318, 319. Question 10. Par *J. Neuberg.*

id. p. 355. Question 49. Par *J. Neuberg.*

CL. M. ANN. B. 10, S. 117—136. Das Problem der Collineation. Von *R. Sturm.*

id. S. 420—430. Zur Construction eines äquianharmonischen Systems. Von *H. Schröter.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 23—37. Ueber einige Anwendungen eines besondern Falles der homographischen Verwandschaft (der Affinität). Van *J. Korteweg.*

id. S. 72, 73. Aufgabe. Von *O. Hesse.*

id. S. 325—363. Lemniscatische Geometrie, Verwandschaft und Kinematik abgeleitet mit Hilfe der Function complexen Arguments $Z = \sqrt{z}$. Von *G. Holzmüller.*

id. S. 402—426. Axonometrische Theorie der perspectivischen und projectivischen Collineation in Raume. Von *G. Hauck.*

id. S. 427—441. Zur synthetischen Behandlung der ebenen Curven dritter klein Ordnung. Von *Milinowski.*

ANN. EC. NORM. T. 5, p. 245—274. Sur les propriétés des cubiques gauches et le mouvement hélicoidal d'un corps solide. Far M. *P. Appell.*

N. A. DE M. T. 15, p. 330, 331. Question 1201. Par M. *H. Lallemant.*

VEELHOEKEN.

GR. ARCH. B. 59, S. 375—386. Les polygones rayonnés et les polygones étiolés. Par *G. Dostor.*

N. CORR. M. T. 1, p. 63. Question 1. Par *P. J.*

id. p. 63, 64. Question 3. Par *L. van den Broeck.*

id. p. 89, 90. Sur les polygones réguliers. Par *P. M.*

id. T. 2, p. 181, 182. Démonstration des propriétés du quadrilatère inscriptible. Par *P. M.*

N. A. DE M. T. 15, p. 383, 384. Question 1213. Par M. *C. Richard.*

VEELVLAKKIGE LICHAMEN.

GR. ARCH. B. 59, S. 50—58. Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes. Par *G. Dostor.*

id. S. 101—103. Höhe des Schwerpunktes eines Pyramidenstutzes, dessen Dichtigkeit van der untern bis zur obern Fläche sich progressiv verändert. Von *F. E. Thieme.*

N. CORR. M. T. 1, p. 111—116. Sur deux problèmes de Simon Lhuilier. Par *J. Neuberg.*

id. T. 2, p. 143--146. Le trièdre et le tetraèdre avec application des déterminants. Par *G. Dostor.*

id. p. 356. Question 60. Par *J. N.*

N. A. DE M. T. 15, p. 289—292. Note sur la détermination du centre de gravité du volume du tronc de prisme droit à base triangulaire. Par M. *H. Résal.*

id. p. 365, 366. Questions proposées au concours général (1875). Philosophie. Par M. *Moret-Blanc.*

id. p. 465. Centre de gravité du tronc de prisme triangulaire oblique. Par M. *E. Brassine.*

VERGELIJKINGEN MET EENE ONBEKENDE.

J. V. CR. B. 81, S. 281—289. Ueber die Bestimmung von symmetrischen Functionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch deren Coefficienten. Von *Kostka.*

id. B. 82, S. 212—229. Ueber Borchardt's Function. Von *Kostka.*

GR. ARCH. B. 59, S. 147—192. Studien zu Furstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Von *H. Nägelsbach.*

id. S. 217. Ueber kubische Gleichungen. Von *E. Liebrecht.*

N. CORR. M. T. 1, p. 159. Résolution de l'équation du troisième degré. Par *P. M.*

id. T. 2, p. 342—349. Sur la transformation des équations. Par *E. Catalan.*

id. p. 365. Question 129. Par *B. Nieuwenglowski.*

CL. M. ANN. B. 9, S. 530—540. Ein allgemeiner Ausdruck für die ihrem absoluten Betrage nach kleinste Wurzel der Gleichung n^{tes} Grades. Von *J. König.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 364, 365. Bemerkung zu der Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Von *Heilermann.*

N. A. DE M. T. 15, p. 154—159. Note sur la continuité des racines des équations algébriques. Par M. *Rouquet.*

id. p. 186—188. Question 1187. Par M. *C. Moreau.*

id. p. 328—330. Question 325. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 367—371. Questions proposées au concours général (1875). Seconde. Par M. *Moret-Blanc.*

BULL. MATH. T. 8, p. 56—63, 92—112. Mémoire sur le théorème de Sturm. Premiere Partie. Par M. *G. Darboux.*

VERGELIJKINGEN (ONBEPAALDE).

N. CORR. M. T. 1, p. 169—175. Questions VI d'Analyse indéterminée. Par *J. Neuberg.*

id. T. 2, p. 30—34. Sur un Mémoire de Libri. Par *E. Catalan.*

J. DE L. T. 2, p. 331—340. Résolution de l'équation indéterminée $y^2 - ax^2 = bz$ en nombres entiers. Par M. *S. Günther.*

id. p. 341. Note. Par M. *P. Mansion.*

N. A. DE M. T. 15, p. 44—46. Question 1175. Par M. *Moret-Blanc.*

id. 359—365. Solution d'un problème de Beha-Eddin sur l'analyse indéterminée. Par M. *E. Lucas.*

id. p. 466—470. Sur la résolution du système des équations $x^2 - by^2 = u^2$, $u^2 + by^2 = v^2$, en nombres entiers. Par M. *E. Lucas.*

id. p. 545—547. Question 1196. Par M. *Meyl.*

VERSCHIKKINGEN EN VERBINDINGEN.

N. CORR. M. T. 2, p. 70—75. Note sur le triangle arithmétique de Pascal et sur la série de Lamé. Par *E. Lucas.*

ANN. EC. NORM. T. 5, p. 155—198. Mémoires sur les combinaisons régulières et leurs applications. Par M. *D. André.*

N. A. DE M. T. 15, p. 90—92. Extrait d'une lettre de M. *C. Moreau.*

id. p. 114—126, 145—154, 193—205. Permutations rectilignes de $3q$ lettres égales 3 à 3, quand 3 lettres consécutives sont distinctes; calcul de la formule générale; applications. Par M. *A. Vachette.*

WAARSCHIJNLIJKHEIDS-REKENING.

N. ARCH. Dl. 2, blz. 40—61. Over de waarschijnlijkheid van de verschillende mogelijke uitkomsten eener verkiezing, waarbij stemmen van tweeërlei kleur zich bij loting in afdeelingen verdeelen. Door *D. J. Korteweg.*

N. CORR. M. T. 1, p. 137—147. Note sur le principe de la moyenne arithmétique, et sur son application à la théorie mathématique des erreurs. Par M. *de Tilly.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 126—128. Ueber die Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers einer endlichen Zahl von Beobachtungen. Von *R. A. Mees.*

id. S. 192—218. Ueber die Wahrscheinlichkeit der Potenzsummen der Beobachtungsfehler und über einige damit im Zusammenhange stehende Fragen. Von *Helmert.*

WISKUNDE. GRONDBEGRIPPEN.

GR. ARCH. B. 59, S. 65—75. Ueber die Rolle der Erfahrung in den exacten Wissenschaften. Von M. *J. Houel.*

N. CORR. M. T. 2, p. 384—391. Sur l'emploi, dans la géométrie, d'un nouveau principe des signes. Par M. *E. Lucas.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 21, S. 116—125. Ueber die Grundhypothese der Molecularmechanik. Von *W. Gosiewski.*

BULL. MATH. T. 8, p. 234—239. Sur un nouvel élément fondamental de la géométrie analytique du plan. Par M. *Allebret.*

Fig. 3.

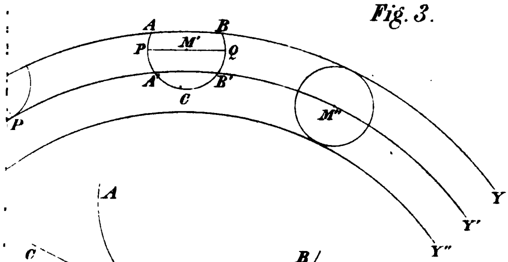


Fig. 4.

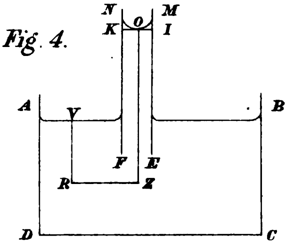


Fig. 6.

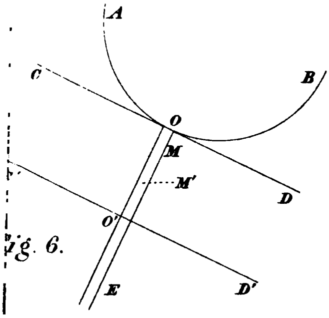


Fig. 7.

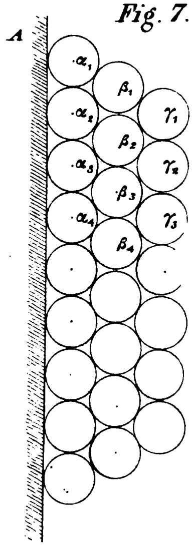


Fig. 11.

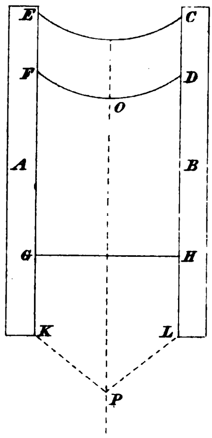


Fig. 10.

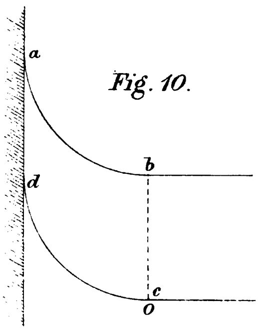


Fig. 14.

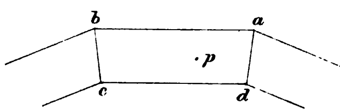


Fig. 13.

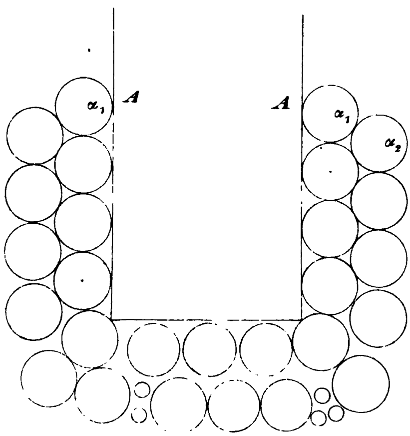
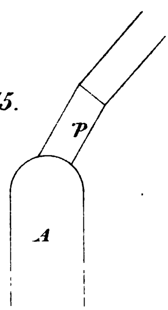


Fig. 15.



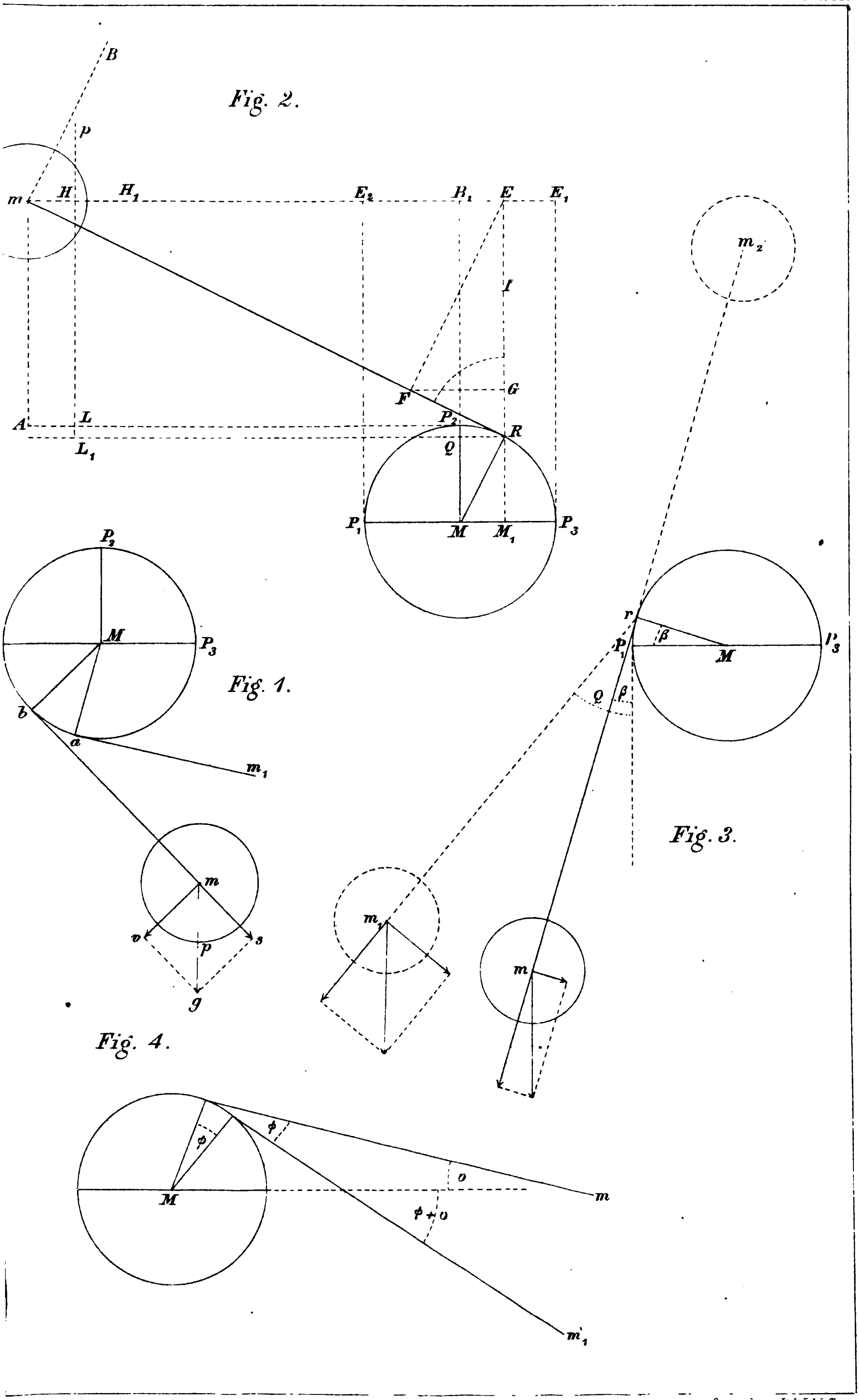


Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.

EENE BIJZONDERE VERGELIJKING,

DOOR

N. L. W. A. GRAVELAAR.

Ter bepaling van de orthogonale substitutiën, welke eene homogene functie van den tweeden graad van n veranderlijken in eene som van n vierkanten transformeeren, is het noodig eene vergelijking van den vorm (1) op te lossen.

Bij de bepaling van de doorsnede van een oppervlak van den tweeden graad en een plat vlak, zoo ook bijv. bij het onderzoek naar de waarden van x, y, z, u, die aan de vergelijkingen $x^2+y^2+z^2=1$, $ax+by+cz+du=0$, $a'x+b'y+c'z+d'u=0$ voldoen, en eene gegeven homogene functie van den tweeden graad van die veranderlijken tot een maximum of minimum maken, wordt de oplossing van eene vergelijking van de gedaante (2) vereischt.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-x \end{vmatrix} = 0, \quad (1).$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-x & \ldots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-x & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \\ b_{11} & b_{21} & \ldots & b_{n1} & & & & \\ b_{12} & b_{22} & \ldots & b_{n2} & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ b_{1m} & b_{2m} & \ldots & b_{nm} & & & & \end{vmatrix} = 0. \quad (2).$$

In de onderstelling, dat alle elementen a bestaanbaar zijn, hebben verschillende wiskundigen bewezen, dat de vergelijking (1) slechts bestaanbare wortels heeft.

Daar de tweede vergelijking in vorm veel met de eerste overeenkomt, ligt de vraag voor de hand: Bezit die vergelijking dezelfde eigenschap?

Voor een bijzonder geval toont HESSE in zijne „*Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*" werkelijk aan, dat die vraag toestemmend moet beantwoord worden. Het bewijs van dezen schrijver staat echter in nauw verband met het vraagstuk, dat hem tot die vergelijking leidt; en kan niet gemakkelijk op de algemeene vergelijking (2), in geen verband met een dergelijk vraagstuk beschouwd, worden toegepast.

Het zal dus zeker niet geheel van belang ontbloot zijn, indien ik in de volgende bladzijden rechtstreeks aantoon, dat alle wortels der vergelijking (2) bestaanbaar zijn, — te minder daar de bewijsgang, dien ik volg, onmiddellijk op de vergelijking (1) van toepassing is.

Eenige eigenschappen der symmetrische determinanten, waarvan ik gebruik moet maken, mogen voorafgaan.

1. Indien we de determinante

$$S = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

volgens de elementen, die met a_{nn} in dezelfde horizontale en verticale rijen staan, ontwikkelen, vinden we

$$S = a_{nn} R - \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{in} a_{nk} \alpha_{ik},$$

wanneer we door R den coëfficient van a_{nn} in S, dus de determinante $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{n-1, n-1})$, en door α_{ik} den coëfficient van a_{ik} in R voorstellen. (BALTZER, *Determinanten*, 3e druk, § 3, 16).

2. Is $R = 0$, zoo heeft men

$$S = -\sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{in} a_{nk} \alpha_{ik}.$$

In dit geval verdwijnen alle onderdeterminanten van den tweeden, derden, ... graad van de geadjungeerde determinante van R. (BALTZER, § 6, 5).

Men heeft dus

$$\alpha_{fi}\alpha_{gk} = \alpha_{fk}\alpha_{gi},$$

of in 't bijzonder

$\alpha_{ik}\alpha_{ki} = \alpha_{ii}\alpha_{kk}$, $\alpha_{1i}\alpha_{i1} = \alpha_{11}\alpha_{ii}$, $\alpha_{2i}\alpha_{i2} = \alpha_{22}\alpha_{ii}$, enz.

3. Is R eene symmetrische determinante, zoodat $a_{ik} = a_{ki}$, dus ook $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ is, zoo worden de vorige betrekkingen

$$\alpha^2_{ik} = \alpha_{ii}\alpha_{kk},\ \alpha^2_{1i} = \alpha_{11}\alpha_{ii},\ \alpha^2_{2i} = \alpha_{22}\alpha_{ii},\ \text{enz.}$$

Zijn tevens alle elementen bestaanbaar, dan kunnen α^2_{1i}, α^2_{2i}, enz. niet negatief zijn; zoodat alle onderdeterminanten α_{11}, α_{22}, $\alpha_{33}, \ldots$, voor zooverre ze niet verdwijnen, hetzelfde teeken hebben.

Waren alle symmetrische onderdeterminanten nul, zoo verdween α_{ik} voor alle waarden van i en k.

Heeft men $\alpha_{ii} = 0$, zoo volgt $\alpha_{1i} = \alpha_{2i} = \alpha_{3i} = \ldots = \alpha_{ni} = 0$.

Verder is $\alpha_{ik} = \alpha_{ki} = \sqrt{\alpha_{ii}}\sqrt{\alpha_{kk}}$; in welke formule het teeken van den eenen wortel door dat van den anderen bepaald wordt.

4. De waarheid der volgende stelling ligt nu voor de hand.

Indien in de symmetrische determinante van den n^{en} graad S, waarin alle elementen bestaanbaar zijn, de coëfficient R van a_{nn} verdwijnt, en niet alle symmetrische onderdeterminanten van den $(n-2)^{en}$ graad van R verdwijnen, zoo is $-S$ een volkomen vierkant, namelijk

$$S = -\left\{\sum_{i=1}^{i=n-1} a_{ni}\sqrt{\alpha_{ii}}\right\}^2.$$

Verdwijnt S niet, dan heeft deze determinante het tegengestelde teeken van α_{ii}. Zijn behalve R al hare symmetrische onderdeterminanten van den $(n-2)^{en}$ graad aan nul gelijk, zoo is ook S nul.

5. Indien de determinante (Hessien) van de homogene functie van den tweeden graad met zes veranderlijken

$$f \equiv \sum_{i=1}^{i=6}\sum_{k=1}^{k=6} a_{ik}x_i x_k,\ (a_{ik} = a_{ki}),$$

benevens al hare onderdeterminanten tot en met die van den vierden graad verdwijnen, dan kan deze functie door eene lineaire substitutie, wier determinante niet verdwijnt, tot eene functie van drie veranderlijken herleid worden.

Door de substitutiën

$$y_i = a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 + e_i x_5 + f_i x_6,$$
$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$$

wordt bijv. de vergelijking

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = F(y_1, y_2, y_3)$$

eene identiteit. Men vindt dan gemakkelijk

$$\begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & f''_{x_1x_3} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & f''_{x_2x_3} \\ f''_{x_3x_1} & f''_{x_3x_2} & f''_{x_3^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F''_{y_1^2} & F''_{y_1y_2} & F''_{y_1y_3} \\ F''_{y_2y_1} & F''_{y_2^2} & F''_{y_2y_3} \\ F''_{y_3y_1} & F''_{y_3y_2} & F''_{y_3^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2,$$

$$\begin{vmatrix} f''_{x_4^2} & f''_{x_4x_5} & f''_{x_4x_6} \\ f''_{x_5x_4} & f''_{x_5^2} & f''_{x_5x_6} \\ f''_{x_6x_4} & f''_{x_6x_5} & f''_{x_6^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F''_{y_1^2} & F''_{y_1y_2} & F''_{y_1y_3} \\ F''_{y_2y_1} & F''_{y_2^2} & F''_{y_2y_3} \\ F''_{y_3y_1} & F''_{y_3y_2} & F''_{y_3^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}^2.$$

Indien dus $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} a_{33})$ en $\Sigma \pm (a_{44} a_{55} a_{66})$ niet verdwijnen, hebben ze hetzelfde teeken.

Algemeen zal men vinden, dat de symmetrische onderdeterminanten van den $(n-r-1)^{en}$ graad van de determinante eener homogene functie van den tweeden graad met n veranderlijken, voor zooverre ze niet verdwijnen, hetzelfde teeken zullen hebben, indien alle onderdeterminanten van den $(n-r)^{en}$ en hoogeren graad nul zijn.

Elke symmetrische determinante kan beschouwd worden als de determinante van eene homogene functie van den tweeden graad; dus zullen

Alle symmetrische onderdeterminanten van den $(n-r-1)^{en}$ graad van eene symmetrische determinante hetzelfde teeken hebben, indien alle onderdeterminanten van hoogeren graad nul zijn.

Opmerking. Bij de toepassing, die we van deze stelling wenschen te maken (sub 7), kan het gebeuren, dat alle elementen van eene of meer rijen verdwijnen; toch blijft de bewezen stelling dan nog van kracht.

Voorbeeld. In de determinante

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix},$$

verdwijnen alle onderdeterminanten tot en met die van den vierden graad.

Laat $\Sigma \pm (a_{33} a_{44} a_{55})$ niet nul zijn, dan is dit de eenigste nietverdwijnende symmetrische onderdeterminante van den derden graad. De stelling is dus in dit geval nog van toepassing.

Zijn $\Sigma \pm (a_{33} a_{44} a_{55})$ en hare onderdeterminanten van den tweeden graad nul, dan hebben alle symmetrische onderdeterminanten van den eersten graad hetzelfde teeken. Van de determinante P verdwijnen

in dit geval alle onderdeterminanten van den tweeden en hoogeren graad; en de eenigste symmetrische onderdeterminanten van den eersten graad, welke niet verdwijnen, zijn symmetrische onderdeterminanten van $\Sigma \pm (a_{33}\, a_{44}\, a_{55})$, en hebben volgens het voorgaande gelijke teekens. Ook hier is dus de stelling nog geldig.

6. In het vervolg van dit opstel bedoel ik met $(i\,k\,l\ldots)$ symmetrische onderdeterminanten van eene symmetrische determinante van den vorm

$$Q = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots\ldots a_{1n}\; b_{11}\; b_{12} \ldots b_{1m} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots\ldots a_{2n}\; b_{21}\; b_{22} \ldots b_{2m} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\, a_{n2} \ldots\ldots a_{nn}\; b_{n1}\; b_{n2} \ldots b_{nm} \\ b_{11}\, b_{21} \ldots\ldots b_{n1} \\ b_{12}\, b_{22} \ldots\ldots b_{n2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{1m}\, b_{2m} \ldots\ldots b_{nm} \end{vmatrix},$$

die gevormd zijn door de i^{de}, k^{de}, l^{de}, ... horizontale en verticale rijen weg te laten; waarbij we onderstellen, dat i, k, l, ... verbindingen van 1, 2, 3, ... n zijn. Eene willekeurige onderdeterminante daarentegen zal ik door $\begin{bmatrix} f\,g\,h \ldots \\ r\,s\,t \ldots \end{bmatrix}$ aanwijzen, wanneer ze gevormd wordt door uit de gegeven determinante de f^{de}, g^{de}, h^{de}, ... horizontale en de r^{de}, s^{de}, t^{de}, ... verticale rijen weg te laten.

Nadat we dit overeengekomen zijn, is het gemakkelijk te bewijzen, dat *alle* onderdeterminanten van den r^{en} en hoogeren graad van Q verdwijnen, indien alle symmetrische onderdeterminanten van den r^{en} en hoogeren graad nul zijn, terwijl niet alle van den $(r-1)^{en}$ graad verdwijnen.

Is bijv. de symmetrische onderdeterminante (1 2 3 4 5) niet nul, terwijl alle symmetrische onderdeterminanten van hoogeren graad verdwijnen; dan vindt men gemakkelijk (3), dat alle onderdeterminanten, die (1 2 3 4 5) tot eerste onderdeterminante hebben, gelijk nul zijn; waaruit dan verder bovenstaande waarheid is af te leiden. (J. Versluys, *Discussion complète etc.*, in Grunert's *Archiv* LII.)

7. Laten in het eerste lid der vergelijking (2), dat we door ϕ_{n-m} voorstellen, alle standvastigen bestaanbaar en tevens $a_{ik} = a_{ki}$ zijn. Veronderstellen we verder, dat $n > m$ is, daar voor $n < m$ de functie ϕ_{n-m} zich tot eene standvastige herleidt (Baltzer § 4, 6). Nemen we in de derde plaats aan, dat niet alle determinanten

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{21} & \ldots\ldots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{1m} & b_{2m} & \ldots\ldots & b_{nm} \end{Vmatrix}$$

verdwijnen; want was dat het geval, dan zoude ϕ_{n-m} nul zijn. (BALTZER § 4, 4).

Nadat we dit overeengekomen zijn, bewijzen we de

STELLING. *Opdat de vergelijking* $\phi_{n-m} = 0$ μ *bestaanbare wortels* a *heeft, is het noodig en voldoende, dat* ϕ_{n-m}, *en al hare symmetrische onderdeterminanten tot en met die van den graad* $(n+m-\mu+1)$, *voor* $x = a$ *verdwijnen.*

BEWIJS. Wanneer we de afgeleide functiën van ϕ_{n-m} vormen, vinden we

$$\begin{aligned} \phi'_{n-m} &= \qquad\qquad -\Sigma(i), \\ \phi''_{n-m} &= \qquad (-1)^2\, 2!\ \Sigma(ik), \\ \phi'''_{n-m} &= \qquad (-1)^3\, 3!\ \Sigma(ikl), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \phi^{(n-m)}_{n-m} &= (-1)^{n-m}(n-m)!\ \Sigma(ikl\ldots); \end{aligned}$$

in welke uitdrukkingen het sommenteeken respectievelijk op alle vereenigingen, 1 aan 1, 2 aan 2, 3 aan 3, ... $(n-m)$ aan $(n-m)$ van $1, 2, 3, \ldots n$ betrekking heeft.

Heeft nu de gegeven vergelijking μ reëele wortels a, zoo verdwijnen voor $x = a$ alle afgeleide functiën tot en met $\phi^{(\mu-1)}_{n-m}(a)$; $\phi^{\mu}_{n-m}(a)$ verdwijnt niet.

Waren dus niet alle symmetrische onderdeterminanten (i) voor $x = a$ nul, zoo zouden alle niet-verdwijnende voor deze waarde van x hetzelfde teeken hebben (3), zoodat a geen wortel van de vergelijking

$$\phi'_{n-m} = 0$$

zou wezen.

Indien niet alle symmetrische onderdeterminanten (ik) door de substitutie van a nul werden, verdwenen voor deze waarde van x *alle* onderdeterminanten $\begin{bmatrix} f \\ r \end{bmatrix}$ (zie 6); en dus zouden alle (ik) hetzelfde teeken hebben (5), zoodat $\phi''_{n-m}(a)$ niet nul ware, enz.

Dat ook het omgekeerde waar is, blijkt onmiddellijk uit de samenstelling der afgeleide functiën.

OPMERKING. Niet alle symmetrische onderdeterminanten van den graad $(n+m-\mu)$ verdwijnen voor a, wijl in dat geval de vergelij-

king meer dan μ wortels a zoude hebben. Bovendien hebben deze symmetrische onderdeterminanten voor $x = a$ hetzelfde teeken.

8. De symmetrische onderdeterminanten $\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} i\,k \\ i\,k \end{bmatrix}$ hebben dezelfde gedaante als Φ_{n-m}; zoodat we op de vergelijkingen

$$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} = 0 \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} i\,k \\ i\,k \end{bmatrix} = 0,$$

de voorgaande stelling mogen toepassen. Indien dan de gegeven vergelijking μ wortels a heeft, zoo verdwijnen alle onderdeterminanten van den $(n+m-\mu+1)^{\text{en}}$ en hoogeren graad voor a; dus hebben de voorgaande vergelijkingen respectievelijk $(\mu-1)$ en $(\mu-2)$ wortels a. Uit de betrekking

$$\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}^2 = Q_{n-m} \begin{bmatrix} i\,k \\ i\,k \end{bmatrix}$$

volgt dan onmiddellijk, dat $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ den factor $(x-a)^{\mu-1}$ bevat, evenals $\begin{bmatrix} i \\ i \end{bmatrix}$.

9. Indien de vergelijking $\Phi_{n-m} = 0$ μ wortels a bezit, zullen $\Phi_{n-m}(a-d)$ en $\Phi^{\mu}_{n-m}(a)$ voor alle waarden van de positieve grootheid d, kleiner dan eene grootheid r, die men bepalen kan, gelijke of tegengestelde teekens hebben, naarmate μ even of oneven is; hetgeen door middel van den *regel der dubbele teekens* gemakkelijk is aan te toonen.

Daar echter

$$\Phi^{\mu}_{n-m} = (-1)^{\mu}\, \mu!\, \Sigma(i\,k\,l\ldots)$$

is, waar $\Sigma(i\,k\,l\ldots)$ de som van alle symmetrische onderdeterminanten van den $(n+m-\mu)^{\text{en}}$ graad voorstelt, en al deze symmetrische onderdeterminanten voor $x = a$ hetzelfde teeken hebben; zullen ook $\Phi^{\mu}_{n-m}(a)$ en eene voor a niet-verdwijnende symmetrische onderdeterminante van den $(n+m-\mu)^{\text{en}}$ graad in denzelfden of in tegengestelden toestand verkeeren, naarmate μ even of oneven is. Daaruit volgt onmiddellijk de volgende stelling.

Indien de vergelijking $\Phi_{n-m} = 0$ μ bestaanbare wortels a heeft, dan zal voor alle waarden der positieve grootheid d, kleiner dan eene grootheid r, die men bepalen kan, $\Phi_{n-m}(a-d)$ hetzelfde teeken hebben als eene voor a niet-verdwijnende symmetrische onderdeterminante van den graad $(n+m-\mu)$. Verder heeft $\Phi_{n-m}(a+d)$ hetzelfde of het tegengestelde teeken van $\Phi_{n-m}(a-d)$, naarmate μ even of oneven is.

10. Nemen we eene symmetrische onderdeterminante (i) van den $(n+m-1)^{\text{en}}$ graad van Φ_{n-m}, daarna van die determinante eene symmetrische onderdeterminante (i) van den $(n+m-2)^{\text{en}}$ graad, en zoo vervolgens telkens van de voorgaande eene eerste symmetrische onderdeterminante van den vorm (i); dan verkrijgen we eene rij van functiën van x, wier graden geregeld met de eenheid van $(n-m)$ tot 0 afnemen, en die alle den vorm Φ_{n-m} hebben; waarop dus ook alle eigenschappen van deze functie toepasselijk zijn. Geen enkele dier functiën zal identisch verdwijnen, mits we zorgen, dat de laatste, die eene standvastige is, niet nul zij; hetgeen altijd mogelijk is.

Die functiën zullen in 't vervolg door de symbolen

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots . \Phi_{n-m} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

aangeduid worden, waarbij we opmerken, dat de bijgevoegde aanwijzers de overeenkomstige graden aanwijzen.

Zijn α en β $(>\alpha)$ willekeurige bestaanbare grootheden, en neemt x onafgebroken van β tot α af, dan zal de rij (3), na substitutie van elke tusschenliggende waarde, een bepaald aantal variatien opleveren.

Dit aantal kan echter alleen dan eene verandering ondergaan, wanneer x eene waarde verkrijgt, die eene of meer dier functiën nul maakt. Zij a eene dergelijke waarde. Het aantal gelijke wortels a der vergelijking

$$\Phi_p = 0$$

duiden we in 't algemeen met θ_p aan; terwijl we ons van het teeken Δ_p zullen bedienen, om het positieve of negatieve) aantal variatiën aan te wijzen, dat de rij

$$\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots \Phi_p$$

verliest, wanneer x onafgebroken van $a+d$ tot $a-d$ afneemt. De positieve grootheid d onderstellen we daarbij zoo gekozen, dat geen der vergelijkingen $\Phi_q = 0$ tusschen die grenzen andere wortels bezit dan a.

Nadat we op die wijze de beide rijen

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots . \theta_{n-m},$$
$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots \Delta_{n-m},$$

gevormd hebben, zullen we aantoonen, dat voor elke waarde van p de gelijkheid

$$\theta_p = \Delta_p$$

geldig is.

Daartoe merken we in de eerste plaats op, dat Φ_6 bijv. deelbaar is door $(x-a)^{\theta_6}$, waaruit volgt, dat $(x-a)^{\theta_6-1}$ een factor van Φ_5

is. (8). Ontwikkelen we echter Φ_6 op de wijze, als onder (1) is aangewezen, zoo ziet men gemakkelijk in, dat alle termen dezer som door $(x-a)^{\theta_5-1}$ deelbaar zijn. We kunnen toch Φ_5 als factor van den eersten term dier som aannemen, terwijl dan de overige termen eerste onderdeterminanten van Φ_5 tot factoren hebben, die door $(x-a)^{\theta_5-1}$ deelbaar zijn. (8).

Deze opmerkingen samenvattende, komen we tot het besluit, dat

$$\theta_6 = \theta_5, \text{ of } = \theta_5 + 1, \text{ of } = \theta_5 - 1$$

zal moeten zijn. Welk verband er in ieder dier gevallen tusschen Δ_5 en Δ_6 bestaat, zullen we nu achtereenvolgens nagaan.

a. Indien $\theta_6 = \theta_5$ is, zal ook $\Delta_6 = \Delta_5$ wezen, hetgeen uit de volgende tabel duidelijk blijkt.

$$\begin{array}{lcccl} & \Phi_5, \Phi_6 & & \Phi_5, \Phi_6 & \\ \text{voor } x = a + d: & \pm\ \pm & \multirow{2}{*}{of} & \pm\ \mp & \multirow{2}{*}{$\left.\right\}$ als θ_5 even is,} \\ \text{voor } x = a - d: & \pm\ \pm & & \pm\ \mp & \\ \text{voor } x = a + d: & \pm\ \pm & \text{of} & \pm\ \mp & \text{als } \theta_5 \text{ oneven is.} \\ \text{voor } x = a - d: & \mp\ \mp & & \mp\ \pm & \end{array}$$

b. Zij in de tweede plaats

$$\theta_6 = \theta_5 + 1.$$

Duiden we kortheidshalve met μ den graad der determinante Φ_5 aan, dan is Φ_6 eene determinante van den graad $(\mu + 1)$. Merken we op, dat, daar de vergelijking $\Phi_5 = 0$ θ_5 bestaanbare wortels a bezit, $\Phi_5(a-d)$ hetzelfde teeken heeft als eene harer symmetrische onderdeterminanten van den graad $(\mu - \theta_5)$ voor $x = a$; dat die symmetrische onderdeterminante eene symmetrische onderdeterminante van Φ_6 is van den graad $[(\mu+1)-(\theta_5+1)] = [(\mu+1)-\theta_6)]$; en dat eindelijk $\Phi_6(a-d)$ het teeken heeft, dat deze symmetrische onderdeterminante voor $x = a$ aanneemt, omdat de vergelijking $\Phi_6 = 0$ θ_6 bestaanbare wortels a heeft; — dan blijkt, dat $\Phi_5(a-d)$ en $\Phi_6(a-d)$ in denzelfden toestand verkeeren (9). Verder hebben dus $\Phi_5(a+d)$ en $\Phi_6(a+d)$ tegengestelde teekens, zoodat men vindt

$$\begin{array}{lccc} & \Phi_5, \Phi_6 & & \Phi_5, \Phi_6 \\ \text{voor } x = a + d: & \pm\ \mp & \text{of} & \pm\ \mp \\ \text{voor } x = a - d: & \pm\ \pm & & \mp\ \mp \end{array}$$

of

$$\Delta_6 = \Delta_5 + 1.$$

c. Eindelijk heeft men gelijktijdig

$$\theta_6 = \theta_5 - 1 \text{ en } \Delta_6 = \Delta_5 - 1.$$

Zij bijv. $\theta_5 = 4$ en dus $\theta_6 = 3$. Laat verder Φ_6, nadat daarin voor x de waarde a is gesubstitueerd, den volgenden vorm hebben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{18} & a & a' \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{28} & b & b' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{81} & a_{82} & \dots & a_{88} & h & h' \\ a & b & \dots & h & & \\ a' & b' & \dots & h' & & \end{vmatrix},$$

terwijl $\Phi_5(a) = (1)$ zij. Daar de vergelijking $\Phi_5 = 0$ vier wortels a heeft, zullen alle symmetrische onderdeterminanten van $\Phi_5(a)$ tot en met die van den zesden graad verdwijnen, terwijl niet alle van den vijfden graad nul zijn. Omdat de vergelijking $\Phi_6 = 0$ drie wortels a heeft, verdwijnen alle symmetrische onderdeterminanten van $\Phi_6(a)$ tot en met die van den achtsten graad, terwijl die van den zevenden graad niet alle verdwijnen. Die symmetrische onderdeterminanten van den zevenden graad van $\Phi_6(a)$ echter, welke a_{11} niet bevatten, zijn symmetrische onderdeterminanten van den zevenden graad van $\Phi_5(a)$, en dus nul.

Zij bijv. de symmetrische onderdeterminante van den vijfden graad van $\Phi_5(a)$ (1 2 3 4 5) niet gelijk nul. Indien nu alle symmetrische onderdeterminanten van den zevenden graad, die (1 2 3 4 5) tot onderdeminante hebben, verdwenen, zoo zouden *alle* symmetrische onderdeterminanten van den zevenden graad van $\Phi_6(a)$ verdwijnen. In die onderstelling zijn namelijk alle determinanten van den zesden graad uit het volgende systeem, welke (1 2 3 4 5) tot onderdeterminante hebben, nul (3).

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} & a_{27} & a_{28} & b & b' \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{36} & a_{37} & a_{38} & c & c' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{51} & a_{52} & \dots & a_{56} & a_{57} & a_{58} & e & e' \\ a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} & a_{67} & a_{68} & f & f' \\ a_{71} & a_{72} & \dots & a_{76} & a_{77} & a_{78} & g & g' \\ a_{81} & a_{82} & \dots & a_{86} & a_{87} & a_{88} & h & h' \\ a & b & \dots & f & g & h & & \\ a' & b' & \dots & f' & g' & h' & & \end{vmatrix},$$

waaruit volgt, dat *alle* determinanten van den zesden graad, die men uit dat systeem kan vormen, verdwijnen. (Versluys t. a. p.). Iedere symmetrische onderdeterminante van den zevenden graad, die het element a_{11} bevatte, zou dan verdwijnen, wijl de coëfficienten der elementen

a_{11}, a_{12}, a_{13}, enz. determinanten van den zesden graad uit bovenstaand systeem zijn, en dus verdwijnen.

De vergelijking $\phi_6 = 0$ heeft echter slechts drie wortels a, zoodat niet alle symmetrische onderdeterminanten van $\phi_6(a)$ kunnen verdwijnen; derhalve is er eene symmetrische onderdeterminante van $\phi_6(a)$ van den zevenden graad, welke (1 2 3 4 5) als symmetrische onderdeterminante bevat en niet verdwijnt, bijv. (2 4 5). De beide nietverdwijnende symmetrische onderdeterminanten (1 2 3 4 5) en (2 4 5) hebben tegengestelde teekens, daar (1 2 4 5) $= 0$ is. (Zie 4).

Verder hebben (2 4 5) en $\phi_6(a-d)$, zoo ook (1 2 3 4 5) en $\phi_5(a-d)$ gelijke teekens (9); bijgevolg verkeeren $\phi_5(a-d)$ en $\phi_6(a-d)$ in tegengestelden toestand, doch $\phi_5(a+d)$ en $\phi_6(a+d)$ in denzelfden toestand; zoodat

$$\Delta_6 = \Delta_5 - 1,$$

hetgeen te bewijzen was.

Het behandelde onder a, b, c heeft doen zien, dat de volgende betrekkingen gelijktijdig bestaan

$$\begin{aligned} \theta_6 &= \theta_5 &&\text{en } \Delta_6 = \Delta_5, \\ \theta_6 &= \theta_5 + 1 &&\text{en } \Delta_6 = \Delta_5 + 1, \\ \theta_6 &= \theta_5 - 1 &&\text{en } \Delta_6 = \Delta_5 - 1. \end{aligned}$$

Wanneer we hieraan de opmerking toevoegen, dat hetzelfde voor elke twee op elkander volgende termen van de rij (3) bewezen kan worden, en dat blijkbaar

$$\theta_0 = \Delta_0 = 0,$$

zoo leiden we hieruit de gevolgtrekking af, dat voor elke waarde van p

$$\theta_p = \Delta_p$$

zal moeten wezen.

De voorgaande beschouwingen kunnen op de volgende wijze samengevat worden. Indien x onafgebroken van β tot α afneemt, ondergaat het aantal variatiën der rij (3) geene verandering, tenzij x eene waarde a aanneemt, voor welke ϕ_{n-m} verdwijnt. Heeft dit plaats, dan verliest die rij echter bij het passeeren van a zooveel variatiën als de vergelijking $\phi_{n-m} = 0$ gelijke wortels a bezit.

Hieruit volgt verder onmiddellijk de waarheid der

STELLING. *Substitueert men in de rij* (3) *achtereenvolgens voor x de bestaanbare grootheden α en $\beta (> \alpha)$, en bepaalt men daarna het aantal variatiën, dat die rij voor $x = \beta$ meer bevat, dan voor $x = \alpha$, dan is dit verschil juist gelijk aan het aantal bestaanbare wortels der vergelijking $\phi_{n-m} = 0$, die tusschen α en β zijn gelegen.*

Deze stelling stelt ons in staat de in de inleiding opgeworpen vraag te beantwoorden.

De coëfficienten van de hoogste machten van x in de hulpfunctiën (3) hebben afwisselend positieve en negatieve teekens. De substitutie van $+\infty$ levert dus $(n-m)$ variatiën in de rij (3); terwijl die rij voor $x = -\infty$ slechts permanentiën vertoont, omdat de graden der hulpfunctiën afwisselend even en oneven zijn. Dat verlies van $(n-m)$ variatiën bewijst volgens de laatste stelling de eigenschap

Alle wortels der vergelijking (2) *zijn bestaanbaar.*

11. Omtrent de wortels van twee op elkander volgende vergelijkingen

$$\Phi_5 = 0, \quad \Phi_6 = 0,$$

die eveneens alle bestaanbaar zijn, zij nog het volgende opgemerkt.

Heeft de tweede α wortels a, β wortels b, γ wortels c enz., dan zal de eerste $(\alpha-1)$ wortels a, $(\beta-1)$ wortels b, $(\gamma-1)$ wortels c enz. bezitten (8). Zijn a, b, c.... naar hunne grootte gerangschikt, zoo bezit de eerste vergelijking buitendien eenen wortel tusschen a en b, b en c, enz., die echter ook aan een dier grenzen gelijk kan zijn.

Het bewijs van deze eigenschap verblijve den lezer.

De stelling van n°. 7 geeft een gemakkelijk middel aan de hand, om te bepalen, onder welke voorwaarde de behandelde vergelijking gelijke wortels heeft. Op de vergelijking toegepast, waarvan men zich bij het zoeken van de doorsnede van een plat vlak en een oppervlak van den tweeden graad bedient, zullen die voorwaarden den stand der vlakken bepalen, wier doorsneden cirkels zijn.

IETS OVER DE GEKOPPELDE KRUKBEWEGING,

DOOR

J. D. C. M. DE ROOS.

1. Wanneer men twee stangen, die om vaste steunpunten in een en hetzelfde vlak, of ook in onderling evenwijdige vlakken draaijen, met eene derde stang zoodanig scharniervormig verbindt, dat de assen, waarom de verschillende draaijingen geschieden, onderling evenwijdig loopen, en dus de verplaatsing der stangen ten opzigte van elkander, wel is waar gebonden, doch niet opgeheven is; dan verkrijgt men eene inrigting tot het overbrengen van bewegingen, welke in de werktuigkunde eene veelvuldige toepassing gevonden heeft.

Onder anderen berust het algemeen bekende parallelogram van Watt hoofdzakelijk op deze, uitsluitend uit draaibaar aan elkander verbonden stangen zamengestelde inrigting; welke in de Kinematika onder de zoogenaamde stangenstelsels, daarentegen in de Werktuigkunde gewoonlijk onder de toestellen tot het omzetten van bewegingen gerangschikt wordt. Wij voor ons zullen den toestel in het algemeen onder den naam van gekoppelde krukbeweging behandelen, omdat deze, gelijk gezegd werd, op de aaneenkoppeling van twee draaijende bewegingen berust, en zijne veelvuldige toepassing bij het zamenstellen van werktuigen wel eenen bijzonderen naam regtvaardigt.

Daarbij zullen wij de beide stangen, welke om de vaste steunpunten draaijen, **krukken**, — daarentegen de derde, **koppel- of verbindingsstang** noemen; terwijl aan de lijn, die de beide vaste steunpunten verbindt, gevoegelijk den naam van **basis**, of ook wel dien van **steunpuntenlijn** kan gegeven worden.

2. Elk vast, met de koppelstang CD (figuur 1) verbonden, punt P beschrijft ten opzigte van de basis AB eene kromme lijn van den

zesden graad, wier vergelijking hoogst ingewikkeld is, en wier vorm in het algemeen met de afmetingen van het stelsel en de plaatsing van het beschrijvende punt in groote mate veranderlijk is.

Zoo is onder anderen de door P beschreven lijn de bekende lemniscate, wanneer men $AB = AC = a$, $BD = CD = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$, $CE = a\sqrt{2}$ en $EP = 0$ neemt.

In het algemeen worden echter de op deze wijze beschrevene lijnen Wattsche krommen genoemd.

3. Eene van de vele merkwaardige en belangrijke eigenschappen dier lijnen is die, dat elke Wattsche kromme door drie verschillende stelsels van stangen, namelijk gekoppelde krukbewegingen, kan beschreven worden.

Wanneer eene van die stelsels, bij voorbeeld dat van figuur 1 gegeven is, kunnen de beide anderen gemakkelijk door constructie gevonden worden.

Daartoe beschrijven wij uit C eenen cirkelboog, waarvan de straal CP bedraagt.

Voorts trekken wij voor eenen willekeurigen stand van het stelsel uit het snijpunt F van dien cirkelboog en de koppelstang CD, de lijn FC' evenwijdig aan de linker kruk AC; uit het steunpunt A de lijn AC' evenwijdig aan de koppelstang CD; en uit het snijpunt van FC' met den diagonaal AD, de lijn $D'B'$ evenwijdig aan de regter kruk DB.

Vervolgens beschrijven wij uit C' eenen cirkelboog met $C'F$ tot straal, en uit A eenen cirkelboog met AP tot straal; welke beide cirkelbogen in het algemeen elkander in twee punten K en K' zullen snijden.

Eindelijk laten wij uit de snijpunten K en K' loodlijnen KL en $K'L'$ op $C'D'$ neder.

Draaijen wij nu de figuur $AB'D'C'$, die eveneens eene gekoppelde krukbeweging met AB' tot basis vormt, — en aan wier koppelstang $C'D'$ de beide punten K en K', waarvan de ligging door de coördinaten $C'L$, LK en $C'L'$, $L'K'$ bepaald is, vast verbonden gedacht worden, — om het steunpunt A, totdat de basis AB' eenen hoek $B'AB$ met de basis AB maakt, welke gelijk is aan den onveranderlijken hoek PCD; dan zal een der beide punten K en K', hier K, met het punt P zamenvallen; in welk geval de door K beschrevene Wattsche lijn zoowel in vorm als in ligging gelijk moet zijn aan die, welke P beschrijft.

Wanneer de beide uit C' en A getrokkene cirkelbogen elkander

raken in plaats van snijden, als wanneer de snijpunten K en K′ zamenvallen; dan moeten de beide uit C en A beschrevene cirkelbogen elkander eveneens raken.

Het tweede snijpunt K′ beschrijft dan ook dezelfde kromme lijn ten opzigte van de basis AB′ van het geconstrueerde stelsel AB′D′C′, als het tweede snijpunt P′ ten opzigte van de basis AB van het gegevene stelsel ABDC.

4. Het betoog dezer constructie, die voor zooverre wij weten alleen bekend was voor die gevallen, waarbij het beschrijvende punt P in den koppelstang ligt, is zelfs voor het meest algemeene geval, alzoo voor eene geheel willekeurige plaatsing van het beschrijvende punt, zeer eenvoudig.

Daartoe toch is het voldoende dat wij aantoonen

1°. dat de afmetingen van het geconstrueerde stelsel onafhankelijk zijn van den stand, waarin de stangen van het gegevene stelsel ten opzigte van elkander bij de constructie geplaatst waren; en

2°. dat het snijpunt K steeds met het beschrijvende punt P kan zamenvallen, wanneer de basis van het geconstrueerde stelsel om den onveranderlijken hoek B′AB′, gelijk aan den hoek PCD, om het steunpunt A gedraaid wordt.

Stelt men bij de gegevene koppeling ABDC,

de basis $AB = a$, de linkerkruk $AC = b$,

de koppelstang $CD = c$, de regter kruk $DB = d$,

en de coördinaten van het beschrijvende punt P,

$$CE = m,\ ED = n \text{ en } EP = u;$$

en evenzoo voor de overeenkomstige waarden van de geconstrueerde koppeling

$$a_1,\ b_1,\ c_1,\ d_1,\ m_1,\ n_1 \text{ en } u_1;$$

dan is, ingevolge de constructie,

$$b_1 = AC' = CF = \sqrt{m^2 + u^2}.$$

Voorts is de driehoek DD′F gelijkvormig aan den driehoek ADC, weshalve

$$AC:FD' = CD:FD = AD:DD',$$

en dus
$$FD' = \frac{AC.FD}{CD} = \frac{b}{c}\left(c - \sqrt{m^2 + u^2}\right);$$

mitsdien

$$c_1 = C'F - D'F = AC - D'F = b - \frac{b}{c}\left(c - \sqrt{m^2 + u^2}\right) = \frac{b}{c}\sqrt{m^2 + u^2}$$

is; terwijl $CD-FD : AD-DD' = CD : AD$,

dus $$\frac{AD-DD'}{AD} = \frac{CD-FD}{CD} \text{ of } \frac{AD'}{AD} = \frac{\sqrt{m^2+u^2}}{c}$$
is.

Vervolgens is de driehoek $AD'B'$ gelijkvormig aan den driehoek ADB, weshalve

$$D'B' : DB = AB' : AB = AD' : AD,$$

en dus $d_1 = D'B' = \frac{d}{c}\sqrt{m^2+u^2}$ en $a_1 = AB' = \frac{a}{c}\sqrt{m^2+u^2}$ is.

Verder is de driehoek ACP gelijk en gelijkvormig aan den driehoek $KC'A$, omdat, ingevolge de constructie, hunne zijden twee aan twee gelijk zijn.

Mitsdien is $\angle ACP = \angle KC'A$,

en daar $\angle ACE = \angle AC'F$

is, volgt uit het verschil dier vergelijkingen dat

$$\angle ECP = \angle FC'K$$

is, en dus de regthoekige driehoeken ECP en $LC'K$ gelijkvormig zijn; weshalve

$$LK : EP = C'L : CE = C'K : CP,$$

of $$u_1 : u = m_1 : m = b : \sqrt{m^2+u^2};$$

en dus, zoo men tevens de rigting van u_1 en m_1 in aanmerking neemt,

$$u_1 = -\frac{ub}{\sqrt{m^2+u^2}} \text{ en } m_1 = \frac{mb}{\sqrt{m^2+u^2}}$$

is.

Eindelijk is, aangenomen dat wij het stelsel $AB'D'C'$ om het steunpunt A draaijen, totdat K met P zamenvalt, als wanneer, daar klaarblijkelijk AK gelijk aan AP moet blijven, de stangen van dit stelsel hunnen stand ten opzigte van elkander onveranderd behouden,

$$\angle PAK = \angle B''AB'.$$

Maar daar voorts $\angle CAC' + \angle AC'F = 180°$

en $\angle KAC' + \angle AKC' + \angle AC'F + \angle FC'K = 180°$,

is, moet $\angle CAC' - \angle KAC' - \angle AKC' = \angle FC'K$,

of daar $\angle AKC' = \angle CAP$

en $\angle FC'K = \angle ECP$

is, $\angle PAK = \angle ECP$,

dus ook $\angle B''AB' = \angle ECP$,

alzoo standvastig zijn.

Diensvolgens hebben de afmetingen van de geconstrueerde koppeling, namelijk a_1, b_1, c_1, d_1, m_1 en u_1 steeds dezelfde waarde, onverschillig in welken stand de gegevene gekoppelde krukbeweging bij de constructie geplaatst is; en kan K steeds met P zamenvallen, wanneer de basis van het geconstrueerde stelsel met de basis van het gegevene stelsel eenen hoek B″AB′ vormt, welke gelijk is aan den onveranderlijken hoek ECP.

5. Het derde stelsel verkrijgt men eenvoudig door uit D (figuur 2) met PD tot straal, eenen cirkelboog te beschrijven; en vervolgens uit het snijpunt F′ de lijn F′D‴ evenwijdig aan DB, uit het steunpunt B de lijn BD‴ evenwijdig aan CD, en uit het snijpunt C‴ van F′D‴ met den diagonaal CB, de lijn C‴A′ evenwijdig aan CA te trekken; als wanneer het stelsel A′BD‴C‴ de gezochte koppeling is.

Draait men dit stelsel om het steunpunt B, tot dat de basis A″B met de basis AB den hoek A′BA″ insluit, welke gelijk is aan den onveranderlijken hoek EDP; dan behoeft men slechts uit P de loodlijn PI″ op de koppelstang $C^{IV}D^{IV}$ neder te laten, om onmiddellijk de coördinaten $I''C^{IV}$ en I″P van het beschrijvende punt te verkrijgen.

Deze laatste coördinaten zou men klaarblijkelijk ook verkregen hebben door uit de punten D‴ en B cirkelbogen te beschrijven met de respectievelijke stralen F′D‴ en BP, en vervolgens uit de snijpunten H en H′ de loodlijnen HI en H′I′ op de verbindingstang C‴D‴ neder te laten.

Daarbij heeft H dezelfde beweging als het beschrijvende punt P, en H′ dezelfde beweging als het beschrijvende punt P″.

Overigens valt nog op te merken dat, even als in figuur 3 geteekend is, het steunpunt B″ van figuur 1 met het steunpunt A″ van figuur 2 moet zamenvallen; omdat, gelijk wij zagen, in figuur 3

$AB'' = a_1 = \frac{a}{c}\sqrt{m^2 + u^2}$, en evenzoo $BB'' = a_{11} = \frac{a}{c}\sqrt{n^2 + u^2}$ is;

en dus $a_1 : a_{11} = \sqrt{m^2 + u^2} : \sqrt{n^2 + u^2}$ of $AB'' : BB'' = CP : PD$; terwijl bovendien de hoeken PCE, B″AB, PDE en B″BA twee aan twee gelijk zijn.

De driehoeken AB″B en CPD zijn dan ook, zoowel als de driehoeken C″D″P, $PC^{IV}D^{IV}$ en CPD, onderling gelijkvormig.

6. De afmetingen van het derde stelsel kan men zeer eenvoudig door analogie uit die van het tweede stelsel afleiden, gelijk zulks hierboven reeds met de basis a_{11} geschied is.

De hiervolgende tabellarische zamenstelling geeft een overzigt van de uitkomsten.

I Stelsel.	II Stelsel.	III Stelsel.
a	$\frac{a}{c}\sqrt{m^2+u^2}$	$\frac{a}{c}\sqrt{n^2+u^2}$
b	$\sqrt{m^2+u^2}$	$\frac{b}{c}\sqrt{n^2+u^2}$
c	$\frac{b}{c}\sqrt{m^2+u^2}$	$\frac{d}{c}\sqrt{n^2+u^2}$
d	$\frac{d}{c}\sqrt{m^2+u^2}$	$\sqrt{n^2+u^2}$
m	$\frac{mb}{\sqrt{m^2+u^2}}$	$-\frac{d}{c}\frac{mn-u^2}{\sqrt{n\ +u^2}}$
n	$-\frac{b}{c}\frac{nm-u^2}{\sqrt{m^2+u^2}}$	$\frac{nd}{\sqrt{n^2+u^2}}$
u	$-\frac{ub}{\sqrt{m^2+u^2}}$	$-\frac{du}{\sqrt{n^2+u^2}}$

Hieruit volgt onder anderen, dat, wanneer in het I stelsel $c = a$ en $d = b$ is, of anders gezegd de tegenoverstaande zijden twee aan twee gelijk zijn, in het II stelsel $b_1 = a_1$ en $d_1 = c_1$, alzoo de aanliggende zijden twee aan twee gelijk moeten zijn; terwijl het III stelsel tot $c_{11} = b_{11}$ en $d_{11} = a_{11}$, dus eveneens tot de gelijkheid van de aanliggende zijden twee aan twee leidt. Hierdoor kan men dan ook de vergelijking van de lijn, die door het punt P van het in figuur 4 geteekende stelsel ABDC beschreven wordt, (welke slechts eene eenvoudige afleiding vordert) herleiden tot die, welke het punt P van de in de figuren 5 en 6 aangegevene stelsels ABDC beschrijft.

7. Behalve de drie besprokene stelsels zijn er nog een tal van andere stangenverbindingen denkbaar, waarmede eene zelfde Wattsche kromme kan getrokken worden.

Zij zouden echter meerdere stangen vorderen, weshalve wij hen hier buiten beschouwing laten.

8. Denkt men zich den driehoek DCP, figuur 3, zooveel malen vergroot als noodig is, om zijne basis CD gelijk aan die van het oorspronkelijke stelsel DBAC te maken; en laat men hem voorts langs de achtereenvolgende stangen van de koppeling glijden, tot-

dat de beide basis zamenvallen, dan zal hij den stand ABP''' innemen.

Beschrijft men voorts uit A met AP''' tot straal en uit B met BP''' tot straal cirkelbogen, dan zullen die het verlengde van BP''', respectievelijk AP''', in de beide punten O en O′ snijden, waarvan de coördinaten AM, MO en AM′, M′O′ gemakkelijk te berekenen zijn.

Immers is, zoo wij uit A de loodlijn AN op OB nederlaten, de driehoek ANB gelijkvormig aan den driehoek $P'''M''B$, waarvan de zijden $\frac{a}{c}$ maal grooter zijn dan die van den driehoek PEC; weshalve

$BP''' : P'''M'' = AB : AN,$

of
$$\frac{a}{c}\sqrt{m^2+u^2} : \frac{a}{c}u = a : AN,$$

en dus
$$OB = ON + NP''' + P'''B = 2NB - P'''B = 2\sqrt{AB^2 - AN^2} - P'''B =$$
$$= a\frac{2mc - m^2 - u^2}{c\sqrt{m^2+u^2}}$$

wordt.

Mitsdien is
$$AM = AB - OB\, Cos \angle OBA = \frac{a}{c}\,\frac{u^2(c+m) - m^2(c-m)}{m^2+u^2},$$

en
$$OM = OB\, Sin \angle OBA = \frac{a}{c}\,\frac{2mc - m^2 - u^2}{m^2+u^2}\,.\,u.$$

Evenzoo vindt men dat $BN' = \frac{AB\,.\,M''P'''}{AP'''} = \frac{au}{\sqrt{n^2+u^2}}$,

dus
$$AO' = 2AN' - AP''' = \frac{a}{c}\,\frac{2nc - n^2 - u^2}{\sqrt{n^2+u^2}},$$

en mitsdien
$$AM' = AO'\, Cos \angle O'AB = \frac{a}{c}\,\frac{2nc - n^2 - u^2}{n^2+u^2}\,n,$$

en
$$M'O' = AO'\, Sin \angle O'AB = \frac{a}{c}\,\frac{2nc - n^2 - u^2}{n^2+u^2}\,u$$

is. Weshalve
$$OO' = \pm\sqrt{(AM' - AM)^2 + (OM - O'M')^2} = \pm\frac{2a(nm - u^2)}{\sqrt{(m^2+u^2)(n^2+u^2)}}$$

wordt; hetgeen trouwens, daar $OP''' : P'''O' = AP''' : P'''B$, nog wel zoo eenvoudig uit de gelijkvormigheid der driehoeken $OP'''O'$ en $AP'''B$ volgt.

Verrigt men dezelfde bewerking met den driehoek $D''PC''$ van het tweede stelsel, als wanneer deze gelijk en gelijkvormig aan de driehoeken $P'''BA$ en $B''AB$ wordt en den stand $AB''D^V$ aanneemt, dus met de zijde AD^V in het verlengde van $P'''A$, en met de zijde D^VB'' evenwijdig aan AB komt te liggen; dan valt het snijpunt van den uit B'' getrokkenen cirkelboog en de lijn D^VA met het reeds gevondene punt O' te zamen. Immers is

$$D^VO' = D^VA + AO' = \frac{a}{c}\sqrt{n^2+u^2} + \frac{a}{c}\,\frac{2nc-n^2-u^2}{\sqrt{n^2+u^2}} = \frac{2na}{\sqrt{n^2+u^2}};$$

en daar, zoo wij uit B'' eene loodlijn op D^VO' nederlaten,

$$2\,D^VR = 2\,D^VB''\,Cos\angle B''D^VA = 2a\frac{n}{\sqrt{n^2+u^2}},$$

dus eveneens gelijk aan D^VO' is, moet het bedoeld snijpunt met O' zamenvallen.

Het tweede snijpunt, namelijk dat van den uit A getrokkenen cirkelboog met de zijde D^VB'', valt daarentegen in O''; waarvan de coördinaten, zoo men tevens de rigting in aanmerking neemt,

$$AM'' = O''A\,Cos\angle O''AM'' = AD^V\,Cos\angle AD^VB'' =$$
$$= \frac{a}{c}\sqrt{n^2+u^2}\,.\,\frac{n}{\sqrt{n^2+u^2}} = \frac{an}{c},$$

en $M''O'' = -O''A\,Sin\angle O''AM'' = -\frac{a}{c}\sqrt{n^2+u^2}.\frac{u}{\sqrt{n^2+u^2}} = -\frac{au}{c}$

bedragen.

Mitsdien wordt de afstand

$$OO'' = \pm\sqrt{(AM''-AM)^2+(OM+O''M'')^2} = \pm\frac{2am}{c}\sqrt{\frac{n^2+u^2}{m^2+u^2}},$$

en de afstand

$$O'O'' = \pm\sqrt{(AM'-AM'')^2+(O'M'+O''M'')^2} = \pm\frac{2an}{c}\sqrt{\frac{m^2+u^2}{n^2+u^2}}.$$

Door dezelfde bewerking ook op het derde stelsel toe te passen verkrijgt men geene nieuwe snijpunten meer, omdat zij, gelijk trouwens ook uit de figuur blijkt, met O, respectievelijk met O'', zamenvallen.

9. De drie besproken punten O, O' en O'' vallen, ingevolge de voor hunne coördinaten gevondene uitdrukkingen voor alle in de koppelstang CD, figuur 3, gelegene punten P, met de rigting der basis AB te zamen; daarentegen komen zij voor alle punten P, welke in den omtrek van den cirkel, waarvan CD de middellijn

vormt, gelegen zijn, en waarvoor dus $mn = u^2$ is, in eene op den afstand AM″, gelijk aan $\frac{an}{c}$, loodregt op de basis AB staande lijn te liggen; en schoon overigens hunne ligging onafhankelijk is van de lengte der krukken b en d, schijnen zij nogthans in eenig verband met de door P beschrevene Wattsche krommen te staan, weshalve wij op deze merkwaardige punten hier bijzonder de aandacht gevestigd hebben.

Zoo nemen onder anderen de polaire vergelijkingen van de door P beschrevene lijn denzelfden eenvoudigen vorm aan door O″ tot oorsprong te nemen, wanneer, als in figuur 4, $c = a$ en $d = b$ is; daarentegen moet O tot oorsprong genomen worden, wanneer, als in figuur 5, $b_1 = a_1$ en $d_1 = c_1$ is; of O′, wanneer, als in figuur 6, $c_{11} = b_{11}$ en $d_{11} = a_{11}$ is.

Immers worden in het eerste geval, — dat ook naar hem, die het eerst op eenige belangrijke eigenschappen van dit stelsel de aandacht vestigde, het geval van Hart genoemd wordt, — de coördinaten van den oorsprong O″, figuur 4, AM″ $= n$ en O″M″ $= -u$; zoodat dus de oorsprong O″ evenzoo ten opzigte van de basis AB komt te liggen, als P ten opzigte van de verbindingstang DC ligt. Mitsdien verkrijgt men in dit geval de vergelijking van de door P beschrevene lijn onmiddellijk, door de gebrokene lijn BDEPO″M″B op eene aan de diagonaal AD of BC evenwijdig loopende rigting te projecteren; als wanneer, zoo wij PO″ $= z$ en ∠PO″S″ $= \omega$ stellen,

$$\sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2 \omega} - n \operatorname{Cos} \omega - u \operatorname{Sin} \omega - z - u \operatorname{Sin} \omega + m \operatorname{Cos} \omega = 0,$$

of $$z = -2u \operatorname{Sin} \omega + (m-n) \operatorname{Cos} \omega \mp \sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2 \omega} \; \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

volgt, wijl dan

∠PO″S″ = ∠BAU = ∠DEW = ∠PEV′ = ∠M″O′V = ∠BM″U′ $= \omega$

is, en het teeken voor den wortelvorm tegengesteld wordt, wanneer men eene der gekruiste zijden, in plaats van eene der ongekruiste zijden, tot basis aanneemt.

In het tweede geval, dat ook even als het derde geval naar Roberts genoemd wordt, omdat hij zich in het bijzonder met het onderzoek van deze stelsels heeft beziggehouden, volgt daarentegen uit de projectie van de gebrokene lijn ASPEDBA, figuur 5, op de diagonaal DA en op eene loodregt op deze diagonaal staande rigting, dat

$$(\mathrm{AM} + x) \operatorname{Cos} \alpha + (y - \mathrm{OM}) \operatorname{Sin} \alpha - u_1 \operatorname{Sin} \beta + n_1 \operatorname{Cos} \beta - c_1 \operatorname{Cos} \beta - a_1 \operatorname{Cos} \alpha = 0, \quad (1)$$

en $\quad (\mathrm{AM}+x)\,Sin\,\alpha-(y-\mathrm{OM})\,Cos\,\alpha+u_1\,Cos\,\beta+n_1\,Sin\,\beta=0$ . . (2)

is; wanneer men namelijk x en y de coördinaten van P ten opzigte van het regthoekige coördinaten-stelsel MOS′ noemt, en $\angle \mathrm{DAS} = \angle \mathrm{TSP} = \alpha$ en $\angle \mathrm{ADS} = \angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{EPT'} = \beta$ stelt.

Voorts heeft men nog blijkens de figuur

$$a_1\,Sin\,\alpha = c_1\,Sin\,\beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Lost men nu uit (1) en (2) de waarde van $Cos\,\beta$ op, nadat men er alvorens die van $Sin\,\beta$ uit (3) in gesubstitueerd heeft, dan verkrijgt men

$$Cos\,\beta = \frac{\mathrm{AM}+x-a_1}{m_1}\,Cos\,\alpha + \frac{y-\mathrm{OM}-u_1\,\frac{a_1}{c_1}}{m_1}\,Sin\,\alpha =$$

$$= -\frac{\mathrm{AM}+x+n_1\,\frac{a_1}{c_1}}{u_1}\,Sin\,\alpha + \frac{y-\mathrm{OM}}{u_1}\,Cos\,\alpha;$$

dus $$Tg\,\alpha = \frac{y m_1 - x u_1 - \mathrm{OM}.m_1 - \mathrm{AM}.u_1 + a_1 u_1}{y u_1 + x m_1 - \mathrm{OM}.u_1 + \mathrm{AM}.m_1 + n_1 m_1\,\frac{a_1}{c_1} - u_1^2\,\frac{a_1}{c_1}}.$$

Deze uitdrukking gaat, na substitutie van de onder N°. 8 voor AM en OM gevondene waarden

$$\frac{a_1}{c_1}\,\frac{u_1^2(c_1+m_1)-m_1^2(c_1-m_1)}{m_1^2+u_1^2} \quad \text{en} \quad \frac{a_1}{c_1}\,\frac{2m_1c_1-m_1^2-u_1^2}{m_1^2+u_1^2}\cdot u_1,$$

in $$Tg\,\alpha = \frac{y m_1 - x u_1}{y u_1 + x m_1} = \frac{\frac{y}{x}-\frac{u_1}{m_1}}{1+\frac{y}{x}\cdot\frac{u_1}{m_1}}$$ over.

Maar daar, zoo wij $\mathrm{PO}=z$, $\angle \mathrm{POS}=\omega$ en $\angle \mathrm{PCD} = \angle \mathrm{ASO} = \angle \mathrm{SOS'} = \gamma$ stellen,

$$\frac{y}{x} = Tg\,(\gamma+\omega) \quad \text{en} \quad \frac{u_1}{m_1} = Tg\,\gamma$$

is, wordt $$Tg\,\alpha = \frac{Tg\,(\gamma+\omega)-Tg\,\gamma}{1+Tg(\gamma+\omega)\,Tg\,\gamma} = Tg\,\omega,$$ of hier $\alpha=\omega$;

en mitsdien uit (3)

$$Sin\,\beta = \frac{a_1}{c_1}\,Sin\,\omega, \text{ dus } Cos\,\beta = \pm\frac{1}{c_1}\,\sqrt{c_1^2-a_1^2\,Sin^2\,\omega};$$

terwijl $z\,Cos(\gamma+\omega)=x$, $z\,Sin(\gamma+\omega)=y$ en $Cos\,\gamma = \dfrac{m_1}{\sqrt{m_1^2+u_1^2}}$ is.

Substitueert men achtereenvolgens deze waarden, benevens die van OM en AM, in (1), dan verkrijgt men

$$(\mathrm{AM}-a_1)\,Cos\,\omega + z\,Cos(\gamma+\omega)\,.\,Cos\,\omega + z\,Sin(\gamma+\omega)\,.\,Sin\,\omega - \mathrm{OM}\,Sin\,\omega -$$

$$-\frac{u_1 a_1}{c_1}\,Sin\,\omega \mp \frac{m_1}{c_1}\,\sqrt{c_1{}^2 - a_1{}^2\,Sin^2\,\omega} = 0,$$

of

$$z\,Cos\,\gamma = \left(\mathrm{OM} + \frac{u_1 a_1}{c_1}\right)Sin\,\omega - (\mathrm{AM}-a_1)\,Cos\,\omega \pm \frac{m_1}{c_1}\,\sqrt{c_1{}^2 - a_1{}^2\,Sin^2\,\omega},$$

dus

$$z = \frac{2a_1 u_1}{\sqrt{m_1{}^2 + u_1{}^2}}\,Sin\,\omega + \frac{a_1}{c_1}\,\frac{2c_1 m_1 - m_1{}^2 - u_1{}^2}{\sqrt{m_1{}^2 + u_1{}^2}}\,Cos\,\omega \pm$$

$$\pm\sqrt{(m_1{}^2 + u_1{}^2) - \frac{a_1{}^2}{c_1{}^2}(m_1{}^2 + u_1{}^2)\,Sin^2\,\omega}, \quad . \ . \ . \ . \ . \ \text{(II)}$$

als polaire vergelijking van de beweging van het punt P ten opzigte der basis.

Voor het derde geval kan men de vergelijking van de door P beschrevene lijn gemakkelijk uit die van het tweede geval afleiden, wijl de uitdrukkingen voor de coördinaten van den oorsprong O′, figuur 6, namelijk

$$\mathrm{M'B} = \mathrm{AB} - \mathrm{AM'} = \frac{a_{11}}{b_{11}}\,\frac{u_{11}{}^2(b_{11} + n_{11}) - n_{11}{}^2(b_{11} - n_{11})}{n_{11}{}^2 + u_{11}{}^2},$$

en $$\mathrm{O'M'} = \frac{a_{11}}{b_{11}}\,\frac{2n_{11}b_{11} - n_{11}{}^2 - u_{11}{}^2}{n_{11}{}^2 + u_{11}{}^2}\,.\,u_{11},$$

analoog gevormd zijn aan die van het tweede geval.

Op grond hiervan heeft men voor het derde geval

$$z = \frac{2a_{11}u_{11}}{\sqrt{n_{11}{}^2 + u_{11}{}^2}}\,Sin\,\omega + \frac{a_{11}}{b_{11}}\,\frac{-2b_{11}n_{11} + n_{11}{}^2 + u_{11}{}^2}{\sqrt{n_{11}{}^2 + u_{11}{}^2}}\,Cos\,\omega \pm$$

$$\pm\sqrt{(n_{11}{}^2 + u_{11}{}^2) - \frac{a_{11}{}^2}{b_{11}{}^2}(n_{11}{}^2 + u_{11}{}^2)\,Sin^2\,\omega} \quad . \ . \ . \ \text{(III)}$$

10. Daar dus de vergelijkingen I, II, III, allen denzelfden vorm hebben, en mitsdien het punt P in alle drie gevallen dezelfde kromme lijn moet beschrijven, zullen wij ons voortaan alleen met die voor het eerste geval, namelijk die van Hart, als zijnde de meest eenvoudige, bezighouden; te meer wijl men met deze vergelijking weder gemakkelijk tot de beide anderen kan geraken. Daartoe toch behoeven wij slechts de coëfficiënten dier vergelijkingen aan elkander gelijk te stellen, als wanneer daar $m+n=a$, $m_1+n_1=c_1$ en $m_{11}+n_{11}=b_{11}$ is,

$$a = \frac{a_1}{c_1}\sqrt{m_1^2+u_1^2} = \frac{a_{11}}{b_{11}}\sqrt{n_{11}^2+u_{11}^2},$$

$$b = \sqrt{m_1^2+u_1^2} = \sqrt{n_{11}^2+u_{11}^2},$$

$$m = \frac{a_1 m_1}{\sqrt{m_1^2+u_1^2}} = -\frac{a_{11}}{b_{11}}\,\frac{n_{11}m_{11}-u_{11}^2}{\sqrt{n_{11}^2+u_{11}^2}},$$

$$n = -\frac{a_1}{c_1}\,\frac{n_1 m_1 - u_1^2}{\sqrt{m_1^2+u_1^2}} = \frac{a_{11}n_{11}}{\sqrt{n_{11}^2+u_{11}^2}},$$

$$u = -\frac{a_1 u_1}{\sqrt{m_1^2+u_1^2}} = -\frac{a_{11}u_{11}}{\sqrt{n_{11}^2+u_{11}^2}},$$

of omgekeerd

$$a_1 = \sqrt{m^2+u^2},\quad c_1 = \frac{b}{a}\sqrt{m^2+u^2},$$

$$m_1 = \frac{mb}{\sqrt{m^2+u^2}},\quad n_1 = -\frac{b}{a}\,\frac{nm-u^2}{\sqrt{m^2+u^2}},$$

$$u_1 = -\frac{ub}{\sqrt{m^2+u^2}} \quad \text{en} \quad a_{11} = \sqrt{n^2+u^2},$$

$$b_{11} = \frac{b}{a}\sqrt{n^2+u^2},\quad m_{11} = -\frac{b}{a}\,\frac{nm-u^2}{\sqrt{n^2+u^2}},$$

$$n_{11} = \frac{nb}{\sqrt{n^2+u^2}},\quad u_{11} = -\frac{bu}{\sqrt{n^2+u^2}}$$

wordt.

Deze laatste waarden had men trouwens ook onmiddellijk uit de hiervoor onder N°. 6 voorkomende tabel kunnen afleiden; daar de bewuste kromme lijnen voor de verschillende gevallen onmogelijk aan elkander gelijk kunnen zijn, zonder dat de betreffende stelsels bij elkander behooren.

11. Herleiden wij de algemeene topvergelijking van de kegelsneden voor het regthoekige coördinaten-stelsel Y O‴X, figuur 7, $y^2 = px + qx^2$, — waarin q gelijk aan nul is voor de parabool, daarentegen negatief voor de ellips, en positief voor de hyperbool, — tot die voor het polaire coördinaten-stelsel met den willekeurigen door v en w bepaalden oorsprong O″; dan wordt zij, zoo men $QO'' = z_1$, $\angle QO''S'' = \omega$ en $\angle X'O''S'' = \delta$ stelt, als wanneer

$$v + z_1 \, Cos(\omega - \delta) = x \quad \text{en} \quad w + z_1 \, Sin(\omega - \delta) = y$$

is,

$$z_1 = \frac{-w\,Sin(\omega-\delta) + (vq+\tfrac{1}{2}p)\,Cos(\omega-\delta) \pm \sqrt{\left\{v(p+vq)\,Sin^2(\omega-\delta) + [(vq+\tfrac{1}{2}p)^2 - q(vp+v^2q-w^2)]\,Cos^2(\omega-\delta) - 2w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin(\omega-\delta).Cos(\omega-\delta)\right\}}}{Sin^2(\omega-\delta) - q\,Cos^2(\omega-\delta)}.$$

Sluit men voorts die waarden van v en w buiten, waarbij de oorsprong O' op den omtrek der kegelsneden te liggen komt, en waarvoor dus $w^2 = vp + qv^2$ is; dan mogen wij teller en noemer der gevondene vergelijking met het verschil der beide termen van den teller vermenigvuldigen, in welk geval wordt

$$z_1 = \frac{w^2 - vp - v^2 q}{\left\{\begin{array}{l} -w\,Sin(\omega-\delta) + (vq+\tfrac{1}{2}p)\,Cos(\omega-\delta) \mp \\ \mp \sqrt{\left[\begin{array}{l} v(p+vq)\,Sin^2(\omega-\delta) + \{(vq+\tfrac{1}{2}p)^2 - q(vp+v^2q-w^2)\}\,Cos^2(\omega-\delta) - \\ -2w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin(\omega-\delta).Cos(\omega-\delta) \end{array}\right]} \end{array}\right\}}.$$

Deze vergelijking gaat, zoo men de $Sin(\omega-\delta)$ en de $Cos(\omega-\delta)$ ontwikkelt, en tevens

$$w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin^2\delta - w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Cos^2\delta - (vp+v^2q-\tfrac{1}{4}p^2-qw^2)\,Sin\,\delta.Cos\,\delta = 0,$$

of
$$Tg\,2\delta = -\frac{2w(vq+\tfrac{1}{2}p)}{vp+v^2q-\tfrac{1}{4}p^2-qw^2}$$

stelt, over in

$$z_1 = \frac{w^2 - vp - v^2 q}{\left\{\begin{array}{l} \{-w\,Cos\,\delta + (vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin\,\delta\}\,Sin\,\omega + \{w\,Sin\,\delta + (vq+\tfrac{1}{2}p)\,Cos\,\delta\}\,Cos\,\omega \mp \\ \mp \sqrt{\left[\begin{array}{l} (qw^2+\tfrac{1}{4}p^2) + (vp+v^2q-\tfrac{1}{4}p^2-qw^2)\,Sin^2\delta + w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin\,2\delta + \\ + \{-2w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin\,2\delta + (vp+v^2q-\tfrac{1}{4}p^2-w^2q)\,Cos\,2\delta\}\,Sin^2\omega \end{array}\right]} \end{array}\right\}}.$$

Stelt men eindelijk $z = \frac{C^2}{z_1}$, waarbij C^2 eene onveranderlijke grootheid is, — keert men dus de waarden der voerstralen om; dan verkrijgt men de vergelijking

$$z = \frac{-w\,Cos\,\delta + (vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin\,\delta}{w^2-vp-v^2q}\,C^2\,Sin\,\omega + \frac{w\,Sin\,\delta + (vq+\tfrac{1}{2}p)\,Cos\,\delta}{w^2-vp-v^2q}\,C^2\,Cos\,\omega \mp$$

$$\mp \sqrt{\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(qw^2+\tfrac{1}{4}p^2) + (vp+v^2q-\tfrac{1}{4}p^2-qw^2)\,Sin^2\delta + w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin\,2\delta}{(w^2-vp-v^2q)^2}\,C^4 - \\ -\dfrac{2w(vq+\tfrac{1}{2}p)\,Sin\,2\delta - (vp+v^2q-\tfrac{1}{4}p^2-w^2q)\,Cos\,2\delta}{(w^2-vp-v^2q)^2}\,C^4\,Sin^2\omega \end{array}\right\}} \quad \text{(IV).}$$

12. Daar de vergelijking IV geheel met de onder N°. 9 gevondene

vergelijking I overeenstemt, blijken de door het stelsel van HART beschrevene lijnen, en dus ook die der beide andere gevallen van ROBBERTS, welke eigentlijk slechts één stelsel vormen, in het algemeen omgekeerde kegelsneden te zijn.

Nogthans is het niet mogelijk, om met deze stelsels alle mogelijke omgekeerde kegelsneden, dat wil zeggen de omgekeerde kegelsnede voor elk willekeurig punt, te trekken, daar zij niet alleen, gelijk gezegd werd, de op den omtrek der kegelsneden gelegene punten doen buiten sluiten, maar ook voor enkele andere punten van inversie onuitvoerbaar worden.

Deze punten kan men zonder eenig bezwaar vinden, door de onder het wortelteeken voorkomende coëfficienten van de vergelijkingen I en IV aan elkander gelijk te stellen.

Men verkrijgt dan

$$a = \pm \frac{C^2}{(w^2 - vp - v^2 q)} \sqrt{2w(vq + \tfrac{1}{2}p) Sin\, 2\delta - (vp + v^2 q - \tfrac{1}{4}p^2 - w^2 q) Cos\, 2\delta},$$

$$\text{en } b = \pm \frac{C^2}{(w^2 - vp - v^2 q)} \sqrt{\left\{\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(vp + v^2 q + \tfrac{1}{4}p^2 + q w^2) + w(vq + \tfrac{1}{2}p) Sin\, 2\delta - \\ - \tfrac{1}{2}(vp + v^2 q - \tfrac{1}{4}p^2 - q w^2) Cos\, 2\delta \end{array}\right\}};$$

of, zoo men in aanmerking neemt dat

$$Tg\, 2\delta = - \frac{2w(vq + \tfrac{1}{2}p)}{vp + v^2 q - \tfrac{1}{4}p^2 - q w^2} \quad \text{is,}$$

$$a = \pm \frac{C^2}{w^2 - vp - v^2 q} \sqrt[4]{(pw + 2qvw)^2 + (vp + v^2 q - \tfrac{1}{4}p^2 - w^2 q)^2},$$

en

$$b = \pm \frac{C^2}{w^2 - vp - v^2 q} \sqrt{\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{r} (vp + v^2 q + \tfrac{1}{4}p^2 + q w^2) + \\ + \sqrt{(pw + 2qvw)^2 + (vp + v^2 q - \tfrac{1}{4}p^2 - w^2 q)^2} \end{array}\right\}}.$$

Hieruit blijkt

1°. dat a en b steeds bestaanbaar zijn, omdat voor die waarden van v, waarbij $vp + v^2 q$ negatief wordt, — namelijk voor de parabool 0 tot $-\infty$, voor de hyperbool van 0 tot $-\frac{p}{q}$, en voor de ellips de absolute waarde van $\frac{p}{q}$ tot ∞ benevens van 0 tot $-\infty$, — het verschil van $(pw + 2qvw)^2 + (vp + v^2 q - \frac{1}{4}p^2 - w^2 q)^2$ en het kwadraat van $(vp + v^2 q + \frac{1}{4}p^2 + q w^2)$, namelijk

$p^2(w^2 - pv)$ voor de parabool,

$p^2(w^2 - v^2 q - pv)$ voor de hyperbool,

en $\qquad p^2(w^2+v^2q-pv)$ voor de ellips,
steeds positief is.

2°. dat a steeds grooter of kleiner dan b is, omdat w^2 grooter of kleiner dan $vp+v^2q$ verondersteld werd, en de gelijkheid van a en b tot $(vp+v^2q+\frac{1}{4}p^2+qw^2)^2=(pw+2qvw)^2+(vp+v^2q-\frac{1}{4}p^2-w^2q)^2$ of $w^2=vp+v^2q$ zoude leiden.
en 3°. dat voor alle punten, waarvoor men $w=0$ en $vp+v^2q=\frac{1}{4}p^2$ heeft, alzoo voor de brandpunten der kegelsneden, a gelijk aan nul wordt.

Daar nu de beschouwde stelsels voor $a=0$ onuitvoerbaar worden, zijn niet alleen de op den omtrek gelegene punten, maar ook de brandpunten der kegelsneden buitengesloten.

Trouwens gaan de omgekeerde kegelsneden voor de brandpunten in verlengde of verkorte conchoiden over, welke ook wel schulplijnen of slaklijnen van Pascal genoemd worden; daarentegen voor den omtrek, in het bijzonder voor den top, in cissoiden over, namelijk in gewone cissoiden voor de parabool, in hypocissoiden voor de hyperbool, en in hypercissoiden voor de ellips, terwijl geen enkele dezer lijnen in de algemeene vergelijking I begrepen is. Daarentegen bevat deze vergelijking wel de lemniscatoiden, welke de omgekeerde kegelsneden voor het middelpunt vormen, en waartoe ook de als een bijzonder geval van ovalen van Cassini te beschouwen lemniscate van Bernoulli behoort. Overigens verkrijgt men nog, door de overige coëfficienten van de vergelijkingen I en IV aan elkander gelijk te stellen,

$$m-n=2m-a=\frac{w\,Sin\,\delta+(vq+\frac{1}{2}p)\,Cos\,\delta}{w^2-vp-v^2q}\,C^2,$$

en
$$u=\frac{w\,Cos\,\delta-(vq+\frac{1}{2}p)\,Sin\,\delta}{2(w^2-vp-v^2q)}\,C^2.$$

Beide deze waarden zijn steeds bestaanbaar, omdat de hierboven voor $Tg\,2\,\delta$ aangegevene waarde, welke hen doet overgaan in

$$m=\pm\frac{C^2}{2(w^2-vp-v^2q)}\sqrt{\tfrac{1}{2}(w^2+v^2q^2+vpq+\tfrac{1}{4}p^2)+\vphantom{X}}$$

$$\overline{+\frac{2w^2(vq+\frac{1}{2}p)^2-\frac{1}{2}(v^2q-w^2q+pv-\frac{1}{4}p^2)\left\{(\frac{1}{2}p+vq)^2-w^2\right\}}{\sqrt{(pw+2qvw)^2+(vp+v^2q-\frac{1}{4}p^2-w^2q)^2}}}\pm$$

$$\pm\frac{C^2}{2(w^2-vp-v^2q)}\sqrt[4]{(pw+2qvw)^2+(vp+v^2q-\frac{1}{4}p^2-w^2q)^2},$$

$$\text{en} \quad u = \pm \frac{C^2}{2(w^2 - vp - v^2 q)} \sqrt{\tfrac{1}{2}(w^2 + v^2 q^2 + vpq + \tfrac{1}{4} p^2) - {}}$$

$$\overline{- \frac{2w^2(vq + \frac{1}{2}p)^2 - \frac{1}{2}(v^2 q - w^2 q + pv - \frac{1}{4}p^2)\left\{(\frac{1}{2}p + vq)^2 - w^2\right\}}{\sqrt{(pw + 2qvw)^2 + (vp + v^2 q - \frac{1}{4}p^2 - w^2 q)^2}}},$$

steeds bestaanbaar is.

13. Gaat men omgekeerd te werk, neemt men dus C^2 maal de omgekeerde waarde van de voerstralen der door de stelsels van Hart en Roberts beschrevene lijnen, — hetgeen, gelijk wij later onder N°. 16 zullen zien, op eene zeer eenvoudige wijze werktuigelijk kan geschieden, — dan moet men weder tot eene kegelsnede geraken. De vergelijking I gaat dan ook in dit geval in

$$z_1 = \frac{C^2}{-2u \operatorname{Sin} \omega + (m-n) \operatorname{Cos} \omega \pm \sqrt{b^2 - a^2 \operatorname{Sin}^2 \omega}},$$

of zoo men regthoekige coördinaten invoert, in de algemeene vergelijking van den tweeden graad over

$$(4u^2 + a^2 - b^2)y^2 - 4u(m-n)xy + \left\{(m-n)^2 - b^2\right\}x^2 +$$
$$+ 4uC^2 y - 2(m-n)C^2 x + C^4 = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

waaruit men onmiddellijk den vorm der kegelsnede bepalen kan.

Stelt men namelijk het verschil van het kwadraat der coëfficient van den tweeden term en viermaal het product der coëfficienten van den eersten en derden term gelijk aan 4μ, dan verkrijgt men voor de betrekking tusschen de coördinaten van het beschrijvende punt

$$4u^2(m-n)^2 - (4u^2 + a^2 - b^2)\left\{(m-n)^2 - b^2\right\} = \mu, \ \ldots \quad (2)$$

$$\text{of } u = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{\left\{(b^2 - a^2)^2 + 4a(b^2 - a^2)m - 4(b^2 - a^2)m^2 + \mu\right\}} \quad (3)$$

waarin μ gelijk aan nul, negatief, of positief genomen moet worden, al naarmate de kegelsnede eene parabool, ellips of hyperbool zal zijn.

Maar de beweging van de koppelstang CD, figuur 7, ten opzigte van de basis AB, en omgekeerd, kan beschouwd worden als te geschieden door het op elkander rollen van een paar kromme lijnen, welke poolbanen genoemd worden, omdat zij de achtereenvolgende draaipunten van de verplaatsing der verbindingstang ten opzigte van de basis en omgekeerd bevatten. Deze poolbanen vormen in het onderhavige geval een paar gelijke ellipsen, respectievelijk een paar gelijke hyperbolen, wanneer namelijk b kleiner in plaats van grooter dan a is; waarvan de brandpunten met de uiteinden der koppelstang, respectievelijk basis, zamenvallen, en de assen

voor het geval eener ellips b en $\sqrt{b^2-a^2}$, daarentegen voor het geval eener hyperbool b en $\sqrt{a^2-b^2}$ bedragen; dus

$$y = \pm \frac{1}{2b} \sqrt{\left\{(b^2-a^2)^2 + 4a(b^2-a^2)x - 4(b^2-a^2)x^2\right\}} \quad . \; . \; (4)$$

tot brandpuntsvergelijking hebben. En nu moet, ingevolge de vergelijking (3), elk op den omtrek dier met de koppelstang verbonden gedachte poolbanen of kegelsneden gelegen punt P, eene omgekeerde parabool beschrijven; daarentegen zullen alle andere punten, welke binnen die kegelsneden gelegen zijn, omgekeerde ellipsen, en die, welke daar buiten vallen, omgekeerde hyperbolen trekken.

De overeenkomstige betrekkingen voor het stelsel van Roberts vindt men door de onder N°. 10 voor a, b, m, n en u gevondene waarden in (2) te substitueren, als wanneer, dewijl $m_1 + n_1 = c_1$ is,

$$u_1 = \pm \sqrt{\left\{\begin{array}{l} -m_1^2 - 2\dfrac{a_1^2 c_1}{c_1^2-a_1^2} m_1 + \dfrac{2a_1^2 c_1^4}{(c_1^2-a_1^2)^2} \pm \\ \pm 2a_1^2 c_1^2 \sqrt{\dfrac{c_1^4}{(c_1^2-a_1^2)^4} - \dfrac{2c_1}{(c_1^2-a_1^2)^3} m_1 - \dfrac{c^4}{4a_1^4(c_2^2-a_1^2)}} \end{array}\right\}} \quad (5)$$

wordt.

Daarentegen heeft men voor de poolbanen, wijl zij de meetkundige plaats van de achtereenvolgende snijpunten P, figuur 8, der beide krukken AC en DB ten opzigte van de koppelstang CD en de basis AB vormen,

$$\mathrm{CD} : \mathrm{DP} = \mathrm{CA} : \mathrm{AP},$$

omdat in het onderhavige geval de hoek CDB door de diagonaal AD midden door gedeeld wordt.

Deze evenredigheid leidt, zoo wij tevens $\mathrm{AP} = s$, $\mathrm{PC} = s_1$, $\mathrm{PD} = t$, en $\mathrm{PB} = t_1$, stellen, tot de beide volgende evenredigheden

$$c_1 : t = a_1 : s - a_1 \quad \text{en} \quad c_1 : c_1 + t_1 = a_1 : s_1 \,;$$

waaruit men voor de poolbanen van het stelsel van Roberts de bipolaire vergelijkingen

$$s - \frac{a_1}{c_1} t = a_1, \; . \; . \; . \; . \; (6) \quad \text{en} \quad s_1 - \frac{a_1}{c_1} t_1 = a_1 \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

verkrijgt; zoodat zij een paar, doch niet bij elkander behoorende, ovalen van Descartes vormen.

Herleidt men voorts de bipolaire vergelijking (6) van het met de verbindingstang vast verbonden ovaal tot regthoekige coördinaten, dan gaat zij, — zoo wij in verband met figuur 5 C tot oorsprong

nemen, en de beide coördinaten x en y van het beschrijvende punt P negatief in rekening brengen, als wanneer

$$x^2+y^2=s^2 \quad \text{en} \quad (c_1-x)^2+y^2=t^2$$

is — over in

$$y=\pm\sqrt{\left\{\begin{array}{l} -x^2-2\dfrac{a_1^2c_1}{c_1^2-a_1^2}x+\dfrac{2a_1^2c_1^4}{(c_1^2-a_1^2)^2}\pm \\ \pm 2a_1^2c_1^2\sqrt{\dfrac{c_1^4}{(c_1^2-a_1^2)^4}-\dfrac{2c_1}{(c_1^2-a_1^2)^3}x} \end{array}\right\}} \quad . \; . \; (8)$$

Uit de beide vergelijkingen (5) en (8) blijkt, dat bij het element van ROBERTS alle beschrijvende punten, welke op den omtrek van het met de koppelstang verbonden gedachte ovaal van DESCARTES liggen, waarvoor alzoo $\mu=0$ is, omgekeerde parabolen zullen beschrijven.

Daarentegen zullen alle punten, welke buiten dit ovaal gelegen zijn, ellipsen, en die, welke binnen dit ovaal liggen, hyperbolen beschrijven; omdat μ in het eerste geval negatief is, waardoor, voor zoo verre namelijk beide absolute waarden van u_1 bestaanbaar zijn, de grootste waarde grooter en de kleinste kleiner wordt dan de overeenkomstige ordinaten van het ovaal; en in het tweede geval μ daarentegen positief wordt, hetgeen juist het omgekeerde doet plaats vinden.

Geheel overeenkomstig hieraan komt ook het punt van inversie op, buiten, of binnen den omtrek van het met de basis verbonden gedachte ovaal te liggen, al naarmate het beschrijvende punt eene omgekeerde parabool, ellips, of hyperbool trekt.

Immers vonden wij onder N°. 8 voor de coördinaten van het inversiepunt AM en OM, figuur 5, welke wij h en k zullen noemen.

$$h=\frac{a_1}{c_1}\,\frac{u_1^2(c_1+m_1)-m_1^2(c_1-m_1)}{m_1^2+u_1^2} \text{ en } k=\frac{a_1}{c_1}\,\frac{2m_1c_1-m_1^2-u_1^2}{m_1^2+u_1^2}\,u_1,$$

of, zoo men de som van u_1 maal h en m_1 maal k neemt,

$$hu_1+km_1=a_1u_1 \quad \text{dus} \quad u_1=\frac{k}{a_1-h}\,m_1.$$

Substitueert men deze waarde van u_1 in de uitdrukking voor k, dan wordt

$$m_1=\frac{a_1^2-h^2-k^2}{(a_1-h)^2+k^2}\,\frac{c_1}{a_1}(a_1-h), \text{ en dus } u_1=\frac{a_1^2-h^2-k^2}{(a_1-h)^2+k^2}\,\frac{c_1}{a_1}\,k.$$

Mitsdien levert de vergelijking (5), na substitutie dezer waarden, voor de betrekking tusschen h en k

$$k = \pm \sqrt{\begin{Bmatrix} -h^2 - \dfrac{2a_1^3}{(c_1^2 - a_1^2)} h - \dfrac{a_1^2(a_1^4 - 2a_1^2 c_1^2 - c_1^4)}{(c_1^2 - a_1^2)^2} \pm \\ \pm \dfrac{2a_1^2 c_1^2}{(c_1^2 - a_1^2)} \sqrt{- \dfrac{2a_1}{(c_1^2 - a_1^2)} h + \dfrac{a_1^2(2c_1^2 - a_1^2)}{(c_1^2 - a_1^2)^2} - \dfrac{\lambda}{4c_1^4}} \end{Bmatrix}} ; \; (9)$$

waarin $\lambda = \left\{ \dfrac{(a-h)^2 + k^2}{a^2 - h^2 - k^2} \right\}^2 \mu$ gesteld werd, en dus nul, negatief, of positief is, al naarmate de kegelsnede eene parabool, ellips of hyperbool voorstelt.

Daarentegen geeft de bipolaire vergelijking (7) van het met de basis verbonden gedachte ovaal PB, figuur 8, na herleiding tot regthoekige coördinaten, — zoo men in verband met figuur 5 het oorsprongspunt in A aanneemt, en de abscis AM van het inversie-punt negatief in rekening brengt, als wanneer

$$x_1^2 + y_1^2 = s_1^2 \text{ en } (a_1 - x_1)^2 + y_1^2 = t_1^2 \text{ is, —}$$

$$y_1 = \pm \sqrt{\begin{Bmatrix} -x_1^2 - \dfrac{2a_1^3}{(c_1^2 - a_1^2)} x_1 - \dfrac{a_1^2(a_1^4 - 2a_1^2 c_1^2 - c_1^4)}{(c_1^2 - a_1^2)^2} \pm \\ \pm \dfrac{2a_1^2 c_1^2}{(c_1^2 - a_1^2)} \sqrt{- \dfrac{2a_1}{(c_1^2 - a_1^2)} x_1 + \dfrac{a_1^2(2c_1^2 - a_1^2)}{(c_1^2 - a_1^2)^2}} \end{Bmatrix}} ; \; (10)$$

zoodat het punt van inversie in hetzelfde geval verkeert ten opzigte van het met de basis verbonden gedachte ovaal, als het beschrijvende punt ten opzigte van het met de koppelstang bevestigde ovaal. Overigens moet, ingeval het beschrijvende punt in het met de koppelstang verbonden gedachte ovaal gelegen is, de omgekeerde kegelsnede door het inversie-punt gaan; of anders gezegd, het beschrijvende punt met het inversie-punt kunnen zamenvallen.

Immers kan men dan het stelsel zoo draaijen, dat het beschrijvende punt P, figuur 8, met het gemeenschappelijke raakpunt der beide poolbanen zamenvalt.

Beschrijft men dan voorts uit A eenen cirkelboog met den straal AP, en uit het snijpunt P^{IV} van de lijn BD en de beschrevenen cirkelboog de lijn AP^{IV}, dan zal $\angle APP^{IV} = \angle AP^{IV}P$; en dus ook, daar $\angle ABD = \angle ACD$ is, driehoek ABP^{IV} gelijkvormig aan driehoek DCP zijn.

Mitsdien moet omgekeerd de constructie van het tot het beschrijvende punt P behoorende inversie-punt, tot een met P zamenvallend punt leiden.

Daarbij zal men klaarblijkelijk voor de beschrijvende punten I en I′ respectievelijk de inversie-punten L en L′ vinden.

Bovendien zullen, blijkens de hierboven voor k aangegevene uitdrukking, de inversie-punten van alle beschrijvende punten, welke met de koppelstang zamenvallen, in de rigting van de basis liggen.

In het bijzonder vindt men voor het beschrijvende punt P^V, zoo wij $IP^V = g$ en $LO^{IV} = g_1$ stellen, en tevens op de rigting van k letten, $k = -\frac{a_1}{c_1}(c_1 - m_1)$, $g_1 = LA + k$ en $g = m_1 - CI$; of, daar de wortels van de vergelijking (8) voor $y = 0$

$$\frac{2a_1 c_1}{c_1 + a_1} \text{ en } -\frac{2a_1 c_1}{c^1 - a_1},$$

en die van de vergelijking (10) voor $y = 0$

$$a_1,\ a_1,\ -\frac{a_1(c_1 - a_1)}{c_1 + a_1} \text{ en } -\frac{a_1(c_1 + a_1)}{c_1 - a_1},$$

zijn, en dus $CI = \frac{2a_1 c_1}{c_1 + a_1}$ en $LA = \frac{a_1(c_1 - a_1)}{c_1 + a_1}$ is,

$$g_1 = \frac{a_1(c_1 - a_1)}{c_1 + a_1} - \frac{a_1}{c_1}(c_1 - m_1), \quad g = m_1 - \frac{2a_1 c_1}{c_1 + a_1},$$

waaruit na eliminatie van m_1 de zeer eenvoudige verhouding $g = \frac{c_1}{a_1} g_1$ volgt, welke ook voor $I'P^V$ en $L'O^{IV}$ geldt.

Overigens levert elke regtlijnige verplaatsing van een willekeurig gelegen beschrijvend punt eene kromme lijn van den derden graad voor de meetkunstige plaats der inversie-punten.

14. Wat de ligging en de grootte der getrokkene kegelsneden betreft, ook deze laten zich volgens de bekende regelen gemakkelijk uit de hierboven onder N°. 13 gevondene vergelijking (1) bepalen.

Voor het geval dat de kegelsnede eene parabool en dus

$$\frac{\frac{1}{4}(m-n)^2}{\frac{1}{4}b^2} \pm \frac{u^2}{\frac{1}{4}(\pm b^2 \mp a^2)} = 1$$

is, vindt men voor den hoek $S''O''X'$, figuur 7, welken hare hoofdas met de as der abscissen maakt,

$$Tg\,2\delta = \frac{2(m-n)b\sqrt{(b^2-a^2)\{b^2-(m-n)^2\}}}{b^4 + (m-n)^2(a^2 - 2b^2)};$$

voor de coördinaten van den top, waarbij de in de figuur aangegevene rigtingen als positief worden verondersteld,

$$v = \frac{a^4(m-n)^2 - 2a^2b^2(m-n)^2 + b^6}{2\sqrt{(a^2-b^2)\left\{a^2(m-n)^2-b^4\right\}^3}} C^2,$$

en $$w = a^2 b(n-m)\sqrt{\frac{(m-n)^2-b^2}{\left\{a^2(m-n)^2-b^4\right\}^3}} \,.\, C^2;$$

en voor den parameter

$$2b\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\left\{\frac{a^2}{b^2}(m-n)^2-b^2\right\}^3}} \,.\, C^2.$$

Daarentegen vindt men, voor het geval dat de kegelsnede eene ellips of hyperbool is, voor de coördinaten van het middelpunt

$$v = \frac{(m-n)(a^2-b^2)}{4u^2b^2-(a^2-b^2)\left\{(m-n)^2-b^2\right\}} C^2,$$

en $$w = \frac{2b^2u}{4u^2b^2-(a^2-b^2)\left\{(m-n)^2-b^2\right\}} C^2;$$

voor den hoek, welken eene der beide hoofdassen met de as der abscissen maakt,

$$Tg\,2\vartheta = \frac{2(m-n)b\sqrt{(b^2-a^2)\left\{b^2-(m-n)^2\right\}}}{b^4+(m-n)^2(a^2-2b^2)},$$

en voor de halve hoofdassen

$$bC^2\sqrt{\pm\frac{2(b^2-a^2)}{\left[4u^2b^2-(a^2-b^2)\left\{(m-n)^2-b^2\right\}\right]\left[4u^2+(m-n)^2+a^2-2b^2-\sqrt{16u^2(m-n)^2+\left\{4u^2+a^2-(m-n)^2\right\}^2}\right]}}$$

en

$$bC^2\sqrt{\pm\frac{2(b^2-a^2)}{\left[4u^2b^2-(a^2-b^2)\left\{(m-n)^2-b^2\right\}\right]\left[4u^2+(m-n)^2+a^2-2b^2+\sqrt{16u^2(m-n)^2+\left\{4u^2+a^2-(m-n)^2\right\}^2}\right]}},$$

waarin voor de ellips de beide positieve teekens gelden, en daarentegen voor de hyperbool het teeken van de eene as tegengesteld aan dat van de andere as wordt.

Mitsdien moet voor den cirkel

$$16u^2(m-n)^2 + \left\{4u^2+a^2-(m-n)^2\right\}^2 = 0$$

zijn, hetgeen alleen mogelijk is voor $u = 0$ en $n = \pm a$; als wanneer het punt P, figuur 7, eenen cirkelboog met den straal b en daarentegen het punt Q eenen cirkelboog met den straal $\pm\frac{b}{a^2-b^2}C^2$ beschrijft.

Voor $a = b$ wordt deze straal oneindig groot; weshalve het punt Q eene regte lijn beschrijft, wanneer zich het punt P in eenen cirkelboog beweegt, die door het inversie-punt O″ gaat, dat dan met B of A zamenvalt, al naar mate n gelijk aan plus of minus a genomen wordt.

De betreffende waarden der kegelsneden voor het stelsel van Roberts vindt men voorts uit die van het stelsel van Hart, door de onder N°. 10 voor a, b, m, n en u aangegevene waarden daarin te substitueren.

15. De omgekeerde kegelsnede kan bij het stelsel van Hart beschouwd worden, als de omhullende te zijn van de cirkelbogen, beschreven uit de verschillende draai- of snijpunten R figuur 7, met den straal R P = R O″.

Mitsdien staat R P loodregt op de omgekeerde kegelsnede, zonder daarom nog haren krommingsstraal voor het punt P voor te stellen.

Dit zelfde is het geval met de lijn, die bij het stelsel van Roberts uit het gemeenschappelijke raakpunt der beide ovalen van Descartes naar het beschrijvende punt getrokken wordt. Daar nu elk punt der roltrek eene bepaalde normaal heeft, moeten, zoodra men de beide stelsels op elkander gelegd denkt, als wanneer zij gemeenschappelijk eene zelfde omgekeerde kegelsnede trekken, niet alleen de raakpunten van de poolbanen dier stelsels in eene door het beschrijvende punt gaande regte lijn liggen; maar ook die van alle andere poolbanen, welke de theorie der cycloiden of roltrekken leert kennen.

Deze algemeene eigenschap der roltrekken kan men benuttigen om de constructieve herleiding van eene der gekoppelde krukbewegingen tot de beide anderen niet alleen te vereenvoudigen, maar ook aan naauwkeurigheid te doen winnen.

16. Wij hebben hiervoor onder N°. 11 en 13 de waarde der voerstralen omgekeerd, overeenkomstig de vergelijking $z z_1 = C^2$; waarin z en z_1 de beide armen en C^2 de magt genoemd wordt.

Deze omkeering kan op verschillende wijzen werktuigelijk geschieden, met behulp eener gekoppelde krukbeweging, welke dan den naam van reciprocateur draagt.

Zoo kan men, wanneer het stelsel gekruist is, immer drie op de zijden gelegen punten bepalen, welke steeds in eene regte lijn blijven; en waarbij het product der beide armen standvastig is. Maar ook kan men, gelijk in figuur 9 geteekend is, door toevoeging van nog twee stangen X Q en X′Q, de punten O, Q en P in eene regte lijn doen houden en tevens de voorwaarde stellen, dat, even als bij den pantograaf, het quotient der beide armen, het product der beide armen standvastig is.

Wij zullen ons hier tot dit laatste stelsel bepalen, waarop, voor zoo verre wij weten, nog nimmer de aandacht gevestigd werd.

Stelt men $O''Z' = a$, $O''Z = b$, $ZP = c$, $PZ' = d$, $O''X = x$, $O''X' = x_1$, $XQ = y$, $X'Q = y_1$, $O''P = z$, $O''Q = z_1$, $\angle ZO''P = \phi$ en de magt, welke ingeval de beide armen in plaats van gelijke, tegengestelde rigting hebben, negatief wordt, C^2; dan is, daar $zz_1 = C^2$ is,

$$c^2 = b^2 + z^2 - 2bz \operatorname{Cos} \phi \quad \text{en} \quad y^2 = x^2 + \frac{C^4}{z^2} - 2x\frac{C^2}{z} \operatorname{Cos} \phi.$$

Hieruit volgt, na eliminatie van $\operatorname{Cos} \phi$,

$$y^2 = x^2 - x\frac{C^2}{b} + \frac{C^2}{z^2}\left(C^2 - xb + \frac{xc^2}{b}\right),$$

of, zoo men $\quad C^2 - xb + \dfrac{xc^2}{b} = 0 \quad$ dus $\quad x = \dfrac{b}{b^2 - c^2} C^2 \; . \; . \; . \; (1)$

stelt, $\quad y = \pm \dfrac{c}{b^2 - c^2} C^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$

Evenzoo vindt men

$$x_1 = \frac{a}{a^2 - d^2} C^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3) \quad \text{en} \quad y_1 = \pm \frac{d}{a^2 - d^2} C^2. \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Weshalve in het algemeen van de negen grootheden a, b, c, d, x, x_1, y, y_1, en C^2 vijf willekeurig kunnen aangenomen worden; terwijl de overige uit de vergelijkingen (1) tot en met (4) volgen. Zoo kan men onder anderen $x = -b$ en $x_1 = -a$ stellen, als wanneer $-a^2 + d^2 = -b^2 + c^2 = C^2$ en dus $y = c$ en $y_1 = d$ wordt; of ook $c = a$ en $b = d$, als wanneer de reciprocateur den vorm van een parallelogram aanneemt.

Stelt men daarentegen $x = x_1 = a = b$, dan wordt

$$c = d = y = y_1 \quad \text{en} \quad C^2 = a^2 - c^2.$$

Dit laatste stelsel is oorspronkelijk door Peaucellier, en later door Lipkin aangegeven geworden, tot het omzetten der ronddraaijende beweging in de volmaakt regtlijnige op- en nedergaande beweging, waarvan wij onder N°. 14 met een enkel woord melding maakten.

Verbindt men nu de beide punten O″ en P, figuur 9, van eenen dergelijken reciprocateur, bij voorbeeld dien van Peaucellier, met de beide overeenkomstige punten O″ en P, figuur 7, van het stelsel van Hart; dan verkrijgt men eene zamengestelde stangenverbinding, waarmede de kegelsneden werktuigelijk getrokken kunnen worden, en die men dus gevoegelijk conicograaf kan noemen.

Van dezen conicograaf kunnen enkele afmetingen willekeurig worden aangenomen, wanneer de ligging van het inversie-punt onverschillig, en alleen de grootte der kegelsneden gegeven is.

Zoo kan men het punt P met de koppelstang doen zamenvallen; waardoor de onder N°. 12 uitgevoerde berekeningen van de afmetingen van het stelsel belangrijk vereenvoudigd worden, en de toestel bovendien aan bruikbaarheid wint.

17. Overigens zijn van den reciprocateur van PEAUCELLIER nog een tal van stelsels afgeleid, met wier onderlinge verbinding alle zuiver algebraïsche lijnen werktuigelijk beschreven kunnen worden.

Wij zouden echter ons doel overschrijden, met hieromtrent in nadere bijzonderheden te treden; weshalve wij den belangstellenden lezer verwijzen naar een paar verhandelingen van mij, welke onder den titel van

„Over stangenstelsels, meer in het bijzonder over het zesstangenstelsel of de ruit van PEAUCELLIER" en onder dien van *„Eenige mededeelingen en opmerkingen over stangenstelsels,"*

in de jaargangen 1875/1876 en 1876/1877 van het Tijdschrift van het Koninklijk Instituut van Ingenieurs zijn opgenomen; en waarin men vele dier zeer belangrijke stelsels, zoomede nog een tal van conicografen, vermeld vindt.

18. Wij hebben gemeend met het bovenstaande de aandacht te vestigen op eenige merkwaardige eigenschappen van de gekoppelde krukbeweging.

Daarbij zijn wij hoofdzakelijk van een paar bijzondere gevallen uitgegaan, zonder daartoe van de algemeene vergelijking der Wattsche kromme gebruik te maken; en ofschoon deze vergelijking hoogst ingewikkeld, en dus minder geschikt is om mede te werken, kan zij nogthans onder enkele omstandigheden nuttig zijn.

Om deze reden laten wij ten slotte hare afleiding nog volgen. Daartoe stellen wij in figuur 10

$OB = a$, $OC = b$, $CD = c$, $DB = d$, $CE = m$, $ED = n$, $EP = u$, $CP = e$, $PD = f$, $\angle COB = \alpha$, $\angle DBO = \beta$, $\angle DFB = \angle EPH = \gamma$;

en de regthoekige coördinaten van het beschrijvende punt $OH = x$ en $PH = y$; als wanneer, wegens het meetkunstig verband der gegevens onderling,

$m + n = c$, $u^2 + m^2 = e^2$, $u^2 + n^2 = f^2$, $u^2 - nm = f^2 - nc =$
$= e^2 - mc$, $2mc - e^2 = c^2 - f^2$ en $2nc - f^2 = c^2 - e^2$ is.

Voorts levert de projectie van de gebrokene lijnen OCEPH en OCDB op de rigting van OB en de daarop loodregt staande rigting

$$b\,Cos\,\alpha + m\,Cos\,\gamma + u\,Sin\,\gamma = x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$b\,Sin\,\alpha - m\,Sin\,\gamma + u\,Cos\,\gamma = y, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$b\,Cos\,\alpha + c\,Cos\,\gamma + d\,Cos\,\beta = a, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

en
$$b\,Sin\,\alpha - c\,Sin\,\gamma - d\,Sin\,\beta = 0; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

terwijl uit het verschil van (3) en (1), en dat van (2) en (4), of ook onmiddellijk uit de figuur,

$$n\,Cos\,\gamma - u\,Sin\,\gamma + d\,Cos\,\beta = a - x, \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

en
$$n\,Sin\,\gamma + u\,Cos\,\gamma + d\,Sin\,\beta = y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

volgt.

Verder heeft men uit de som der kwadraten van

$m\,Cos\,\gamma + u\,Sin\,\gamma$ uit (1) en $-m\,Sin\,\gamma + u\,Cos\,\gamma$ uit (2)

$$e^2 = x^2 + y^2 + b^2 - 2xb\,Cos\,\alpha - 2yb\,Sin\,\alpha,$$

of
$$b\,Cos\,\alpha = \frac{x^2 + y^2 + b^2 - e^2 - 2yb\,Sin\,\alpha}{2x} \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

Evenzoo heeft men uit de som der kwadraten van

$n\,Cos\,\gamma - u\,Sin\,\gamma$ uit (5) en $n\,Sin\,\gamma + u\,Cos\,\gamma$ uit (6)

$$d\,Cos\,\beta = \frac{x^2 + y^2 + a^2 + d^2 - f^2 - 2ax - 2yd\,Sin\,\beta}{2(a-x)} \quad \ldots (8)$$

De substitutie van $b\,Cos\,\alpha$ uit (7) in (1), en die van $d\,Cos\,\beta$ uit (8) in (5), geeft

$$-2yb\,Sin\,\alpha + 2xm\,Cos\,\gamma + 2ux\,Sin\,\gamma = x^2 - y^2 - b^2 + e^2, \quad \ldots (9)$$

en
$$-2yd\,Sin\,\beta + 2(a-x)n\,Cos\,\gamma - 2(a-x)u\,Sin\,\gamma =$$
$$= a^2 - 2ax + x^2 - y^2 - d^2 + f^2; \quad \ldots\ldots\ldots (10)$$

en mitsdien de som van (9) en $2y$ maal (2), benevens die van (10) en $2y$ maal (6)

$$2(xm + uy)\,Cos\,\gamma + 2(ux - ym)\,Sin\,\gamma = x^2 + y^2 - b^2 + e^2, \quad \ldots (11)$$

en
$$2(an - xn + uy)\,Cos\,\gamma + 2(yn - an + ux)\,Sin\,\gamma =$$
$$= x^2 + y^2 + a^2 - d^2 + f^2 - 2ax \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Uit deze beide vergelijkingen vindt men gemakkelijk

$$Sin\,\gamma = \frac{(x^2+y^2+a^2-d^2+f^2-2ax)(xm+uy)-(x^2+y^2-b^2+e^2)(an-nx+uy)}{2\{(yn-au+ux)(xm+uy)-(ux-ym)(an-xn+uy)\}}, \quad (13)$$

en

$$Cos\,\gamma = \frac{(x^2+y^2-b^2+e^2)(yn-au+ux)-(x^2+y^2+a^2-d^2+f^2-2ax)(xu-ym)}{2\{(yn-au+ux)(xm+uy)-(an-xn+uy)(xu-ym)\}}. \quad (14)$$

Verder volgt uit de som der kwadraten van $Sin\,\gamma$ uit (13) en van $Cos\,\gamma$ uit (14)

$$4\left\{(yn-au+ux)(xm+uy)-(an-xn+uy)(xu-ym)\right\}^2=$$
$$=\left\{(x^2+y^2+a^2-d^2+f^2-2ax)(xm+uy)-(x^2+y^2-b^2+e^2)(an-nx+uy)\right\}^2+$$
$$+\left\{(x^2+y^2-b^2+e^2)(yn-au+ux)-(x^2+y^2+a^2-d^2+f^2-2ax)(xu-ym)\right\}^2, \quad (15)$$

of, na eenige herleidingen,

$$(x^2+y^2-b^2+e^2)^2(x^2+y^2+a^2-2ax)f^2+$$
$$+(x^2+y^2+a^2-d^2+f^2-2ax)^2(x^2+y\ )e^2-$$
$$-2(x^2+y^2-b^2+e^2)(x^2+y^2+a^2-d^2+f^2-2ax)\times$$
$$\left\{(x^2+y^2)(u^2-nm)-ax(u^2-nm)+aucy\right\}-$$
$$-4\left\{uc(x^2+y^2)-ay(u^2-nm)-aucx\right\}^2=0, \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

als algemeene vergelijking van de Wattsche kromme.

Deze hoogst ingewikkelde vergelijking van den zesden graad ondergaat in eenige bijzondere gevallen nog eene belangrijke vereenvoudiging, zooals voor $u^2=nm$, $b=e$ en $d=f$. In het bijzonder is dit het geval voor polaire coördinaten, wanneer $u=0$, $b=d$ en $m=n$ genomen wordt.

Overigens laat zich deze vergelijking voor $a=c$ en $b=d$, of ook voor $a=b$ en $c=d$, in die eens cirkels en de hiervoor besprokene vergelijkingen van den vierden graad der omgekeerde kegelsneden ontbinden.

Ook gaat zij in eene vierdemagtsvergelijking over, wanneer twee aanliggende zijden oneindig lang genomen worden.

Daartoe kan men in (16) eerst $d=a-h$ stellen, dan de vergelijking door a^2 deelen, en vervolgens $a=\infty$ nemen; als wanneer zich het punt D, figuur 10, in eene regte lijn DV moet bewegen, die op den afstand $OV=h$ van den oorsprong gelegen is, en loodregt op OB staat; de vergelijking van het beschrijvende punt P wordt

$$(x^2+y^2-b^2+e^2)^2f^2+4e^2(x^2+y^2)(h-x)^2+$$
$$+4(x^2+y^2-b^2+e^2)(h-x)\left\{x(u^2-nm)-ucy\right\}-$$
$$-4\left\{y(u^2-nm)+ucx\right\}^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Laat men vervolgens het tweede uiteinde van de koppelstang C eveneens langs eene regte lijn bewegen, bij voorbeeld in eene loodregt op DV staande rigting. In zulk geval behoeft men daartoe slechts O met V te laten zamenvallen door $h=0$ te nemen; voorts den oorsprong om b te verplaatsen door $b+y=y_1$ te stellen; en eindelijk b oneindig groot te laten worden, na vooraf de vergelijking door b^2 gedeeld te hebben. Dan verkrijgt men eenvoudig

$$y_1^2f^2+e^2x^2+2ucxy_1-(u^2-nm)^2=0, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

of de vergelijking eener ellips, gelijk trouwens algemeen bekend is.

OPMERKINGEN OVER DE THEORIËN VAN WEBER RIEMANN EN CLAUSIUS DER ELECTRODYNAMISCHE VERSCHIJNSELEN,

DOOR

Dr. G. J. MICHAËLIS.

1.

Door talrijke proefnemingen is het boven allen twijfel verheven, dat de werking op een afstand van een lineairen gesloten electrischen stroom gelijk is aan die van een magnetische oppervlakte, welke door den geleider begrensd is, en welker elementen een magnetisch moment hebben, dat evenredig is met de stroomsterkte. Dientengevolge wordt de onderlinge werking van twee zulke stroomen geheel bepaald door de uitdrukking

$$M = -\frac{1}{c^2}\, i\, i' \int_0^{s}\int_0^{s_1} \frac{\cos E}{r}\, ds\, ds', \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

waarin i en i' de intensiteiten voorstellen, ds en ds' twee elementen der beide geleiders, r hun afstand, E den hoek, dien zij samen vormen, en c eene standvastige is, welker beteekenis nader zal opgehelderd worden. Deze uitdrukking wordt de onderlinge potentiaal der beide stroomen genoemd; en de krachten, welke deze op elkander uitoefenen, kunnen er op de bekende wijze uit worden afgeleid.

Ampère[1]) heeft, zooals bekend is, op zeer scherpzinnige wijze uit de waarnemingen eene formule berekend voor de kracht, welke twee stroomelementen op elkaar uitoefenen, in de onderstelling, dat die kracht werkt volgens de verbindingslijn der elementen.

---

[1]) Ampère, *Theorie des phénomènes electro-dynamiques.*

Deze formule is

$$-\frac{1}{c^2}\, ii'\, ds\, ds' \left(\frac{Cos\, E}{r^2} + r\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial s\, \partial s'}\right) \quad \ldots\ldots (2)$$

Maar wanneer deze berekening gemaakt wordt zonder de genoemde beperkende onderstelling, dan vindt men, wanneer de coördinaten der elementen $(x'y'z')$ en (xyz) worden genoemd, voor de componenten der kracht volgens de assen

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{1}{c^2}\, ii'\, ds\, ds' \left(\frac{\xi}{r^3}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{2\xi}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial^2 \xi Q}{\partial s\, \partial s'}\right), \\ Y &= -\frac{1}{c^2}\, ii'\, ds\, ds' \left(\frac{\eta}{r^3}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{2\eta}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial^2 \eta Q}{\partial s\, \partial s'}\right), \\ Z &= -\frac{1}{c^2}\, ii'\, ds\, ds' \left(\frac{\zeta}{r^3}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - \frac{2\zeta}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial s\, \partial s'} + \frac{\partial^2 \zeta Q}{\partial s\, \partial s'}\right), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

waarin $x'-x=\xi$, $y'-y=\eta$, $z'-z=\zeta$ zijn gesteld, terwijl Q eene onbekende functie van r [1]) is. Stelt men in die vergelijkingen $Q=0$, dan wordt de uitdrukking van AMPÈRE teruggevonden. Neemt men $Q=-\frac{1}{2r}$, dan verkrijgt men dezelfde uitkomst als GRASSMANN; maar welke waarde voor Q ook in de plaats worde gesteld, bij gesloten stroomen komt alles op hetzelfde neer.

Door proeven met gesloten stroomen zal men dus nimmer een geheel bepaalde formule kunnen afleiden voor de onderlinge werking van twee stroom-elementen. Alleen door waarnemingen op ongesloten stroomen zou men oogenschijnlijk de ware formule kunnen vinden. Reeds in 1845 heeft GRASSMANN opgemerkt, dat men op dergelijke manier zou kunnen beslissen tusschen de uitdrukking van AMPÈRE en de zijne. Ongelukkig zijn dergelijke proeven met zulke groote bezwaren verbonden, dat zij tot nu toe geene uitkomst hebben opgeleverd. In de eerste plaats duurt zulk een ongesloten stroom slechts zeer kort, zooals bijv. het geval is met den ontladingsstroom eener Leidsche flesch; uit welke men dan ook geene uitkomsten heeft kunnen afleiden, welke in het minst afwijken van die der gesloten stroomen. Maar bovendien kunnen, volgens de beschouwingen van FARADAY en MAXWELL, ook in isolatoren electrische verplaatsingen optreden, die een electro-dynamisch effect hebben. In een isoleerende

[1]) MAXWELL, *On Electricity and Magnetism*, p. 160.

stof zouden de electriciteiten gescheiden worden onder den invloed van uitwendige krachten; en aan deze werking heeft men den naam gegeven van diëlectrische polarisatie [1]).

Volgens de theorie zou deze polarisatie dezelfde wetten volgen als de magnetische polarisatie; en hare grootte zou afhangen van eene standvastige, die bepaald wordt door de natuur der isoleerende stof. Verandert de uitwendige kracht, dan wordt ook de grootte der polarisatie gewijzigd; dat wil zeggen, in den isolator heeft eene verschuiving der electriciteit plaats, welke even goed als de beweging in een geleider een werking op een afstand kan uitoefenen. MAXWELL nam aan, dat ook de ether diëlectrisch polariseerbaar is; en wanneer nu, zooals hij verder onderstelde, de standvastige der polarisatie een oneindig groot getal is, of in allen gevalle een zeer groot getal, dan verdwijnt het onderscheid tusschen gesloten en niet-gesloten stroomen geheel; want dan brengt elke beweging der electriciteit in een geleider een aequivalente beweging in de omgevende isolatoren teweeg.

Dit is af te leiden uit de vergelijkingen van HELMHOLTZ in de aangehaalde verhandeling. MAXWELL heeft nog eene groote uitbreiding aan zijne theorie gegeven. Door invoering der diëlectrische middenstoffen heeft hij getracht eene verklaring te geven van de electrodynamische verschijnselen, zonder een onmiddellijke werking op een afstand aan te nemen. In plaats van krachten, die op aanzienlijke afstanden hun werking doen gelden, meende hij, dat de voortplanting van moleculaire bewegingen even goed als oorzaak der genoemde verschijnselen kan gesteld worden. Deze theorie heeft echter een groot aantal hulp-hypothesen noodig omtrent de samenstelling van den ether en andere stoffen; zoodat zij, in plaats van eenvoudiger, samengestelder wordt dan de andere theorie. HELMHOLTZ [2]) heeft uitvoerig alle eigenschappen nagegaan, die aan den ether moeten toegeschreven worden voor de consequente doorvoering van MAXWELL's beschouwingen. Hoewel nu, naar de meening van HELMHOLTZ, die theorie uit een wiskundig oogpunt zeer fraai is, gelooven wij toch, dat de theoriën, die tot uitgangspunt een onmiddellijke werking op een afstand hebben, de voorkeur verdienen, dewijl zij minder vaag zijn. Iets onduidelijks blijft er in de beschouwingen van MAXWELL over; zijne denkbeelden zijn niet scherp omschreven; en dit ligt o. a. ook daaraan, dat men nog geheel onbekend is met de moleculaire wer-

---

[1]) HELMHOLTZ, *Borchardt's Journal*, Band 72.

[2]) *Monatsberichte der Akad. zu Berlin*, Sitz. v. 18 April 1872.

kingen. De diëlectrische polarisatie nu, die zulk een grooten steun geeft aan de nieuwe denkbeelden over de lichtverschijnselen, is volstrekt niet in strijd met de theorie van de werking op een afstand, die wij verder zullen aannemen.

2.

Zoolang de waarneming der niet-gesloten stroomen ons in het onzekere laat omtrent de onderlinge werking van twee stroom-elementen, is men gedwongen zijn toevlucht te nemen tot hypothesen. Indien men aanneemt, dat in elk stroomelement een groot aantal electrische deeltjes in beweging zijn, is het duidelijk, dat, indien de kracht bekend ware, die tusschen twee zulke deeltjes werkt, daaruit de electro-dynamische en inductie-werkingen kunnen worden afgeleid. W. Weber heeft het eerst eene formule voor dergelijke krachten gegeven, in den vorm

$$R = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - 2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right\}, \quad . \; . \; . \; (4)$$

waarin e en e' de electrische dichtheden der deeltjes zijn, r hun afstand, c dezelfde standvastige is, die in formule (1) voorkomt, en $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ den component der relatieve snelheid volgens r voorstelt. Deze kracht kan uit de volgende potentiaal-functie worden afgeleid, met behulp van het beginsel der energie,

$$V = \frac{ee'}{r}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; ; \; (5)$$

Men heeft namelijk te voldoen aan de voorwaarde

$$R\frac{dr}{dt} = -\frac{dV}{dt},$$

of

$$R\frac{dr}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial r}\frac{dr}{dt} - \frac{\partial V}{\partial\left(\frac{dr}{dt}\right)}\frac{d^2r}{dt^2},$$

waaruit de vergelijking (4) dadelijk volgt. Men kan deze ook in de gedaante brengen

$$R = \frac{ee'}{r^2}\left\{1 + \frac{1}{2c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right\} + \frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{dt}\right) \quad . \; . \; . \; (6)$$

In deze uitdrukking is de hypothese van Ampère opgesloten, dat de werking alleen plaats grijpt volgens de lijn, die de elementen vereenigt. Uit (4) kan nu de formule van Ampère, gelijk wij zien zullen, worden berekend.

Volgen wij bij deze berekening de methode van CLAUSIUS, die hij gevolgd heeft bij de ontwikkeling van zijn nieuw electro-dynamisch beginsel (dat verder besproken zal worden), door te onderstellen, dat in een galvanischen stroom de beide electriciteiten ongelijke snelheden in tegenstelde richting hebben. Men moet dit doen, ten einde te onderzoeken, of de formulen, die men vindt, gelden zoowel bij de unitaire als bij de dualistische opvatting der electrische verschijnselen. Noemen wij de snelheden der positieve en negatieve electriciteit in ds hier u en $-u_1$; in ds' mogen zij u' en $-u'_1$ zijn; terwijl de hoeveelheden van beide soorten, welke de lengte-eenheid bevat h en $-h$, h' en $-h'$ mogen zijn; onderstellen wij bovendien, dat het element ds zich met de snelheid v in een richting door p aangeduid, ten opzichte van ds' verplaatst. Dan is de kracht, welke de hoeveelheid hds op de eenheid van positieve electriciteit in ds' uitoefent,

$$\frac{hds}{r^2}\left\{1-\frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-2r\frac{d^2r}{dt^2}\right]\right.,$$

waarin de volgende substitutiën moeten gedaan worden

$$\frac{dr}{dt}=v\frac{\partial r}{\partial p}+u\frac{\partial r}{\partial s}+u'\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=v^2\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2+u^2\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2+u'^2\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2+2uv\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial s}+$$
$$+2u'v\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial s'}+2uu'\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2}=v^2\frac{\partial^2 r}{\partial p^2}+u^2\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}+u'^2\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}+2uv\frac{\partial^2 r}{\partial p\,\partial s}+$$
$$+2u'v\frac{\partial^2 r}{\partial p\,\partial s'}+2uu'\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{hds}{r^2}\left\{1-\frac{1}{2c^2}\left[u^2\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\}+u'^2\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2}\right\}+\right.\right.$$
$$+v^2\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2-2r\frac{\partial^2 r}{\partial p^2}\right\}+2uu'\left\{\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right\}+$$
$$+2uv\left\{\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial s}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial p\,\partial s}\right\}+2u'v\left\{\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial s'}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial p\,\partial s'}\right\}-$$
$$\left.\left.-2r\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial p}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial u'}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial s'}\right\}\right]\right\}.$$

Om de werking te bepalen van de negatieve electriciteit in ds op diezelfde positieve eenheid van electriciteit, moet in deze formule h in $-h$ en u in $-u_1$ veranderd worden. Door optelling van beide uitdrukkingen wordt voor de geheele werking van ds op het gegeven punt gevonden

$$-\frac{i\,ds}{2c^2r^2}\left[(u-u_1)\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\}+2u'\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}\right)+\right.$$
$$\left.+2v\left(\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial s}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial p\partial s}\right)\right]+\frac{ds}{c^2r}\frac{di}{dt}\frac{\partial r}{\partial s}, \quad \ldots\ldots (7)$$

indien $h(u+u_1)$, die de intensiteit van den stroom beteekent, met i wordt aangeduid. Wordt deze uitdrukking met $h'ds'$ vermenigvuldigd, dan verkrijgt men de kracht, welke het element ds uitwerkt op de hoeveelheid positieve electriciteit, welke in ds' begrepen is. Vervangt men vervolgens h' door $-h'$ en u' door $-u'_1$, dan vindt men na optelling der beide formulen de electro-dynamische werking der beide elementen, in den vorm

$$\frac{-ii'\,ds\,ds'}{c^2r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}\right), \quad \ldots\ldots (8)$$

zijnde i' de intensiteit van den stroom in ds'. Deze formule stemt met (2) overeen, want het is duidelijk, dat

$$Cos\,E=-r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}-\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}.$$

Het verschil der krachten, welke de positieve en negatieve electriciteit in ds' ondervinden, gedeeld door h' en vermenigvuldigd met $\frac{\partial r}{\partial s'}$, leert ons de electromotorische kracht der inductie kennen, die in het element ds' wordt opgewekt. Uit (7) vindt men

$$\frac{-i\,ds\,ds'}{c^2r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\left[(u-u_1)\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\}+\right.$$
$$+(u'-u'_1)\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2-2r\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'}\right\}+$$
$$\left.+2v\left\{\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial p}-2r\frac{\partial^2 r}{\partial p\partial s}\right\}\right]+\frac{2\,ds\,ds'}{c^2r}\frac{di}{dt}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} \ldots (9)$$

Uit deze uitkomsten kan men de gevolgtrekking maken, dat het voor de afleiding der electro-dynamische werking op hetzelfde neerkomt, of men de unitaire dan wel de dualistische beschouwingswijze volgt;

maar dat dit voor de inductie-verschijnselen niet het geval is. Want bij gesloten stroomen kan uit (9) alleen dan een uitdrukking worden afgeleid, die met de waarnemingen in harmonie is, wanneer ondersteld wordt, dat $u = u_1$ en $u' = u'_1$. Men kan toch uit bovenstaande formule de inductie-kracht berekenen, door een stroomgeleider S op het element van een anderen lineairen geleider voortgebracht, en men zal vinden

$$\frac{-ds'}{c^2}\int_0^s \frac{ids}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}\left[(u-u_1)\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\} + \right.$$

$$\left. + (u'-u'_1)\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)\frac{\partial r}{\partial s'} - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'}\right\}\right],$$

in de onderstelling, dat $v = 0$ is, en dat i met den tijd niet verandert. Zij nu de geleider S gesloten, dan wordt die formule

$$\frac{-ds'}{c^2}\int \frac{ids}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s'}(u-u_1)\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\}; \quad \ldots (10)$$

en deze integraal, over den geleider genomen, verdwijnt alleen in het bijzondere geval, dat $u = u_1$. Bij de unitaire theorie zou dus een onveranderlijke stroom in een onbewegelijken geleider naar de hypothese van Weber een stroom induceeren in een naburigen geleiddraad, hetgeen nimmer waargenomen is.

De mogelijkheid bestaat echter, dat de intensiteit van dezen inductie-stroom bij alle proefnemingen zoo klein is, dat in werkelijkheid het onderscheid tusschen de theorie en de waarnemingen verdwijnt. Zöllner is deze meening toegedaan [1]). En inderdaad zou men oppervlakkig meenen, dat dit gemakkelijk te bewijzen is. Stellen wij $u_1 = 0$, d. i. nemen wij aan, dat de negatieve electriciteit onveranderlijk met de moleculen verbonden zij; en vergelijken wij de kracht

$$\frac{-ids\,ds'}{c^2 r^2}\,u\,\frac{\partial r}{\partial s'}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\} \quad \ldots\ldots (11)$$

met de electromotorische kracht der inductie, welke door de beweging van den geleider opgewekt wordt, bij de onderstelling, dat de intensiteit i standvastig is, en dat de beweging plaats grijpt in de richting van ds; met de kracht dus

$$\frac{-2ids\,ds'}{c^2 r^2}\,v\,\frac{\partial r}{\partial s'}\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\}.$$

---

[1]) *Poggend. Annal.*, Band. 160.

Deze beide uitdrukkingen staan tot elkaar in verhouding van $u : 2v$. Wanneer men nu gebruik maken mag van de bepaling der snelheid van de electriciteit in vochtige geleiders door WEBER en KOHLRAUSCH; en besluiten mag, zooals deze geleerden deden, dat die bepaling ook van toepassing is op metalen geleiders; dan volgt uit de meegedeelde verhouding, dat de inductie, welke door een onveranderlijken stroom op een rustenden geleider uitgeoefend wordt, verwaarloosd kan worden. WEBER en KOHLRAUSCH vonden namelijk voor de snelheid der electriciteit in een vochtigen geleider van 1 □ m. m. in doorsnede bij een stroom, welker intensiteit in het electrolytische maatsysteem $= 1$ is, de waarde van $\frac{1}{4}$ m. m. in de seconde. Bij grootere doorsnede werd de snelheid nog kleiner bevonden. Dewijl bij alle inductie-proeven v zeer veel grooter is dan $\frac{1}{4}$ m. m., moet dus $\frac{u}{2v}$ altijd een zeer kleine breuk zijn.

ZÖLLNER heeft in de genoemde verhandeling deze uitkomst op vrij wat omslachtiger wijze verkregen, maar die, gelooven wij, aan tegenwerpingen onderworpen is.

De kracht, welke het element ds, van een onveranderlijken stroom in een rustenden geleider, op de eenheid van positieve electriciteit uitoefent, is

$$\frac{-i\,ds}{2c^2r^2}\,u\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 - 2r\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right\},$$

of

$$\frac{h\,ds}{2c^2}\,u^2\,\frac{\partial\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2\right]}{\partial r}.$$

Maar dewijl

$$\frac{1}{4r}\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 = \left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)^2,$$

kan men ook schrijven

$$\frac{2h\,ds}{c^2}\,u^2\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)^2\right].$$

Uit deze formule volgt, dat de kracht, volgens de x-as door een gesloten stroom uitgeoefend, aldus kan voorgesteld worden

$$X = \frac{2h}{c^2}\,u^2\,\frac{\partial}{\partial x}\int\left(\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial s}\right)^2 ds \;\ldots\ldots\; (12)$$

De bepaling dezer kracht hangt volgens ZÖLLNER uitsluitend af van de waarde van den coëfficient

$$\frac{2h}{c^2}u^2;$$

terwijl hij voor het differentiaal-quotient van de integraal een willekeurig getal aanneemt, voorloopig tusschen 1 en 100 gelegen, zonder een enkel woord mede te deelen over de beteekenis van dit getal. Nu is dit differentiaal-quotient een vrij samengestelde functie van de afmetingen van den geleider en den afstand zijner verschillende elementen tot het gegeven punt; eene functie dus, van welker waarde in verschillende omstandigheden men à priori niets zeggen kan. Maar wat erger is, de coefficiënt is eenvoudig een zekere hoeveelheid electriciteit, en als zoodanig niet te vergelijken met electrostatische krachten. De grootheid c toch kan opgevat worden als een snelheid, die volgens de onderzoekingen van WEBER en anderen nagenoeg overeenkomt met die van het licht; terwijl $2c^2$ de tweede macht voorstelt van de snelheid, welke de electrische deeltjes zouden moeten hebben, opdat de electrostatische kracht door de electrodynamische wordt opgeheven. Ook is h niet, zooals ZÖLLNER meedeelt, de hoeveelheid electriciteit, die met de snelheid u in de seconde door den geleider stroomt, maar die, welke er met de snelheid van 1 m. m. door heen zou gaan. De integratie is echter gemakkelijk uit te voeren over een cirkelvormigen geleider, gelegen in een vlak, loodrecht op de x-as. Zij geeft tot uitkomst

$$\chi = \frac{\pi h r_0}{2c^2 R^2} u^2 \, Sin^2 \Phi \, . \, Cos \Phi, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

als r_0 den straal van den cirkel beteekent, R den afstand van het middelpunt tot het electrische deeltje, Φ den hoek, dien de lijn R vormt met de x-as; terwijl ondersteld wordt, dat r_0 eene zeer kleine grootheid is met betrekking tot R. Indien in het middelpunt zich de eenheid van electriciteit bevond, dan zou de statische werking tusschen de beide punten worden uitgedrukt door de formule

$$\chi' = \frac{1}{R^2} Cos \Phi.$$

De verhouding der beide krachten is dus

$$1 : \frac{\pi h r_0}{2c^2} u^2 \, Sin^2 \Phi,$$

zijnde eene betrekking tusschen twee electrische heeveelheden. Brengt men hierin de waarden van h, u en c over, welke door WEBER en KOHLRAUSCH in een bijzonder geval (zie de aangehaalde ver-

handeling van ZÖLLNER) afgeleid zijn; dan ziet men, dat zoolang r_0 niet zeer groot is, de kracht χ eene geringe waarde heeft, bij χ' vergeleken. Neemt men b. v. $r_0 = 1$ m. m., dan vindt men voor den coefficient van $Sin^2 \phi$ in bovenstaande verhouding de waarde

0,000 000 000 538.

Zonder nu te veel te hechten aan de opgegeven waarden van WEBER en KOHLRAUSCH, kan men toch, dunkt ons, uit bovenstaande berekeningen het besluit trekken, dat het beginsel van WEBER niet noodzakelijk in strijd moet wezen met de unitaire theorie der electriciteit, omdat men bij proeven geene inductie-werkingen van standvastige stroomen opmerkt. Dat c een zeer groot getal is in vergelijking van u moet in allen gevalle worden toegestemd; en daar deze breuk $\frac{u}{c}$ in de tweede macht voorkomt, is hierin een voldoenden grond gelegen, om de besproken werking als zeer klein te beschouwen; te meer, omdat, wanneer u grooter geschat wordt, de hoeveelheid electrische deeltjes, welke zich bewegen, des te geringer moet zijn.

Toch heeft CLAUSIUS de gevolgtrekking van ZÖLLNER weersproken [1]). In de eerste plaats merkte deze geleerde op, dat de bepaling van de snelheid der electriciteit in een electrolyt slechts betrekking heeft op de gemiddelde snelheid van alle moleculen, in de onderstelling, dat alle deeltjes, welke ontleed worden, zich bewegen. In de onderstelling echter, dat slechts betrekkelijk weinige moleculen zich met de electriciteit voortbewegen, moet men de snelheid grooter stellen. Daar echter CLAUSIUS erkent, dat die snelheid zeer klein is met betrekking tot c, en zijne hypothese even onzeker en nog onbepaalder is dan die van WEBER, gelooven wij, dat dit bezwaar geenszins voldoende is, om het beginsel van laatstgenoemden te verwerpen.

Ten tweede maakte CLAUSIUS er opmerkzaam op, dat de kracht, welke in formule (13) aangegeven is, evenredig is met den omtrek van den cirkelvormigen geleider. Wanneer men nu in aanmerking neemt, zeide CLAUSIUS, dat de som der omtrekken van een aantal kleine cirkels, in een grooteren beschreven, veel aanzienlijker kan zijn dan de omtrek van laatstgenoemden, moeten de moleculairstroomen in een magneet, zelfs bij zeer geringe snelheid der electriciteit, eene verbazend groote werking op een afstand geven. Deze opmerking is zeker in hooge mate scherpzinnig. De theorie van

[1]) *Annalen der Physik und Chemie.* WIEDEMANN. Band II, Heft I.

Ampère, welke de werkingen van een magneet terugbrengt tot die van electrische bewegingen in of om de moleculen van een lichaam, heeft onmiskenbaar groote waarde, omdat zij een algemeen denkbeeld geeft, hoe magnetische en electrische verschijnselen met elkaar in verband staan. Wanneer men echter verder gaat, en nauwkeurig vaststelt, hoe die bewegingen plaats hebben, welke natuurlijk af zullen hangen van de bewegingen der moleculen zelve, van electrische en moleculaire krachten, welke laatste nog geheel onbekend zijn; wanneer men zich verder een bepaald denkbeeld vormt, hoe dit verbazend ingewikkelde samenstel naar buiten zal werken; dan handelt men toch wel een weinig voorbarig. Geeft men dus al toe, dat de hypothese van Ampère der voortdurende moleculair-stroomen, welke door uitwendige krachten eene verandering van richting kunnen ondergaan, zeer aannemelijk is; zoo moet men zeker toegeven, dat een wiskundig onderzoek naar den aard dier bewegingen en hare werkingen nog geheel onmogelijk is.

3.

Behalve het medegedeelde bezwaar tegen de wet van Weber zijn er nog vele anderen gemaakt, van welke de voornaamsten met een enkel woord besproken zullen worden.

De bewering van Helmholtz, dat men bij verschillende toepassingen van Weber's formule tot uitkomsten geraakt, die met het beginsel der energie in strijd zijn, is door Weber zelf uitvoerig weerlegd [1]).

In eene verhandeling over de bewegings-vergelijkingen der electriciteit in rustende geleiders [2]), bevond Helmholtz, dat het evenwicht der electriciteit in zulk een geleider, bij aanneming der genoemde wet, labiel zou wezen.

Hieromtrent heeft C. Neumann [3]) uitvoerige beschouwingen gegeven, waarin hij aantoont, dat bij de afleiding der bewegings-vergelijkingen een aantal onderstellingen gemaakt worden, die even hypothetisch zijn als de wet van Weber zelf, en die daarom even goed als deze de oorzaak kunnen wezen van de onwaarschijnlijke uitkomst, welke Helmholtz verkreeg.

---

1) *Das Princip von der Erh. der Energie, Abh. der K. Sachs. Geselschaft der Wiss.*, Band 10.

2) *Borchardt's Journal*, Band 72.

3) *Poggend. Annal.*, Band 155.

NEUMANN komt dan ook tot de gevolgtrekking, „Wil men voor de electrostatische en electrodynamische verschijnselen eene theorie hebben, die al hare beschouwingen aan een gemeenschappelijken bron ontleent, en die niet met de waarnemingen in strijd is, zoo schijnt de theorie van WEBER de eenige te zijn, die aan deze eischen voldoet."

Waar het hier vooral op aankomt, is m. i. hetgeen WEBER zoo nadrukkelijk gezegd heeft, dat zijne wet alleen van toepassing is op eindige afstanden, en evenmin als de wet der algemeene aantrekkingskracht van NEWTON geldig is voor moleculaire afstanden. Bij de bewegings-vergelijkingen der electriciteit in een geleidend lichaam, zoowel bij die van KIRCHHOFF als bij die van HELMHOLTZ, zijn uit den aard der zaak de moleculaire krachten verwaarloosd; en daarom, dunkt ons, kunnen die vergelijkingen geen geldig bewijs opleveren voor de onjuistheid der formule van WEBER.

Ook WAND [1]) heeft bewegings-vergelijkingen voor de electriciteit opgesteld, en meent bewezen te hebben, dat als men de theorie van WEBER daaraan ten grondslag legt, uit den evenwichtstoestand willekeurige electromotorische krachten kunnen ontstaan. Daarom, meende hij, kan die theorie onmogelijk een natuurwet doen kennen. Vooreerst echter wordt in de genoemde verhandeling (*Pogg.* t. a. p. pag. 97) beweerd, dat bij de onderstelling, volgens welke de negatieve electriciteit zich met gelijke maar tegengestelde snelheid beweegt als de positieve, $\xi'' + x' = 0$. Maar ξ'' en x'' zijn versnellingen, en deze behoeven geenszins gelijk te wezen. (Vergelijk de Verhandeling van NEUMANN, *Pogg.* 155, pag. 224, noot.) Ten tweede verkrijgt WAND op dezelfde bladz. de bewegings-vergelijking

$$x''_1 - 4A^2\Sigma m^2\left(\frac{d\sqrt{r}}{dx_1}\frac{d\sqrt{r}}{dx_2}x''_2 + \frac{d\sqrt{r}}{dx_1}\frac{d\sqrt{r}}{dy_2}y''_2 + \frac{d\sqrt{r}}{dx_1}\frac{d\sqrt{r}}{dz_2}z''_2\right) = 0,$$

waarin de sommatie genomen wordt over alle punten, behalve het eerste. Neemt men voor een oogenblik aan, dat er twee lineaire stroomen zijn, dan bevat die formule niet alleen de werking van den eenen geleider op den anderen, maar ook die der electriciteitsdeeltjes van denzelfden stroom. Hierbij komen weer moleculaire krachten in het spel, welke in de formule verwaarloosd zijn; en daarom kunnen uitkomsten, aan die formule ontleend, de uitspraak des schrijvers niet rechtvaardigen.

---

1) *Poggend. Annal.*, Band 159.

In het jaar 1875 heeft CLAUSIUS [1]) een nieuw beginsel der electrodynamica opgesteld, omdat ook naar zijne overtuiging het beginsel van WEBER geene juiste verklaring van de feiten geeft. De voornaamste redenen, welke deze bestrijder van WEBER voor zijne meening bijbracht, behalve de reeds medegedeelde, zijn de volgende.

1°. herinnerde hij met een enkel woord aan de bezwaren door HELMHOLTZ geopperd;

2°. voerde hij aan, dat het onnoodig is om te onderstellen, dat de kracht, die twee electriciteitsdeeltjes op elkaar uitoefenen, volgens hunne verbindingslijn gericht is; er kunnen ook, zoo meende hij, krachten zijn in andere richtingen;

3°. meende CLAUSIUS, dat wanneer als oorzaak der electrodynamische werkingen een middenstof worde aangenomen, in welke de electrische deeltjes zich bewegen, niet alleen hunne betrekkelijke, maar ook de volstrekte snelheden in rekening moeten worden gebracht, en dus ook in de grondformule moeten voorkomen.

Uit het eerste der medegedeelde punten moet de gevolgtrekking niet worden gemaakt, dat CLAUSIUS zou instemmen met het oorspronkelijk oordeel van HELMHOLTZ, naar hetwelk het beginsel van WEBER in strijd zou wezen met dat der energie. Hij zegt zelfs uitdrukkelijk, dat het bestaan eener potentiaal genoegzaam is, om de overeenstemming der beide beginsels duidelijk te maken. Uit zijne woorden valt echter op te maken, dat hij met de overige bezwaren van HELMHOLTZ althans ten deele instemt. De voornaamste daarvan is besproken, en wij hebben gezien, dat de onjuistheid van het Weber'sche beginsel er niet noodzakelijk uit behoeft te volgen.

Het tweede der aangevoerde bezwaren telt, dunkt ons, al zeer weinig. Wij zagen in het begin, dat men genoodzaakt is, om de eene of andere onderstelling te maken. Hetzij men nu dadelijk de onderstelling invoert, dat alle krachten in de verbindingslijn der deeltjes werken, hetzij men, als CLAUSIUS, eene formule opstelt, uit welke volgt, dat twee elementen in elkaars verlengde liggende, niet op elkaar inwerken, is in beginsel volkomen hetzelfde; de eene hypothese omvat geen grooter aantal feiten dan de andere.

De onder n°. 3 gerangschikte bedenking van CLAUSIUS is wel de gewichtigste. Inderdaad is het waar, dat indien een middenstof als oorzaak der electrische bewegingen beschouwd worde, de volstrekte snelheden (eigenlijk de betrekkelijke snelheden der deeltjes ten opzichte

[1]) *Poggend. Annal.*, Band 156.

van de middenstof) in rekening dienen te worden gebracht. Zonder nu in het minst de mogelijkheid of zelfs de waarschijnlijkheid van zulk eene beschouwing te willen betwisten, willen wij er toch op wijzen, dat dan ook de bewegingen in die middenstof zelve niet verwaarloosd mogen worden; men vervalt dan echter weer in hetzelfde bezwaar, dat aangaande de theorie van MAXWELL geopperd is. Het wiskundig onderzoek namelijk der bewegingen in een middenstof, wier natuur ons onbekend is, vordert vele onderstellingen omtrent de moleculaire samenstelling dier stof, en zou voorzeker tot groote moeilijkheden aanleiding geven.

Bij de opstelling van zijn beginsel, heeft WEBER tot uitgangspunt genomen een rechtstreeksche werking op een afstand. De vraag is nu, of die theorie, zonder een middenstof te hulp te roepen, de feiten op dezelfde wijze kan verklaren, als NEWTON's theorie der algemeene aantrekkingskracht rekenschap geeft van de bewegingen der hemellichamen. Laat men de middenstof buiten rekening, dan vervalt de noodzakelijkheid, om volstrekte snelheden in de beschouwing op te nemen.

Even goed als men zich echter kan voorstellen, dat de Newton'sche aantrekking misschien eenmaal teruggebracht kan worden tot bewegings-verschijnselen, die in den ether worden voortgeplant, blijft dit ook mogelijk voor de electrische werkingen. Dan zouden de volstrekte snelheden der electrische deeltjes in verband met de bewegingen in den ether in de plaats moeten komen van de betrekkelijke snelheden van eerstgenoemden.

CLAUSIUS heeft wel eene formule gegeven, in welke de volstrekte snelheden voorkomen, en waaruit de electrodynamische en inductiekrachten van stroomen kunnen afgeleid worden, zonder de beweging der middenstof in rekening te brengen; maar in plaats van deze zou men gemakkelijk een aantal andere formulen kunnen geven. Het beste bewijs daarvoor heeft CLAUSIUS zelf geleverd door twee verschillende uitdrukkingen op te stellen voor de kracht, die tusschen electrische deeltjes werkt. Wel is de laatste ontstaan door eene grootheid uit de eerste weg te laten, maar men moet ze toch als verschillende beginsels beschouwen; want terwijl de krachtcomponenten, die in *Pogg. Annal.*, Band 156 gegeven zijn, voor het stelsel der beide deeltjes op zich zelf, niet voldoen aan het beginsel der energie, maar waarden hebben, die gelijk en tegengesteld zijn; voldoen de componenten, die in *Pogg. Annal.*, Band 157 voorkomen, wel aan het beginsel der energie, niet aan dat, volgens hetwelk de op beide deeltjes werkende krachten even groot moeten wezen.

De eerstgenoemde krachten geven echter voor de werking tusschen twee stroom-elementen eene uitkomst, die ook aan het beginsel der levende kracht voldoet. CLAUSIUS had dit geheele onderzoek niet noodig gehad. Bij lichamen, die zich in een vloeistof bewegen, dus ook in het geval van electrische deeltjes in een middenstof, moet de geheele levende kracht standvastig zijn, niet die van de lichamen op zich zelve. Men heeft bij deze onderstelling, noch ten opzichte der kracht, die tusschen twee electrische moleculen werkt, noch voor die, welke de stroom-elementen op elkaar uitoefenen, met de algemeene beginselen rekening te houden, die met betrekking tot de onderlinge werking der lichamen gelden; men heeft, hetgeen ontbreekt, slechts aan de onbekende middenstof toe te schrijven. CLAUSIUS zelf heeft dit eenigermate in zijne Verhandeling in *Pogg. Annal*, Band 157 toegegeven.

De uitdrukkingen voor de kracht-componenten, met welke twee deeltjes, in welke de hoeveelheden electriciteit e en e' zich bevinden, elkaar aantrekken, zijn volgens CLAUSIUS

$$\left.\begin{aligned}
X &= -ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left(1-\frac{1}{2c^2}vv'\,Cos\,E\right)-\frac{ee'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right),\\
Y &= -ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\left(1-\frac{1}{2c^2}vv'\,Cos\,E\right)-\frac{ee'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dy'}{dt}\right),\\
Z &= -ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\left(1-\frac{1}{2c^2}vv'\,Cos\,E\right)-\frac{ee'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dz'}{dt}\right);
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

in welke v en v' de snelheden der betreffende deeltjes voorstellen, terwijl de overige grootheden dezelfde beteekenis als in de bovenstaande formulen hebben. Deze krachten hebben een potentiaal; want vermenigvuldigt men ze met $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ enz., dan verkrijgt men den negatieven differentiaal naar den tijd genomen van de functie

$$V=\frac{ee'}{r}\left(1+\frac{1}{2c^2}vv'\,Cos\,E\right)\;\ldots\ldots\;(15)$$

Omgekeerd volgen de genoemde krachten niet noodzakelijk uit deze potentiaal, want men heeft dan voor hare bepaling de eenige voorwaarde

$$-\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}-\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}-\frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt}-\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{dx'}{dt}\cdots-\frac{\partial V}{\partial\frac{dx}{dt}}\frac{d^2x}{dt^2}\cdots-$$

$$-\frac{\partial V}{\partial\frac{dy}{dt}}\frac{d^2y}{dt^2}=X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}+Z\frac{dz}{dt}+X'\frac{dx'}{dt}+Y'\frac{dy'}{dt}+Z'\frac{dz'}{dt}.$$

Uit de vergelijkingen (14) heeft Clausius voor den x-component der electrodynamische kracht, die op het element ds van een galvanischen stroom door het element ds' van een anderen stroom wordt uitgeoefend, de uitdrukking afgeleid [1])

$$\xi=\frac{1}{2c^2}\,ii'\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\,Cos\,E-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\,\frac{\partial x'}{\partial s'}\right)ds\,ds'\;\ldots\ldots\;(16)$$

Deze vergelijking is niet af te leiden uit de algemeene vergelijking (3); hetgeen reeds blijkt uit de omstandigheid, dat de krachten, welke op de beide elementen werken, niet gelijk en tegengesteld gericht zijn. Voor gesloten stroomen komt men echter weer tot een uitkomst, die met de waarnemingen overeenstemt. De inductie van een gesloten stroom, in het element van een geleider veroorzaakt, stemt hier, ook bij de onderstelling dat alleen de positieve electriciteit in beweging is, met de waarnemingen overeen.

Dewijl echter volgens bovenstaande beschouwingen, bij invoering der volstrekte snelheden, niet aan het beginsel der levende kracht voldaan behoeft te worden, kan men in de vergelijking (14) in plaats van $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx'}{dt}\right)$ ook schrijven $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right)$, waar ξ weder $=x'-x$; en dan vindt men de formulen, welke Clausius het eerst heeft opgesteld.

In plaats van de krachten X, Y, Z, die op het deeltje (x, y, z) werken, kan men ook de uitdrukkingen nemen

$$X_1=-ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}\left[1-\frac{1}{2c^2}(v^2+vv'\,Cos\,E)\right]-\frac{ee'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right),$$

$$Y_1=-ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}\left[1-\frac{1}{2c^2}(v^2+vv'\,Cos\,E)\right]-\frac{ee'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dt}\right),$$

$$Z_1=-ee'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\left[1-\frac{1}{2c^2}(v^2+vv'\,Cos\,E)\right]-\frac{ee'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dt}\right);$$

[1]) *Annal. der Physik und Chemie, herausgeg. von* Wiedemann, Band I, S. 27.

en men zou weer een ander grondbeginsel hebben, dat, bij dezelfde berekeningen als die van Clausius, voor stroom-elementen uitdrukkingen zou opleveren, die even goed met de waarnemingen overeenkomen. Bij invoering van volstrekte snelheden is dus het vraagstuk omtrent de grondformule der electro-dynamica geheel onbepaald; en de oorzaak daarvan ligt in de verwaarloozing der bewegingen van de middenstof, dat bij die theorie ten grondslag is genomen.

Indien daarentegen alleen de betrekkelijke snelheden der electrische deeltjes in de beschouwing worden toegelaten; dan moet de grondformule aan de eischen voldoen, dat zij niet in strijd is met het beginsel der levende kracht, dat zij voor de electrodynamische werking van stroom-elementen een uitdrukking oplevert, die uit de algemeene vergelijkingen (3) is af te leiden, en dat zij de inductieverschijnselen verklaart. Wij zagen, dat de formule van Weber bij de dualistische theorie der electrische stroomen zeker aan al die eischen voldoet, en waarschijnlijk met de onderstelling, dat alleen de positieve electriciteit in strooming kan geraken, ook wel te vereenigen is. Wij zagen tevens, dat uit den aard der zaak deze formule eene beperkte toepassing heeft, en dat bijv. de bewegingsvergelijking der electriciteit in lichamen er niet met zekerheid uit is af te leiden, omdat daarbij moleculaire krachten in het spel zijn.

4.

Is het dus volgens de vorige beschouwingen zeer aannemelijk, dat de grondformule, behalve den afstand, alleen de betrekkelijke snelheid der electrische punten bevat; zoo is het daarentegen niet noodig, dat alleen de component dier snelheid in de richting der verbindingslijn worde opgenomen.

Stellen wij voor de potentiaal-functie der kracht, die uit den component der betrekkelijke snelheid, loodrecht op de verbindingslijn der deeltjes, ontstaat, de uitdrukking

$$V' = -\frac{ee'}{2c^2 r}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

zijnde $\frac{d\sigma}{dt}$ de bedoelde snelheid; dan heeft men ter bepaling van de krachten R en S, in de richting van r en σ, de eenige voorwaardevergelijking

$$-\frac{ee'}{2c^2 r^2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 \frac{dr}{dt} + \frac{ee'}{c^2 r}\frac{d^2\sigma}{dt^2} = R\frac{dr}{dt} + S\frac{d\sigma}{dt}.$$

Hieruit kunnen natuurlijk R en S zonder nieuwe onderstelling niet berekend worden.

Veranderde r niet met den tijd, dan zou S evenredig zijn met de hoeksversnelling. Laat ons aannemen, dat dit ook bij veranderlijke r het geval is, dan kan men schrijven

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\sigma}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dt}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{d\sigma}{dt}.$$

Dus $$\frac{ee'}{2c^2r^2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\frac{dr}{dt}+\frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dt}\right)\frac{d\sigma}{dt}=R\frac{dr}{dt}+S\frac{d\sigma}{dt}.$$

Nu worde deze vergelijking in de beide volgenden gesplitst

$$R=\frac{ee'}{2c^2r^2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2,$$

$$S=\frac{ee'}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\sigma}{dt}\right).$$

Nemen wij nu de potentiaal-functie V' en de potentiaal van WEBER bij elkaar, dan wordt gevonden

$$V''=\frac{ee'}{r}\left\{1-\frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

of, daar in deze uitdrukking de tweede macht der geheele betrekkelijke snelheid voorkomt,

$$V''=\frac{ee'}{r}\left\{1-\frac{1}{2c^2}\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

of korter uitgedrukt

$$V''=\frac{ee'}{r}\left\{1-\frac{1}{2c^2}U^2\right\}.$$

Dit is de potentiaal-functie, welke RIEMANN uit de krachten heeft afgeleid, die hij als uitgangspunt der electrodynamica heeft genomen. Vereenigt men verder de zooeven aangegeven kracht-componenten R en S met de uitdrukking voor de kracht, welke WEBER aannam, dus met (6); dan vindt men de waarden

$$\left.\begin{aligned}
\frac{X}{ee'}&=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\left\{1+\frac{1}{2c^2}U^2\right\}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right),\\
\frac{Y}{ee'}&=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\left\{1+\frac{1}{2c^2}U^2\right\}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dt}\right),\\
\frac{Z}{ee'}&=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\left\{1+\frac{1}{2c^2}U^2\right\}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dt}\right).
\end{aligned}\right\}\ . \quad (18)$$

Deze zelfde formulen heeft Riemann op andere wijze gevonden; men kan er de electrodynamische werking van twee stroom-elementen door dezelfde berekeningen uit vinden, welke Clausius heeft toegepast (*Annal. herausg. von* Wiedemann, Band 1, Heft 1, S. 14 u. s. w.).

Zonder die vrij wijdloopige berekeningen te herhalen, welke bovendien voor de wet van Weber medegedeeld zijn, geven wij hier alleen de uitkomsten aan. Worden, even als bij onze vroegere herleidingen, i en i' de stroomsterkten, u, u' enz. de snelheden der beide electriciteiten in de elementen der geleiders genoemd, dan wordt in dit geval voor de electrodynamische kracht, werkende tusschen de beide elementen de formule gevonden

$$\frac{-ii'\,ds\,ds'}{c^2}\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,Cos\,E-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s'}-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)\;\ldots\;(19)$$

Verder wordt voor de electromotorische kracht der inductie, welke in het element ds' te voorschijn geroepen wordt, de uitdrukking afgeleid

$$\frac{ds\,ds'}{c^2}\left\{-i(u-u_1)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}+i(u'-u'_1)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s}-2i\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\,\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)+\right.$$

$$\left.+2i\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\,\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial s'}\right)-2i\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{u-u_1}{r}\,Cos\,E\right)-2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{r}Cos\,E\right)\right\},(20)$$

in welke kortheidshalve $\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial s'}$ gezet is, in plaats van $\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{d\xi}{\partial s'}+$ $+\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial\eta}{\partial s'}+\frac{\partial\zeta}{\partial t}\frac{\partial\zeta}{\partial s'}$, even als in de formulen van Clausius.

Het is duidelijk, dat de electrodynamische kracht hier onafhankelijk is van de voorstelling, welke over de beweging der electriciteit in geleiders gemaakt wordt; de inductie-kracht echter niet. Bij de dualistische hypothese zijn de formulen (19) en (20) even goed met de proeven in overeenstemming, als de uitdrukkingen (8) en (9), welke uit de wet van Weber afgeleid zijn; want bij gesloten stroomen verandert de formule (19) in de volgende

$$-\frac{1}{c^2}\,ii'\int\!\!\int\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\,Cos\,E\,ds\,ds',$$

waarin de integratiën over beide geleiders moeten uitgestrekt worden. Voor den y- en z-component verkrijgt men dergelijke uitdrukkingen, en

men ziet, dat de geheele electrodynamische werking hier uit de potentiaalfunctie, welke in formule (1) aangegeven is, berekend kan worden.

Is alleen de induceerende stroom gesloten, dan verandert, bij aanneming der dualistische hypothese, formule (20) in

$$-\frac{2\,ds'}{c^2}\int\left\{i\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\,\Sigma\,\frac{\partial\xi}{\partial t}\,\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{i}{r}\,Cos\,E\right)\right\}ds,$$

daar alle differentiaal-quotienten naar s bij de integratie wegvallen, en $u = u_1$ gesteld is. Zijn daarentegen beide stroomen gesloten, dan wordt de bekende formule

$$-\frac{2}{c^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int\int\frac{i\,Cos\,E}{r}\,ds\,ds'$$

teruggevonden.

De eenige term, die veroorzaakt, dat bij de unitaire hypothese deze uitkomst niet onmiddellijk verkregen wordt, is $-i(u-u_1)\dfrac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}$. Past men echter dezelfde redeneeringen toe, omtrent de snelheid der electriciteit, als die, welke bij het beginsel van WEBER gevolgd zijn, dan ziet men, dat bij lineaire stroomen de invloed van dezen term gering is. Mag men hem verwaarloozen, dan verklaart het beginsel van RIEMANN de verschijnselen even goed als dat van WEBER. Nog eens moge opgemerkt worden, dat indien volstrekte snelheden in de grondformule mogen voorkomen, de moeilijkheid op verschillende manieren uit den weg kan geruimd worden. Het eenvoudigste is, om in de formulen (18) voor de krachts-componenten, welke op het punt (x', y', z') werken, eenvoudig uit U^2 de grootheid $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ weg te laten; bij die, welke op (x, y, z) werken, daarentegen $\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2$ weg te nemen. In het eerste geval heeft men

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+u^2\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+2u\,\frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Men laat dus uit de kracht, welke de positieve electriciteit in ds op het punt (x', y', z') uitoefent, het volgende deel weg

$$-\frac{h\,ds}{2c^2}\,\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\left[\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+u^2\,\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+2u\,\Sigma\,\frac{\partial x}{\partial t}\,\frac{\partial x}{\partial s}\right].$$

Uit die, welke de negatieve uitoefent,

$$\frac{-h\,ds}{2c^2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\left[\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+u_1{}^2\,\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+2\,u_1\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}\right].$$

Samen
$$\frac{-ds}{2c^2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\left[i\,(u-u_1)+i\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}\right].$$

Uit de inductie-kracht kan dus worden weggelaten

$$\frac{-i\,ds\,ds'}{c^2}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}(u-u_1)+2\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}\right\},$$

of
$$\frac{-i\,ds\,ds'}{c^2}\left\{\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial s'}(u-u_1)+2\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r}\,\Sigma\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s}\right)\right\}.$$

De term, die wegvalt, bevat dus juist de dubbezinnige uitdrukking, terwijl de electrodynamische werking niet verandert. Laat men nog een term weg, zooals CLAUSIUS deed, dan verandert ook de uitkomst niet.

De waarde der electrodynamische kracht, welke in formule (19) uit de grondvergelijkingen van RIEMANN is berekend, kan uit de algemeene vergelijkingen van MAXWELL (3) worden afgeleid, wanneer in die vergelijkingen $Q=-\frac{1}{r}$ wordt gesteld. Zij beteekent eene aantrekking, welke bij gegeven afstand evenredig is met den cosinus van den hoek, dien de elementen vormen.

Vormen wij nu voor een stelsel van twee electrische deeltjes de bewegings-vergelijkingen, zooals die uit (18) zijn af te leiden. Noemen wij de massa's dier deeltjes m en m', en stellen wij verder $\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}\right)ee'=\mu$, dan kunnen de zes bewegings-vergelijkingen in de drie volgenden worden samengetrokken

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{d^2\xi}{dt^2}&=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\left\{1+\frac{1}{2c^2}U^2\right\}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right),\\
\frac{1}{\mu}\frac{d^2\eta}{dt^2}&=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\left\{1+\frac{1}{2c^2}U^2\right\}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dt}\right),\\
\frac{1}{\mu}\frac{d^2\zeta}{dt^2}&=-\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\left\{1+\frac{1}{2c^2}U^2\right\}+\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dt}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(21)$$

Worden deze vergelijkingen met $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$ en $\frac{d\zeta}{dt}$ vermenigvuldigd, en daarna opgeteld, dan vindt men

$$\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dt}U^2 = -\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\left\{1+\frac{1}{2c^2}U^2\right\}+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{d\xi}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{d\eta}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dt}\right)+\frac{d\zeta}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\zeta}{dt}\right)\right\}.$$

Het is echter gemakkelijk in te zien, dat voor den tweeden term tusschen $\{\ \}$ in de plaats kan geschreven worden

$$\frac{1}{c^2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}U^2+\frac{1}{2c^2r}\frac{d}{dt}U^2;$$

en dat dus gevonden wordt

$$\frac{1}{2\mu}\frac{d}{dt}U^2 = -\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{2c^2}U^2\right\}.$$

Deze vergelijking kan geïntegreerd worden, en komt, zooals te verwachten was, met het beginsel der energie overeen.

In de tweede plaats vermenigvuldigen wij de eerste der vergelijkingen (21) met η, de tweede met ξ en nemen het verschil der producten; dan ontstaat de vergelijking

$$\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{\mu}{c^2}\left\{\eta\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right)-\xi\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\eta}{dt}\right)\right\}.$$

De integratie naar t, geeft nu

$$\eta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\eta}{dt} = -\frac{\mu}{c^2r}\left(\eta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\eta}{dt}\right)+C,$$

of ook

$$\eta\frac{d\xi}{dt}-\xi\frac{d\eta}{dt} = \frac{C}{1+\frac{\mu}{c^2r}}.$$

Uit twee andere bewegings-vergelijkingen, leidt men op dezelfde wijze af

$$\xi\frac{d\zeta}{dt}-\zeta\frac{d\xi}{dt} = \frac{C_1}{1+\frac{\mu}{c^2r}}.$$

C en C_1 zijn natuurlijk standvastige grootheden, die uit den aanvangstoestand van het stelsel bepaald zouden moeten worden. Uit deze twee integraal-vergelijkingen kan een derde worden afgeleid

$$\zeta \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\zeta}{dt} = \frac{C_2}{1 + \frac{\mu}{c^2 r}}.$$

Worden nu die drie vergelijkingen met ξ, η, ζ vermenigvuldigd, en vervolgens opgeteld, dan vindt men

$$C\xi + C_1 \eta + C_2 \zeta = 0.$$

Aan het beginsel van het behoud der vlakken wordt hier dus ook voldaan, hoewel de krachten niet in de verbindingslijn der deeltjes werken. Het kenmerkend onderscheid tusschen de grondformule van WEBER en die van RIEMANN, is dus alleen dit, dat de eene in de algemeene vergelijkingen (3) de waarde $Q = 0$ en de andere $Q = -\frac{1}{r}$ geeft. Overigens hebben zij gelijke waarde.

Nemen wij nu de vergelijkingen (3) alleen de zeer aannemelijke hypothese aan, dat alle daarin voorkomende krachten omgekeerd evenredig zijn met de tweede macht van den afstand, dan moet daarin $Q = -\frac{p}{r}$ gesteld worden, zijnde p een willekeurig getal. Nu is het niet moeilijk om een grondformule op te stellen, waarin alleen de betrekkelijke snelheden der deeltjes voorkomen, die aan alle verdere eischen voldoet, en die met de pas aangenomen onderstelling omtrent de vergelijkingen (3) in overeenstemming is.

Noemt men namelijk de componenten volgens de assen der kracht, die WEBER heeft opgesteld voor de onderlinge werking van twee electrische punten, X', Y', Z'; evenzoo die, welke RIEMANN aangenomen heeft, X'', Y'', Z''; is verder p een willekeurig getal, en stelt men

$$\left.\begin{aligned} X &= p\,(X'' - X') + X', \\ Y &= p\,(Y'' - Y') + Y', \\ Z &= p\,(Z'' - Z') + Z'; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

dan zijn X, Y, Z de componenten der kracht, die in de vergelijkingen (3) voor Q de waarde $-\frac{p}{r}$ geven. Zij drukken dus de algemeenste grondformule uit, welke aangenomen kan worden in de onderstelling, dat alle krachten, die tusschen electrische deeltjes werken, omgekeerd evenredig aan de tweede machten hunner afstanden zijn. De in (22) voorkomende krachten kunnen herleid worden tot de volgende potentiaal-functie

$$V = \frac{ee'}{r}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[p\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]\right., \quad . \quad . \quad (23)$$

zijnde, even als vroeger, $\frac{dr}{dt}$ de component der betrekkelijke snelheid volgens r en $\frac{d\sigma}{dt}$ de component dier snelheid loodrecht op de vereenigingslijn der punten. Uit de in (22) en (23) voorgestelde wet, kunnen dus de formulen van AMPÈRE, GRASSMANN en anderen als bijzondere gevallen worden afgeleid.

5.

CLAUSIUS [1]) heeft door zuiver wiskundige beschouwingen eene uitdrukking gevonden voor de kracht, welke twee deeltjes, die zich bewegen, op elkaar uitoefenen, in de onderstelling, dat die formule, behalve de betrekkelijke coördinaten, de differentiaal-quotienten naar den tijd van de eerste en tweede orde der coördinaten van de beide deeltjes bevat.

De onbepaalde coefficiënten, welke in die formule voorkomen, werden vervolgens berekend uit de bekende onderlinge werking van gesloten stroomen, en door toepassing van het beginsel der energie. Zoo verkreeg CLAUSIUS formule (14).

Nemen wij echter, overeenkomstig bovenstaande redeneering aan, dat alleen de differentiaal-quotiënten naar den tijd der *betrekkelijke* coördinaten in de formule moeten voorkomen, en stellen wij nu kortheidshalve de snelheden der positieve en negatieve electriciteit in een stroom gelijk en tegengesteld (daar de hypothese van ongelijke snelheden reeds uitvoerig besproken is); dan kunnen wij uit de algemeene formule van CLAUSIUS onze uitdrukkingen (22) afleiden.

De component naar de x-as van de tusschen twee electrische deeltjes werkende kracht (zie CLAUSIUS t. a. p. bladz. 99), neemt volgens onze onderstelling den vorm aan

$$\frac{X}{ee'} = \frac{\xi}{r^3} + B\frac{d\xi}{dt} + B_1\frac{d^2\xi}{dt^2} + B_2\frac{dr}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \xi\left[C\frac{dr}{dt} + C_1\frac{d^2r}{dt^2} + \right.$$

$$\left. + C_2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + C_3\left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}\right], \quad . \quad . \quad (24)$$

waarin B, B_1 enz. onbekende functiën van r zijn, e en e' de electri-

---

[1]) *Borchardt's Journal*, Band. 82.

sche dichtheden, terwijl de overige grootheden dezelfde beteekenis hebben als boven.

Noemen wij weder ds en ds' de elementen der stroomgeleiders, v en v' de snelheid der electriciteit in die geleiders, en nemen wij aan, dat laatstgenoemde zelve zich bewegen; dan schrijve men

$$\frac{d\xi}{dt} = v\frac{\partial\xi}{\partial s} + v'\frac{\partial\xi}{\partial s'} + \frac{\partial\xi}{\partial t},$$

$$\frac{dr}{dt} = v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t},$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} + v'^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s'^2} + 2v\frac{\partial^2\xi}{\partial s\partial t} + 2v'\frac{\partial^2\xi}{\partial s'\partial t} + \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \\ + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{dv'}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial s'}; \text{ enz.}$$

Daardoor neemt formule (24) de gedaante aan

$$\frac{X}{ee'} = \frac{\xi}{r^3} + B\left(v\frac{\partial\xi}{\partial s} + v'\frac{\partial\xi}{\partial s'} + \frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + B_1\left\{v^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2} + v'^2\frac{\partial^2\xi}{\partial s'^2} + \right.$$
$$\left. + 2v\frac{\partial^2\xi}{\partial s\partial t} + 2v'\frac{\partial^2\xi}{\partial s'\partial t} + \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial s} + \frac{dv'}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial s'}\right\} +$$
$$+ B_2\left\{v^2\frac{\partial\xi}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s} + v'^2\frac{\partial\xi}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s'} + vv'\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial\xi}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial s}\right) + \right.$$
$$\left. + v\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + v'\left(\frac{\partial\xi}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right) + \frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial t}\right\} +$$
$$+ \xi\left[C\left(v\frac{\partial r}{\partial s} + v'\frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial r}{\partial t}\right) + v^2\left\{C_1\frac{\partial^2 r}{\partial s^2} + C_2\left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 + C_3\right\} + \right.$$
$$+ v'^2\left\{C_1\frac{\partial^2 r}{\partial s'^2} + C_2\left(\frac{\partial r}{\partial s'}\right)^2 + C_3\right\} + 2vv'\left\{C_1\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial s'} + \right.$$
$$\left. + C_2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} + C_3\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s'}\right\} + 2v\left\{C_1\frac{\partial^2 r}{\partial s\partial t} + C_2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial t} + \right.$$
$$\left. + C_3\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\} + 2v'\left\{C_1\frac{\partial^2 r}{\partial s'\partial t} + C_2\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial r}{\partial t} + C_3\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial s'}\frac{\partial\xi}{\partial t}\right\} +$$
$$\left. + \left\{C_1\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} + C_2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2 + C_3\Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right\} + C_1\left(\frac{dv}{dt}\frac{\partial r}{\partial s} + \frac{dv'}{dt}\frac{\partial r}{\partial s'}\right)\right] \quad (25).$$

$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial t}$ beteekent hierin $\frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial s} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial s} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$; enz.

Moge in het element ds' zich de hoeveelheid $h' ds'$ positieve electriciteit bevinden; dan verkrijgt men de uitdrukking voor de kracht, die deze hoeveelheid op een deeltje positieve electriciteit in ds uitoefent, door de vergelijking (25) met $h' ds'$ te vermenigvuldigen. Verandert men daarna in de verkregen uitdrukking h' in $-h'$ en v' in $-v'$ en telt de uitkomsten op, dan vindt men voor de geheele werking van het stroomelement op het genoemde deeltje

$$\frac{X'}{e} = 2 h' ds' \left\{ B v' \frac{\partial \xi}{\partial s'} + B_1 \left(2 v' \frac{\partial^2 \xi}{\partial s' \partial t} + \frac{d v'}{d t} \frac{\partial \xi}{\partial s'} \right) + \right.$$

$$+ B_2 \left[v v' \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial s} \right) + v' \left(\frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \right] +$$

$$+ \xi \left[C v' \frac{\partial r}{\partial s'} + 2 v v' \left(C_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + C_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + C_3 \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial s'} \right) + \right.$$

$$\left. \left. + 2 v' \left(C_1 \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} + C_2 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t} + C_3 \Sigma \frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + C_1 \frac{d v'}{d t} \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \right\} \quad (26)$$

Stelt men hierin $v = 0$, $\frac{dv'}{dt} = 0$, en alle gedeeltelijke differentiaalquotiënten naar den tijd $= 0$; dan ziet men, dat de werking van het element van een standvastigen stroom in een onbewegelijken geleider op de eenheid van rustende positieve electriciteit aldus kan worden uitgedrukt

$$2 h' ds' v' \left\{ B \frac{\partial \xi}{\partial s'} + \xi C \frac{\partial r}{\partial s'} \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

Daar volgens Clausius een gesloten stroom op een electriciteitsdeeltje, dat in rust is, geene werking uitoefent, moet deze uitdrukking, na integratie over een gesloten geleider, nul geven. Daarvoor moet voldaan worden aan de voorwaarde $C = \frac{dB}{dr}$; want dan verandert (27) in

$$2 h' ds' v' \frac{\partial B \xi}{\partial s'}.$$

Indien een electriciteitsdeeltje ook een gesloten stroom niet om eene as vermag te doen draaien, moet blijkbaar het koppel

$$2 h' ds' v' \left(\eta \frac{\partial B \xi}{\partial s'} - \xi \frac{\partial B \eta}{\partial s'} \right),$$

over een gesloten geleider geïntegreerd, verdwijnen. Dit is in het algemeen alleen mogelijk, indien $B = 0$, en dus ook $C = 0$. Wij gaan nu de vergelijking (26) herleiden.

Vooreerst is

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial \xi}{\partial s'} = r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'}.$$

In de tweede plaats heeft men, indien ondersteld worde, dat de elementen der geleiders, gedurende hunne beweging, steeds evenwijdig blijven aan hunne oorspronkelijke richting,

$$\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial \xi}{\partial t} = r \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} + \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t}.$$

De vergelijking (26) neemt nu de eenvoudiger gedaante aan

$$\frac{X'}{e} = 2 h' ds' \left\{ B_1 \frac{dv'}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial s'} + B_2 \left[vv' \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial s} \right) + \right.\right.$$
$$\left. + v' \left(\frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \right] + \xi \left[2 vv' \left(C_4 \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \right) + \right.$$
$$\left.\left. + 2 v' \left(C_4 \frac{\partial^2 r}{\partial s' \partial t} + C_5 \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t} \right) + C_1 \frac{dv'}{dt} \frac{\partial r}{\partial s_1} \right] \right\};$$

wanneer $\qquad C_1 + r C_3 = C_4,$

en $\qquad C_2 + C_3 = C_5.$

Hiervoor kan men ook schrijven

$$\frac{X'}{e} = 2 h' ds' \left\{ B_1 \frac{dv'}{dt} \frac{\partial \xi}{\partial s'} + B_2 \left[vv' \left(\frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} + \frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial s} \right) + \right.\right.$$
$$\left. + v' \left(\frac{\partial \xi}{\partial s'} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s'} \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \right] + \xi \left[vv' \left(C_6 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s \partial s'} - C_7 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \right) + \right.$$
$$\left.\left. + v' \left(C_6 \frac{\partial^2 (r^2)}{\partial s' \partial t} - C_7 \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial s'} \right) + C_1 \frac{dv'}{dt} \frac{\partial r}{\partial s_1} \right] \right\};$$

indien men neemt

$$\frac{C_4}{r} = C_6,\ 2 \left(\frac{C_4}{r} - C_5 \right) = C_7.$$

Door de volgende substitutiën

$$C_7 = - r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dE}{dr} \right),\quad C_6 - \frac{1}{2r} \frac{dE}{dr} = E_1,\quad E_2 = B_2 - \frac{dE}{dr},$$

verkrijgt men eene dergelijke formule als Clausius (zie de aangehaalde verhandeling, bladz. 106), namelijk

$$2\,h'\,ds'\left\{B_1\frac{dv'}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial s'}+vv'\left[E_1\,\xi\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}+E_2\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s'}+\right.\right.$$

$$\left.+E_2\frac{\partial r}{\partial s'}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial s}+\frac{\partial^2(E\xi)}{\partial s\partial s'}\right]+v'\left[E_1\,\xi\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial t}+E_2\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial\xi}{\partial s}+\right.$$

$$\left.\left.+E_2\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2(E\xi)}{\partial s'\partial t}\right]+C_1\,\xi\frac{dv'}{dt}\frac{\partial r}{\partial s'}\right\}\;\ldots\;(28)$$

Door vergelijking met de formule van AMPÈRE voor twee gesloten geleiders, en door toepassing van de stelling, dat een standvastige gesloten stroom in een onbewegelijken geleider geen invloed uitoefent op de sterkte van een anderen dergelijken stroom, vindt men, volkomen op dezelfde wijze als CLAUSIUS,

$$E_1=\frac{k}{2\,r^3},\quad E_2=-\frac{k}{r^2},$$

waarin k eene standvastige grootheid beteekent.

Deze waarden, in de formule (28) overgebracht, geven

$$2\,h'\,ds'\left\{B_1\frac{dv'}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial s'}+vv'\left[\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial\xi}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}-\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial\xi}+\right.\right.$$

$$\left.+E_2\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\xi}{\partial s}+\frac{\partial^2(E\xi)}{\partial s\partial s'}\right]+v'\left[\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial\xi}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial t}-\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial\xi}+\right.$$

$$\left.\left.+E_2\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial^2(E\xi)}{\partial s'\partial t}\right]+C_1\,\xi\frac{\partial r}{\partial s'}\right\}.$$

Nu worde over den gesloten keten s' geïntegreerd, dan vindt men

$$2\,h'\int\left\{B_1\frac{dv'}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial s'}+vv'\left[\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial\xi}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}-\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial\xi}\right]+\right.$$

$$\left.+v'\left[\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial\xi}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial t}-\frac{k}{2\,r^2}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial\xi}\right]+\tfrac{1}{2}\,C_1\frac{dv'}{dt}\frac{\partial r}{\partial s'}\frac{\partial(r^2)}{\partial\xi}\right\}ds'.$$

Om den component der inductie-kracht te vinden, in de richting van het element ds, verandere men de differentiaal-quotiënten naar ξ in die naar s; dan verdwijnt de coefficiënt van vv' en men houdt over

$$h'\int\left\{\frac{dv'}{dt}\left[B_1\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}+C_1\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial(r^2)}{\partial s'}\right]+\right.$$

$$\left.+v'\left[\frac{k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial t}-\frac{k}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}\right]\right\}ds'.$$

Neemt men nu in de eerste plaats aan, dat twee gesloten geleiders s en s' een onveranderlijken stand ten opzichte van elkaar innemen, maar dat in laatstgenoemde de snelheid der electriciteit aangroeit van 0 tot eene bepaalde waarde v'; dan is de geheele inductie-werking op s gegeven door de formule

$$h'v'\int\int\left\{B_1\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}+C_1\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial(r^2)}{\partial s'}\right\}ds\,ds' \quad . \; . \; . \; (29)$$

Neemt men in de tweede plaats aan, dat de geleider s' van een oneindigen afstand tot den oorspronkelijken stand is gebracht, maar dat v' daarbij standvastig is gebleven; dan vindt men voor de inductie-werking op s de waarde

$$h'v'\int\int\frac{k}{r}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}ds\,ds'; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (30)$$

waarbij men bedenke, dat, volgens de gemaakte onderstelling omtrent de beweging van de geleiders, $\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s\partial s'}$ (de hoek, dien de elementen vormen) onafhankelijk is van den tijd, en dat wegens dezelfde oorzaak de term $\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial^2(r^2)}{\partial s'\partial t}$ bij de integratie verdwijnt. Men weet, dat de uitdrukkingen (29) en (30) aan elkaar gelijk moeten zijn; en daarvoor is noodig (zie Clausius t. a. p.) dat

$$B_1=\frac{k}{r}+G,$$

$$C_1=\frac{dG}{dr},$$

als G eene willekeurige functie van r beteekent.

Wij vonden $\qquad B_2=-\frac{k}{r^2}+\frac{dE}{dr}.$

Indien aan het beginsel der energie voldaan zal zijn, dan moet $X\frac{d\xi}{dt}+Y\frac{d\eta}{dt}+Z\frac{d\zeta}{dt}$ (zie formule 24) een volkomen differentiaal naar den tijd zijn. Het is gemakkelijk in te zien, dat daarvoor noodig is, dat

$$B_2=\frac{dB_1}{dr};$$

dus moet $E=G$ zijn.

Stellen wij nu $E = -\frac{k}{r}(1+p)$, waarin p een willekeurig getal is; dan verkrijgt men achtereenvolgens

$$B_1 = -\frac{pk}{r}; \quad B_2 = \frac{pk}{r^2}; \quad C_6 = E_1 + \frac{1}{2r}\frac{dE}{dr} = \frac{k}{r^3} + \frac{pk}{2r^3};$$

$$C_7 = -r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{dE}{dr}\right) = \frac{3k}{r^3}(1+p); \quad C_4 = \frac{k}{r^2} + \frac{pk}{2r^2}; \quad C_3 = -\frac{pk}{2r^3};$$

$$C_5 = -\frac{k}{2r^3} - \frac{pk}{r^3}; \quad C_2 = -\frac{k}{2r^3} - \frac{pk}{2r^3}; \quad C_1 = \frac{k}{r^2}(1+p).$$

Dit alles overgebracht in vergelijking (24), geeft ons

$$\frac{X}{ee'} = \frac{\xi}{r^3} - pk\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{d\xi}{dt}\right) + \frac{pk\xi}{2r^3}\left[2r\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - \left\{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right\}\right] + \frac{k\xi}{2r^2}\left[2r\frac{d^2r}{dt^2} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right]. \quad (31)$$

Deze formule gaat over in die, welke wij boven (zie vergelijking 22) op geheel andere wijze hebben afgeleid; wanneer in laatstgenoemde voor $\frac{1}{c^2}$ in de plaats worde gesteld k, en p door $-p$ worde vervangen.

De medegedeelde beschouwingen kort samenvattende, komen wij tot de volgende besluiten.

Alleen de werking van gesloten lineaire stroomen op elkander kan door eene geheel bepaalde formule worden voorgesteld; de onderlinge werking van stroom-elementen daarentegen wordt uitgedrukt door de vergelijkingen (3), waarin Q onbepaald is;

bij de hypothese, dat alle krachten omgekeerd evenredig aan het vierkant van den afstand zijn, geven de vergelijkingen (22) den algemeensten vorm van de grondformule der electrische krachten aan, die mogelijk is; wanneer aangenomen wordt, dat in een galvanischen stroom de beide electriciteiten met gelijke maar tegengestelde snelheid zich bewegen, kunnen uit die grondformule alle electro-dynamische en inductie-verschijnselen met zekerheid worden afgeleid;

indien daarentegen aangenomen wordt, dat in een stroom alleen de positieve electriciteit zich beweegt, maken de proeven van Weber en Kohlrausch het waarschijnlijk, dat de bedoelde grondformule

niet in strijd is met de waarnemingen; het tegendeel is in allen gevalle niet bewezen;

laatstgenoemde formule heeft eene beperkte strekking; de bewegings-vergelijkingen der electriciteit in lichamen kunnen uit die formule alleen niet worden afgeleid, omdat daarbij moleculaire krachten in het spel zijn;

eene grondformule, waarin de volstrekte snelheden der deeltjes voorkomen, onderstelt eene middenstof als oorzaak der werking;

pogingen, om uit zulk een formule de electrodynamische en inductie-verschijnselen in *stroom-elementen* af te leiden, zonder de beweging van de ondersteld middenstof in rekening te brengen, zijn uit den aard der zaak onjuist, hoewel zij voor *gesloten stroomen* misschien een goede uitkomst kunnen geven.

KLEINERE MEDEDEELINGEN.

DE VOORTBRENGING VAN KROMMEN DOOR MIDDEL VAN PROJECTIVISCHE KROMMENBUNDELS,

DOOR

DR. P. H. SCHOUTE.

Omdat de uiteenzetting van bovenstaande theorie in het leerboek [1], dat omtrent dit onderwerp gewoonlijk geraadpleegd wordt, door misstellingen en verkeerde redeneeringen bijna geheel onverstaanbaar is; en de beoefenaar der nieuwere meetkunde, die in dit onderwerp doordringen wil, derhalve verplicht is tot de verschillende tijdschriften zijn toevlucht te nemen, die de ontwikkelings-geschiedenis van het onderwerp behelzen; meen ik aan de lezers van het Nieuw Archief voor Wiskunde geen ondienst te doen met de volgende behandeling. Onder den naam van inleiding heb ik die stellingen vooruitgezonden, waarvan de kennis tot het goed verstaan van het volgende onmisbaar mag worden geacht.

INLEIDING.

1. Twee krommen C_m en C_n snijden elkaar in mn punten.

2. Een kromme C_m is bepaald door $\frac{1}{2}m(m+3)$ punten.

3. Een krommenbundel C'_m is bepaald door $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ punten; behalve door deze gaan alle er toe behoorende krommen nog door $m^2-\{\frac{1}{2}m(m+3)-1\}=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ punten, die door de anderen worden bepaald.

---

[1]) *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven, von Dr.* L. CREMONA, *ins Deutsche uebertragen von* M. CURTZE, Greifswald, 1865.

4. Van de $\frac{1}{2}m(m+3)$ punten, die een enkelvoudige kromme C_m bepalen, kan men er niet meer dan $mn-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ op een kromme C_n aannemen. (JACOBI.)

Is x het aantal der op C_n aangenomene, en $\frac{1}{2}m(m+3)-x$ dus het aantal der niet op C_n gelegen punten, en kan men door deze laatsten een kromme C_{m-n} brengen; dan vormt C_n met C_{m-n} samen de verlangde kromme, en is deze niet enkelvoudig; zoodat x dan te groot aangenomen is. Dus is

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-x=\tfrac{1}{2}(m-n)(m-n+3)$$

eene vergelijking, die een waarde oplevert vòor x, waar beneden x moet blijven. Zoo vindt men, dat de grootste waarde, die x hebben mag, $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ is.

Beperkende voorwaarde: $m>n$.

5. Wanneer de $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ punten, die een krommenbundel C'_m bepalen, over twee krommen C_n en C_{m-n} verdeeld zijn, zullen de overige $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ gemeenschappelijke punten (basispunten) ook op C_n en C_{m-n} gelegen zijn.

In dit geval vormen de krommen C_n en C_{m-n} samen een kromme van den bundel, en gaan zij samen door al de basispunten van dezen, derhalve ook door de $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, die door de gegevenen worden bepaald; al de snijpunten van C_n en C_{m-n} met een andere kromme van den bundel zijn dan basispunten van dēzen.

Liggen er van de $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ bepalende basispunten op de kromme C_n een aantal $mn-q$, dan zijn de

Beperkende voorwaarden:

$$\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)-\tfrac{1}{2}(m-n-1)(m-n-2)\geqq q\geqq\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Wanneer het aantal der op C_n gelegen basispunten van den bundel C'_m het getal $mn-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ overtreft, zal C_n volgens stelling 4 tot ieder der krommen van den bundel behooren. Wil men dus, dat de bundel ook enkelvoudige krommen bevat (in welk geval de stelling de meeste uitdrukking verkrijgt), dan moet q ter eene zijde door de ongelijkheid

$$q\geqq\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

beperkt zijn. Maar dan blijft nog de mogelijkheid bestaan, dat het op C_{m-n} gelegen aantal basispunten grooter is dan $m(m-n)-$ $-\frac{1}{2}(m-n-1)(m-n-2)$, in welk geval C_{m-n} tot ieder der krommen

van den bundel behoort; om ook dit uit te sluiten, moet men q laten voldoen aan de ongelijkheid

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-1-(mn-q)\leqq m(m-n)-\tfrac{1}{2}(m-n-1)(m-n-2),$$

waaruit volgt

$$q\leqq\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)-\tfrac{1}{2}(m-n-1)(m-n-2),$$

wat, in vereeniging met het voorgaande, de beide beperkingen van q oplevert.

Geeft men aan q de kleinste waarde, dan valt de tweede voorwaarde, het gaan van een kromme C_{m-n} door de overige bepalende basispunten, weg; en men vindt

6. Wanneer men door $mn-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ van de $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ bepalende basispunten eens krommenbundels C'_m een kromme C_n brengen kan, dan liggen er nog $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ andere basispunten van dien bundel op C_n, die door de eersten worden bepaald; de overige $m(m-n)$ liggen dan op een bepaalde kromme C_{m-n}. (Plücker).

Bovendien is men, wat het eerste deel der stelling betreft, niet genoodzaakt bij een krommenbundel te blijven staan. Veeleer kan men dit deel der voorgaande stelling in den volgenden vorm meer algemeen uitspreken.

7. Alle krommen C_m, die door $mn-\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ vaste punten van een kromme C_n gaan, snijden deze nog in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ vaste punten.

Dit volgt onmiddellijk hieruit, dat al de snijpunten van een dier krommen C_m met C_n op elk der overige krommen C_m moeten liggen; omdat de eerste kromme C_m met elk der overigen een krommenbundel C'_m bepaalt, waarop stelling 6 van toepassing is; op een merkwaardige wijs wordt stelling 4 door het hier gevondene aangevuld.

Beperkende voorwaarde: $m\geqq n$.

Gewoonlijk wordt als beperkende voorwaarde $m>n$ opgegeven. Echter behoeft het geval $m=n$ hier niet uitgesloten te worden; want voor $m=n$ gaat deze stelling in stelling 3 over, en blijft zij dus waarheid bevatten.

Met het oog op het tweede geval van de stelling I van Chasles, die later volgen zal, is het verkieselijk het geval $m=n$ hier op te nemen.

8. Elke kromme C_m, die van de np snijpunten van twee krommen C_n en C_p er

$$np - \tfrac{1}{2}(n+p-m-1)(n+p-m-2)$$

bevat, gaat ook door de anderen. (CAYLEY).

Neemt men $\frac{1}{2}(m-n)(m-n+3)$ willekeurige punten op C_p aan, en brengt men hierdoor een kromme C_{m-n}; neemt men verder $\frac{1}{2}(m-p)(m-p+3)$ willekeurige punten op C_n aan, en brengt men hierdoor een kromme C_{m-p}; neemt men eindelijk nog zooveel snijpunten van C_n en C_p aan, dat het aantal aangenomen punten $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ bedraagt, en beschouwt men deze punten als de basispunten van een krommenbundel C'_m; dan ziet men gemakkelijk in, dat zoowel C_n en C_{m-n} samen, als C_p en C_{m-p} samen, een kromme van dien bundel vormen. Elke kromme van dien bundel gaat dus door al de snijpunten van C_n en C_p; omdat de aangenomen punten, die niet tegelijkertijd op C_n en C_p liggen, echter willekeurig zijn, heeft een kromme van den bedoelden bundel per slot van rekening echter alleen dit kenmerkende, dat zij ondersteld wordt te gaan door

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-1-\left\{\tfrac{1}{2}(m-n)(m-n+3)+\tfrac{1}{2}(m-p)(m-p+3)\right\} =$$
$$= np-\tfrac{1}{2}(n+p-m-1)(n+p-m-2)$$

der snijpunten van C_n en C_p. Hieruit volgt dus de waarheid der stelling, die aan de volgende beperkingen gebonden is.

Beperkende voorwaarden: $m>n$, $m>p$,

$$n+p>m,$$
$$2n+p \geqq m+3,\quad n+2p \geqq m+3.$$

Terwijl de voorwaarden $m>n$ en $m>p$ reeds hieruit volgen, dat men van krommen C_{m-n} en C_{m-p} spreekt, zal het alleen mogelijk zijn $\frac{1}{2}(m-n)(m-n+3)$ willekeurige punten op C_p en $\frac{1}{2}(m-p)(m-p+3)$ willekeurige punten op C_n te vinden, wanneer $n+p>m$ is. Voor $n+p=m$ valt C_{m-n} met C_p en C_{m-p} met C_n samen; terwijl voor $n+p<m$ de krommen C_{m-n} en C_{m-p} de gegevene C_p en C_n respectievelijk bevatten zouden.

Iedere kromme van den boven geconstrueerden bundel heeft nu $np+\frac{1}{2}(m-p)(m-p+3)$ punten met C_n, en evenzoo $np+\frac{1}{2}(m-n)(m-n+3)$ punten met C_p gemeen. Mogen deze krommen C_n of C_p niet bevatten (en dit is natuurlijk weer het geval), dan mogen deze getal-

len respectievelijk niet grooter zijn dan mn en mp. Hieruit leidt men de beide laatste voorwaarden af.

Somtijds vindt men in de plaats van de derde voorwaarde $n+p \geqq m+3$ opgegeven; werkelijk drukt de stelling voor de gevallen $n+p=m+1$ en $n+p=m+2$ niets uit. Evenwel is de boven gegevene voorwaarde met het oog op het volgende (stelling III) verkieselijk.

In anderen vorm en meer uitgebreid luidt dezelfde stelling

9. Liggen er $np - \frac{1}{2}(n+p-m-1)(n+p-m-2)$ van de mp snijpunten van C_m en C_p op C_n, dan liggen op C_n nog $\frac{1}{2}(n+p-m-1)(n+p-m-2)$ andere snijpunten van C_m en C_p; bovendien liggen de $n(m-p)$ niet op C_p gelegen snijpunten van C_m en C_n op een kromme C_{m-p}.

Het eerste deel van deze stelling komt geheel met de voorgaande overeen. Het tweede wordt onmiddellijk uit de voorgaande stelling afgeleid door voor de willekeurig op C_n en C_p aangenomen punten snijpunten van deze krommen met C_m, die niet aan de drie krommen gemeen zijn, te kiezen. Want dan behoort C_m tot den boven geconstrueerden bundel, en maken al de snijpunten van C_m en C_n basispunten van dien bundel uit; zoodat deze punten, omdat de krommen C_p en C_{m-p} samen een kromme van den bundel vormen, voor zoover ze niet op C_p liggen (en deze zijn juist allen in het eerste deel der stelling genoemd), op C_{m-p} te vinden zijn.

Beperkende voorwaarden als bij 8.

Voor $n=p$ vindt men nog

10. Liggen er $n^2 - \frac{1}{2}(2n-m-1)(2n-m-2)$ van de n^2 basispunten eens bundels C'_n op C_m, dan liggen al de basispunten op C_m; bovendien liggen de $n(m-n)$ snijpunten van iedere kromme C_n met C_m, die geen basispunten zijn, op een kromme C_{m-n}, die in het algemeen voor iedere C_n weer een andere is.

Deze stelling vult stelling 4 aan.

Beperkende voorwaarden: $m > n$,

$$2n > m,$$

$$3n \geqq m+3.$$

Hoofdstelling.

De meetkundige plaats van de snijpunten van de overeenkomstige krommen van twee projectivische krommenbundels C'_m en C'_n is een kromme C_{m+n}.

Deze stelling laat zich analytisch zeer gemakkelijk aantoonen; synthetisch wijst men aan, dat iedere lijn de meetkundige plaats in $m+n$ punten snijdt; wat weer hieruit volgt, dat de beide bundels op die lijn projectivische involutien van den m^{den} en n^{den} graad bepalen, en deze $m+n$ groepen hebben met een gemeenschappelijk punt.

Werkstuk.

Gegeven zijnde $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+3)$ punten, gevraagd met behulp van krommenbundels van den m^{den} en n^{den} graad de door deze punten bepaalde C_{m+n} te construeeren.

Theoretische oplossing.

De oplossing van dit vraagstuk wordt geleverd door vier theorema's, waarvan de eerste twee door Chasles, en de laatste twee door de Jonquières gegeven zijn.

Eerste stelling van Chasles (I).

Is men er in geslaagd op een gegeven kromme C_{m+n} de m^2 basispunten van den bundel C'_m te vinden, dan kan men de n^2 basispunten van den anderen bundel C'_n gemakkelijk aangeven, en de projectivische verwantschap tusschen de beide bundels zoo vaststellen, dat de gegevene kromme de meetkundige plaats van de snijpunten der overeenkomstige krommen is.

Geval $m > n$.

Van den bundel C'_m, wiens m^2 basispunten op C_{m+n} gegeven zijn, snijdt ieder individu de kromme C_{m+n} nog in mn punten, die geen basispunten zijn. Het tweede deel van stelling 10 is hier nu van toepassing, omdat de substitutie van $m'+n'$ in de plaats van m en van m' in de plaats van n, na weglating der accenten, het daar behandelde geval met het onderhavige overeenbrengt; en deze substitutie tevens doet zien, dat — zoo als voor de derde eerst door de substitutie $m=n+1$ blijkt — aan de beperkende voorwaarden

voldaan is. Deze mn punten liggen dus op een kromme C_n, die voor iedere kromme C_m weer een andere is. Zoo vindt men bij de krommen

$$C_m,\ D_m,\ E_m,\ \text{enz.}$$

van den bundel C_m een tweede krommengroep

$$C_n,\ D_n,\ E_n,\ \text{enz.}$$

Van deze kan nu bewezen worden, dat zij een krommenbundel vormt, die projectivisch met C'_m is. Eerst mag echter opgemerkt worden, dat iedere kromme C_n door de mn snijpunten van de overeenkomstige kromme C_m met C_{m+n}, die geen basispunten van C'_m zijn, bepaald is; omdat de onderstelling, dat $mn < \frac{1}{2} n(n+3)$ is, tot de vergelijking $2m < n+3$ leidt, en hieraan in dit geval niet te voldoen is, wijl de onderstelling $m = n+1$ hiervan $n < 1$ maakt.

De krommen C_m en D_n vormen samen een kromme van den $m+n^{\text{den}}$ graad E_{m+n}; evenzoo C_n en D_m samen een kromme F_{m+n}; eindelijk bepalen E_{m+n} en F_{m+n} weer een bundel C'_{m+n}. De basispunten van dezen bundel zijn de snijpunten van C_m en C_n, die van D_m en D_n, die van C_m en D_m, en die van C_n en D_n. Alleen van de laatste groep, van de snijpunten van C_n en D_n, is het nog onzeker, of zij op de gegevene kromme C_{m+n} liggen; van de andere basispunten weten wij, dat zij dit doen. Maar het aantal der laatsten is m^2+2mn; wat, zoo als dadelijk blijken zal, niet kleiner kan zijn dan het aantal basispunten, dat den bundel bepaalt, $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+3)-1$. Zoodat de gegevene kromme C_{m+n} tot den bundel C'_{m+n} behoort, en zij door de n^2 snijpunten van C_n en D_n gaat. Waaruit dan weer volgt, dat de n^2 punten, die — buiten de mn punten waardoor C_n bepaald werd om — aan C_n en C_{m+n} gemeen zijn, ook op D_n liggen. En zoo men in bovenstaande redeneering D_n door een andere kromme E_n, F_n, enz., van de tweede krommengroep vervangt, vindt men dat deze n^2 snijpunten van C_n en C_{m+n} aan alle krommen van die groep gemeen zijn, en deze krommen dus een bundel vormen, die met den bundel C'_m projectivisch is, daar met één kromme C_m één kromme C_n overeenkomt.

Voor we verder gaan, moet eerst blijken, dat aan de ongelijkheid boven bedoeld

$$m^2+2mn < \tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+3)-1$$

niet voldaan kan worden. Door beide leden van $(m+n)^2$ af te trekken, gaat zij over in

$$n^2 > \tfrac{1}{2}(m+n-1)(m+n-2).$$

En dit zal zeker een onmogelijkheid insluiten, wanneer de vergelijking, die door substitutie van $n+1$ voor m ontstaat, zulks doet. Wat, zoo als uit deze vergelijking

$$n > 2n - 1$$

gemakkelijk blijkt, werkelijk het geval is.

Langs bovenstaanden weg is dus een krommenbundel C'_n gevonden, die met C'_m projectivisch is, en daarmee bovendien in zulk een betrekking staat, dat de meetkundige plaats van de snijpunten der overeenkomstige krommen van beide bundels de gegevene kromme C_{m+n} is.

Geval $m \leqq n$.

Even als boven heeft ook hier iedere kromme C_m met C_{m+n} de gegevene mn punten gemeen, die geen basispunten van den krommenbundel C'_m zijn. Maar deze punten bepalen hier geen kromme C_n. Want vooreerst is hier mn somtijds kleiner dan $\frac{1}{2}n(n+3)$. Maar wat meer zegt, in plaats van stelling 10 geldt hier stelling 7, met verwisseling van m en n; en uit deze blijkt, dat iedere kromme C_n, die door $mn - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ van de mn punten gaat, C_m nog in $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ vaste punten snijdt. Hier moet dus een andere weg ingeslagen worden.

Men neemt nu op C_{m+n} zooveel punten willekeurig aan, als men ter bepaling der kromme C_n te kort komt; dit aantal bedraagt dus

$$\frac{1}{2}n(n+3) - \left\{mn - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2).$$

Door deze punten (die ik gemakshalve de puntengroep a noemen zal) en door $mn - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ van de mn punten, die, gemeen aan C_m en C_{m+n}, geen basispunten van C'_m zijn, brengt men nu een kromme C_n; evenzoo door de puntengroep a en door $mn - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ van de mn punten, die, gemeen aan D_m en C_{m+n}, geen basispunten van C_m zijn, een kromme D_n, enz. Zoo vindt men bij de krommen

$$C_m,\ D_m,\ E_m,\ \text{enz.}$$

van den bundel C'_m een tweede krommengroep

$$C_n,\ D_n,\ E_n,\ \text{enz.};$$

die nu bewezen moet worden een bundel te zijn projectivisch met C'_m.

De krommen C_m en D_n vormen samen weer een kromme E_{m+n}; de krommen C_n en D_m een kromme F_{m+n}; en de krommen E_{m+n} en F_{m+n} bepalen weer een bundel C'_{m+n}. De basispunten van de-

zen bundel zijn als boven de snijpunten van C_m en C_n, die van D_m en D_n, die van C_m en D_m, en die van C_n en D_n. Nu liggen er op C_{m+n}

van de snijpunten van C_m en C_n . . . . $mn - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$,
van de snijpunten van D_m „ D_n . . . . $mn - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$,
van de snijpunten van C_m „ D_m . . . . m^2,
en van de snijpunten van C_n „ D_n . . . $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$;

in het geheel dus

$$m^2 + 2mn - (m-1)(m-2) + \tfrac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(n+m)(n+m+3) - 1$$

punten. Omdat dit getal juist het aantal bepalende basispunten van den bundel C'_{m+n} voorstelt, moet C_{m+n} tot den bundel behooren, en dus door alle basispunten gaan. Vooreerst is hiermee aangetoond, dat de kromme C_n, — die door $mn - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ van de mn snijpunten van C_m en C_{m+n}, die geen basispunten zijn van C'_m, gaat, en C_m, volgens stelling 7, nog in $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ vaste punten snijdt, — deze mn punten met C_m gemeen heeft [1]). Maar de hoofdzaak is weer, dat de n^2 snijpunten van C_n en D_n allen op C_{m+n} gelegen zijn; waaruit weer even als boven volgt, dat de n^2 snijpunten van C_n en D_n aan alle krommen van de tweede groep gemeen zijn; en deze dus een bundel C'_n vormen projectivisch met C'_m, en zoo met dezen in verband staande, dat C_{m+n} de meetkundige plaats is van de snijpunten van de overeenkomstige krommen.

Opmerking 1. Is $m > n$, dan is de tweede bundel geheel door den eersten bepaald; is $m < n$, dan kan men van den tweeden bundel $\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$ basispunten willekeurig op C_{m+n} aannemen.

Tweede stelling van CHASLES. (II)

Van de m^2 basispunten van den eersten bundel kan men er $\frac{1}{2}\{(m-n)^2 + 3(m+n) - 2\}$ of $3n - 2$ willekeurig op C_{m+n} aannemen, naarmate $m > n$ of $m \overline{\overline{<}} n$ is.

Geval $m > n$.

Vervangt men in 10 m door $m' + n'$ en n door m', dan drukt (met weglating der accenten) het eerste deel van deze stelling het

---

[1]) NB. Dit wordt (vreemd genoeg) door CREMONA: „*Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*," blz. 79, stilzwijgend aangenomen.

volgende uit. Liggen er $m^2-\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$ van de m^2 basispunten van C'_m op C_{m+n}, dan liggen deze basispunten allen op C_{m+n}. Het bepalen van de m^2 basispunten van C'_m op C_{m+n} kan dus volbracht gerekend worden, zoodra men er $m^2-\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$ aangegeven heeft; wat door even zoo vele enkelvoudige voorwaarden geschieden kan.

In het algemeen zijn de m^2 basispunten onafhankelijk van de kromme C_{m+n} door $\frac{1}{2}m(m+3)-1$ van hen bepaald; omdat men de plaats van een punt echter door twee enkelvoudige voorwaarden aangeven kan, heeft men buiten de kromme C_{m+n} om $m(m+3)-2$ enkelvoudige voorwaarden ter bepaling van de m^2 basispunten noodig. De voorwaarde, dat die punten op de kromme C_{m+n} moeten liggen, staat dus met

$$m(m+3)-2-\left\{m^2-\tfrac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)\right\}=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{(m-n)^2+3(m+n)-2\right\}$$

enkelvoudige voorwaarden gelijk. Zoodat men ook maar zooveel punten willekeurig over C_{m+n} verdeelen kan, omdat juist de voorwaarde, dat een punt op een bepaalde kromme ligt, een enkelvoudige voorwaarde is.

Geval $m \overline{\overline{<}} n$.

In dit geval is niet meer aan de beperkende voorwaarden van 10 voldaan, en deze stelling dus hier niet te gebruiken; hier zal het mogelijk zijn, dat m^2-1 basispunten van C'_m op C_{m+n} liggen, zonder dat het laatste dit doet. Hieruit blijkt, dat men in de voorgaande redeneering den vorm $m^2-\frac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$ door m^2 vervangen moet. Waardoor men komt tot de vergelijking

$$m(m+3)-2-m^2=3m-2;$$

zoodat men in dit geval $3m-2$ der m^2 basispunten van C'_m willekeurig over de gegevene kromme C_{m+n} verdeelen kan.

Eerste stelling van DE JONQUIÈRES. (III)

Van de bepalende basispunten van twee bundels C'_m en C'_n, die een bepaalde kromme C_{m+n} moeten voortbrengen, zijn er altijd $mn-1$ door de overigen bepaald.

Geval $m>n$.

In dit geval kan men van de basispunten van den eersten bundel er $\frac{1}{2}\left\{(m-n)^2+3(m+n)-2\right\}$ willekeurig aannemen; terwijl die van

den tweeden bundel geheel door de eerste worden bepaald. Van de bepalende basispunten zijn er dus

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-1+\tfrac{1}{2}n(n+3)-1-\tfrac{1}{2}\left\{(m-n)^2+3(m+n)-2\right\}=$$
$$=mn-1,$$

door de individualiteit der kromme C_{m+n} bepaald.

Geval $m \overline{\overline{<}} n$.

In dit geval kan men van de basispunten van den eersten bundel er $3m-2$, van die van den tweeden bundel er $\tfrac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)$ willekeurig aannemen. Van de bepalende basispunten zijn er dus

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-1+\tfrac{1}{2}n(n+3)-1-(3m-2)-\tfrac{1}{2}(n-m+1)(n-m+2)=$$
$$=mn-1$$

door de individualiteit der kromme C_{m+n} bepaald [1]).

Tweede stelling van DE JONQUIÈRES. (IV)

Wanneer van een kromme C_{m+n} het bepalende aantal punten $\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+3)$ gegeven is, kan men de kromme met behulp van projectivische krommenbundels C'_m en C'_n construeeren.

Van de $\tfrac{1}{2}m(m+3)-1+\tfrac{1}{2}n(n+3)-1$ bepalende basispunten der beide krommenbundels kunnen er

$$\tfrac{1}{2}m(m+3)-1+\tfrac{1}{2}n(n+3)-1-(mn-1)=$$
$$=\tfrac{1}{2}\left\{(m-n)^2+3(m+n)-2\right\}$$

willekeurig aangenomen worden. Gebruikt men even zoo vele der $\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+3)$ gegeven punten daartoe, dan houdt men

$$\tfrac{1}{2}(m+n)(m+n+3)-\tfrac{1}{2}\left\{(m-n)^2+3(m+n)-2\right\}=$$
$$=2mn+1$$

punten over, waardoor C_{m+n} nog gaan moet. Neemt men nu $mn-1$ punten (met hun twee coördinaten) willekeurig aan (waardoor men $2mn-2$ onbekenden invoert) als ontbrekende bepalende basispunten, en vormt men zoodoende de beide bundels C'_m en C'_n; dan heeft men er voor te zorgen, dat met een kromme C_m, die door een der overgebleven $2mn+1$ punten gaan, een kromme C_n door dit punt overeenstemt; wat men op de volgende wijs bereikt.

Het projectivisch overeenkomen van de krommen van den eenen bundel met die van den anderen is bepaald, wanneer men bij drie

---

[1]) CREMONA moet hier, omdat hij de beperking van 8 in anderen vorm gebruikt, vier verschillende gevallen onderscheiden (blz. 82).

krommen C_m de overeenkomstige krommen C_n aanwijst; hiertoe gebruikt men drie der $2mn+1$ overgebleven punten, welk aantal hierdoor tot $2mn-2$ vermindert. Door nu de voorwaarde te stellen, dat de door een dier $2mn-2$ punten gaande kromme C_m overeenkomt met een insgelijks door dit punt gaande kromme C_n, verkrijgt men $2mn-2$ betrekkingen ter bepaling van $2mn-2$ onbekenden (de $2mn-2$ coördinaten der willekeurig aangenomen basispunten); waardoor de $mn-1$ nog onbekende basispunten gevonden worden.

Opmerking 1. Zijn m en n ongelijk, dan kan men de $\frac{1}{2}\{(m-n)^2+3(m+n)-2\}$ willekeurige basispunten allen tot den krommenbundel van den hoogeren graad brengen; alleen wanneer m en n gelijk zijn, moet men er minstens een aan elk der twee basissen toekennen.

Opmerking 2. De oplossing van het behandelde werkstuk is een geheel theoretische.

Opmerking 3. Deze theoretische oplossing kan op een onbeperkt aantal manieren plaats grijpen.

OVER VEELVLAKKIGE LICHAMEN,

DOOR

CORNÉILLE L. LANDRÉ.

De wet van EULER omtrent veelvlakkige lichamen (*het aantal zijvlakken* + *het aantal hoekpunten* = *het aantal ribben* + 2) werd vroeger beschouwd als alleen te gelden voor convexe lichamen, zooals dit dan ook in de meeste leerboeken nog het geval is; terwijl de bewijzen van sommigen inderdaad alleen voor convexe lichamen kunnen doorgaan. Later is intusschen gebleken, dat die wet verdere strekking heeft; het blijkt wel, dat dit feit in enkele nieuwere werken erkend wordt, maar de wet is dan weder te algemeen gemaakt, en de grenzen der geldigheid zijn in geen geval scherp aangegeven. In mijn werkje *„Stereometrische Hoofdstukken"* (Amsterdam 1875), heb ik onder meer die grenzen besproken, waarbij ik veel verplicht ben aan beschouwingen van BECKER in GRÜNERT'S *Archiv*. Ik wil dat nu op een andere wijze doen, door namelijk uit te gaan van het boven allen twijfel verheven feit, dat de wet geldt voor convexe veelvlakkige lichamen; en wil daarbij gelegenheid vinden, ook andere lichamen ter sprake te brengen.

Is een zijvlak van een convex veelvlakkig lichaam congruent met een zijvlak van een ander convex veelvlakkig lichaam; en vormt men een nieuw lichaam door die twee convexe lichamen zoodanig tot een geheel te vereenigen, dat de congruente zijvlakken geheel samenvallen; dan is het duidelijk, dat de wet van EULER geldt voor dat nieuwe lichaam. Zijn namelijk van de beide samenstellende lichamen, en van het ontstane lichaam het aantal zijvlakken, hoekpunten en ribben in volgorde z, h, r; z', h', r'; Z, H, R; terwijl n het aantal zijden van den veelhoek zij, waarmede de lichamen aaneensluiten, dan is

$$z + z' + h + h' = r + r' + 4.$$

Valt nu geen der aan den aansluitingsveelhoek grenzende veelhoeken van het eene lichaam in hetzelfde vlak met een dergelijken veelhoek des anderen lichaams, zoo is

$$Z = z + z' - 2, \; H = h + h' - n, \; R = r + r' - n;$$

dus is in het nieuwe lichaam

$$Z + H = R + 2$$

Vormt na de samenvoeging een aan den aansluitingsveelhoek grenzende veelhoek van het eene lichaam één veelhoek met een dergelijken veelhoek des anderen lichaams, dan vermindert Z met 1, en R met 1; de wet blijft dus gelden.

Vormen na de samenvoeging twee aan den aansluitingsveelhoek en aan elkander grenzende veelhoeken des eenen lichaams elk één veelhoek met twee dergelijke veelhoeken des anderen lichaams, dan vermindert Z met 2, H met 1, R met 3; zoodat de wet blijft gelden, enz.

Dat er zoodoende niet-convexe lichamen ontstaan kunnen, waarvoor de wet van EULER geldt, behoeft geen verdere aanwijzing.

Maar er is meer. Stelt men zich twee convexe lichamen voor, zoodanig, dat zij een zijvlak gemeen hebben, en waarvan het eene geheel binnen het andere ligt, zoo blijft een niet-convex lichaam over, als het kleinste lichaam uit het grootste wordt weggenomen. Geheel op dezelfde wijze als boven blijkt, dat ook voor zulk niet-convex lichaam de wet van EULER geldt.

Vereenigt men twee lichamen, waarvoor de wet van EULER geldt, en waarbij een zijvlak van het een congruent is met een zijvlak van het ander, tot een geheel, door de congruente zijvlakken te doen samenvallen; dan ontstaat weder een lichaam, waarvoor de wet geldt; *mits de beide lichamen waaruit het nieuwe lichaam ontstaan is, geen andere punten gemeen hebben, dan die van den aansluitingsveelhoek.*

Het bewijs toch is juist hetzelfde als voor het lichaam, dat uit twee convexe lichamen is samengesteld, maar verliest alle kracht, zoodra de vereenigde lichamen na de samenvoeging meer punten gemeen hebben dan die van den aansluitingsveelhoek.

Even gemakkelijk laat zich inzien, dat de wet geldt voor een lichaam, dat ontstaat, als twee lichamen, waarvoor de wet geldt, aaneensluiten volgens twee zijvlakken, die een zijde gemeen hebben; of zelfs volgens meer in één punt samenkomende zijvlakken. Laat van de beide lichamen weder het aantal zijvlakken, hoekpunten en

ribben zijn Z', H', R'; Z'', H'', R''. Sluiten de beide lichamen nu aan elkander volgens een m-hoek, een n-hoek en een p-hoek, die in één punt samenkomen, dan zijn er aan beide lichamen samen in het algemeen

6 zijvlakken, $m+n+p$ 4 hoekpunten en $m+n+p$ ribben, die geen zijvlakken, hoekpunten en ribben van het nieuwe lichaam zullen zijn; zoodat in het nieuwe lichaam

$$Z = Z' + Z'' - 6,\quad H = H' + H'' - (m+n+p-4),\quad R = R' + R'' - (m+n+p).$$

Nu is $$Z' + Z'' + H' + H'' = R' + R'' + 4,$$

en dus ook nu $$Z + H = R + 2.$$

Hierbij wordt weder verondersteld, dat de lichamen, die worden samengevoegd, geen andere punten gemeen hebben dan die van de veelhoeken, waarmede zij sluiten.

Eveneens geldt de wet van Euler voor het lichaam, dat overblijft, als uit een lichaam, waarvoor de wet geldt, een ander dergelijk wordt weggenomen, dat met het eerste gemeen heeft òf een zijvlak, òf twee met een zijde aan elkander sluitende zijvlakken, of meerdere aan één punt samenkomende zijvlakken; en dat geheel binnen dat eerste valt.

Beschouwen wij eenigszins nader de lichamen, waarvoor de wet van Euler niet geldt. Men stelle zich namelijk twee lichamen voor, waarvoor de wet geldt, en die zoodanig tot een geheel kunnen vereenigd worden, dat zij niet met één maar met twee van elkander gescheidene zijvlakken volkomen sluiten, terwijl zij verder geen punten meer gemeen hebben. Het spreekt wel van zelf, dat die twee lichamen niet beiden convex kunnen zijn; immers als twee convexe lichamen met een zijvlak sluiten, kunnen zij niet meer punten gemeen hebben, omdat zij zich aan weerszijden van het gemeenschappelijk zijvlak bevinden.

Zijn dan de aantallen hoekpunten, zijvlakken en ribben van de beide lichamen in volgorde H', Z', R'; H'', Z'', R''; die van het ontstaande lichaam H, Z, R. Men heeft dan vooreerst

$$H' + H'' + Z' + Z'' = R' + R'' + 4.$$

Het aantal zijden van den eenen sluitings-veelhoek zij $= n$, dat van den anderen zij m, dan is in het algemeen

$$H = H' + H'' - (m+n),\quad Z = Z' + Z'' - 4,\quad R = R' + R'' - (m+n),$$

zoodat $$Z + H = R;$$

terwijl het duidelijk is, dat hetzelfde blijft gelden, als er door de samenvoeging meer zijvlakken, hoekpunten en ribben wegvallen. Vallen namelijk twee zijvlakken in elkanders uitbreiding, zoodat zij er slechts één vormen, dan valt er ook een ribbe weg; vallen twee naastliggende zijvlakken des eenen lichaams in de uitbreidingen van twee des anderen, dan vallen twee zijvlakken weg, maar dan vallen ook drie ribben en één hoekpunt weg.

Het is wellicht niet overbodig, een voorbeeld te geven van die laatste soort van lichamen; men stelle zich een lichaam voor, opgebouwd uit drie afgeknotte driehoekige prisma's, zoodanig, dat het grondvlak van het tweede geheel sluit met het bovenvlak van het eerste, het grondvlak van het derde met het bovenvlak van het tweede, en het grondvlak van het eerste met het bovenvlak van het derde. Dit lichaam behoort tot de doorboorde; het bestaat namelijk uit een convex lichaam, dat doorboord is volgens een afgeknotte pyramide. Van dit lichaam is $Z = 9$, $H = 9$, $R = 18$; de hoekpunten zijn namelijk geen andere dan die van de drie driehoeken, welke de grondvlakken zijn van de afgeknotte prisma's; de zijvlakken zijn de opstaande zijvlakken der afgeknotte prisma's; aan het lichaam zijn dus op te merken zes uitwendige en drie inwendige zijvlakken; onder de ribben zijn er vijftien uitwendige en drie inwendige. Aan de betrekking $Z + H = R$ wordt hier voldaan. Werkelijk kan men dit lichaam dan ook opbouwen uit twee lichamen, waarvoor de wet van Euler geldt, en die volgens twee zijvlakken sluiten; het eene lichaam bestaat namelijk uit twee afgeknotte prisma's, die volgens een driehoek sluiten, en waarbij $Z = 8$, $H = 9$, $R = 15$; het andere is zelf een afgeknot prisma.

Geheel op dezelfde wijze toont men aan, dat als twee lichamen, waarvoor de wet van Euler geldt, aan elkander sluiten volgens drie van elkander gescheidene zijvlakken; terwijl de lichamen geen andere punten dan die van die zijvlakken gemeen hebben; er een lichaam ontstaat waarvoor

$$Z + H = R - 2;$$

enz.

De zoodoende ontstane lichamen zijn ringvormig te noemen, en zouden kunnen onderscheiden worden in enkel- en meervoudig ringvormig.

Na deze beschouwing kunnen wij het volgende vaststellen. De wet van Euler $Z + H = R + 2$ geldt voor alle lichamen, waarvan de zijvlakken gewone enkelvoudig begrensde veelhoeken zijn (echter dikwijls met inspringende hoeken), en welke niet ringvormig zijn.

Voor de enkelvoudig-ringvormige lichamen is $Z + H = R$, voor de dubbel-ringvormige is $Z + H = R - 2$, voor de q-voudig ringvormige lichamen is $Z + H = R - (q \quad 1) 2$.

Een andere soort van veelvlakkige lichamen is die, waarbij de zijvlakken niet allen enkelvoudig begrensde veelhoeken zijn. Zulk lichaam ontstaat, als men twee veelvlakkige lichamen zoodanig tot een geheel vereenigt, dat een zijvlak des eenen lichaams geheel binnen een zijvlak des anderen valt. Het ontstane lichaam heeft dan een zijvlak, dat bestaat uit een veelhoek, waaruit een andere veelhoek is weggenomen. De omtrek van zulken veelhoek bestaat dan uit twee geheel gescheiden deelen, een uitwendig en een inwendig deel, van daar de naam, dubbel-begrensd. Dat voor zulk lichaam de wet van Euler zeker niet geldt, volgt onmiddellijk uit bovenbeschreven wijze van ontstaan, en vindt men dan ook opgemerkt in *de Stereometrie* van Versluys.

De verscheidenheid van veelvlakkige lichamen is echter nog veel grooter; één soort wil ik nog ter sprake brengen, omdat die tot eenige moeielijkheid aanleiding geeft. Het eenvoudigste lichaam van bedoelde soort ontstaat, als men twee driehoekige pyramiden zoodanig tot een geheel vereenigt, dat een zijvlak van de eene ingeschreven is in een zijvlak van de andere. Zij ABCD de eene, EFGH de andere pyramide, en valle punt F in de ribbe CD, G in DB, H in BC; zoodat de toppen A en E zich aan weerszijden van het vlak der grondvlakken bevinden. In mijn bovengenoemd werkje heb ik dergelijk lichaam ter sprake gebracht; hetgeen echter tot eenige bedenking heeft aanleiding gegeven. Voor het doel, dat ik mij daar voorstelde, was het voorbeeld dan ook werkelijk niet voorzichtig gekozen; maar ik ben daardoor tot de overtuiging gekomen, dat de bepaling, die men gewoon is van *ribbe* te geven niet op alle mogelijke veelvlakkige lichamen van toepassing zijn kan; en dus soms tot verwarring kan aanleiding geven. Immers in de lichamen, waarvoor gezien is dat de wet van Euler geldt, en in de beschouwde ringvormige lichamen, is een ribbe een begrensde lijn, die zijde is van twee zijvlakken. In het nu ter sprake gebrachte lichaam faalt de bepaling; de zijvlakken zijn namelijk de driehoeken ABC, ABD, ACD, EFG, EGH, EHF, BGH, CHF, DFG; de hoekpunten zijn A, B, C, D, E, F, G, H; dit biedt geenerlei moeielijkheid; maar wat de ribben betreft stuit men op de zwarig-

heid, dat BH en HC geen ribben zijn in den gewonen zin van het woord; want BH is wel zijde van den driehoek BHG, doch slechts een deel der zijde BC; evenzoo is het met HC, CF, FD, DG en GB; terwijl BC in dien zin evenmin een ribbe is; want BC is wel zijde van ABC, maar ook van geen ander zijvlak des lichaams. Toch voldoet het beschreven lichaam geheel aan de bepaling van veelvlakkig lichaam als een lichaam begrensd door vlakke figuren; zoodat er hier van geenerlei uitbreiding van begrip kan sprake zijn.

Bovendien kan de zaak nog samengestelder worden, als men b. v. twee driehoekige pyramiden zoodanig vereenigt, dat de omtrek van een driehoek der eene pyramide, dien van een driehoek der andere pyramide in zes punten snijdt; en dus de twee zijvlakken voor het nieuwe lichaam overgaan in zes driehoeken. Verder kan men zich een lichaam voorstellen, waarbij twee wigvormige gedeelten voorkomen, die een gemeenschappelijken scherpen kant hebben; zoodat die scherpe kant zijde is niet van twee, maar van vier zijvlakken des lichaams.

Het is overbodig meer voorbeelden aan te halen; ik meen, dat het hierdoor is duidelijk geworden, dat, om voor elk veelvlakkig lichaam van ribben te kunnen spreken, men dan een andere bepaling moet geven. Intusschen komt het mij voor, dat die moeielijkheid verdwijnt, als men in plaats van ribben, eenvoudig spreekt van zijden der zijvlakken; zoodat de mogelijkheid bestaan zou, voor al de verschillende soorten van veelvlakkige lichamen het verband op te sporen tusschen 1°. het aantal begrenzende vlakke figuren; 2°. het aantal hoekpunten des lichaams, de snijpunten de zijvlakken, voorzoover zij tot het oppervlak des lichaams behooren; en 3°. het aantal zijden van al de zijvlakken.

DORDRECHT, 1877.

OVER DE BENADERDE RECTIFICATIE VAN EEN CIRKELBOOG,

DOOR

F. J. VAN DEN BERG.

In L. CREMONA's *Elemente des graphischen Calculs*, in het Duitsch bewerkt door M. CURTZE, 1875, bladz. 101, komen de twee navolgende constructiën van W. J. MACQUORN RANKINE voor de benaderde rectificatie van een cirkelboog AB voor, overgenomen uit *London etc. Philosophical Magazine*, 4th Ser., Vol. 34, 1867, pag. 284—286 en 381—382, en die ook te vinden zijn in RANKINE's *Machinery and Millwork*, 1869, page 28—29.

I. Maak $AC = \frac{1}{2} BA$, beschrijf uit C den cirkelboog BD, dan snijdt deze, als voor den straal 1 de boog $AB = \theta$ is, de raaklijn af, (Zie figuur 1 op plaat IV)

$$AD = \theta - \frac{\theta^5}{1080} - \frac{\theta^7}{54432}.$$

II. Maak boog $AE = \frac{1}{4}$ boog AB; indien dan C het snijpunt van de raaklijn in A met den straal OE is, heeft men (Zie figuur 2 op plaat IV)

$$AC + CB = \theta + \frac{\theta^5}{4320} + \frac{101\,\theta^7}{3483648}.$$

(Bij CREMONA—CURTZE is hier voor den laatsten term abusievelijk overgenomen $\frac{\theta^7}{3484648}$.)

Uit deze beide waarden vindt men nog, door $\frac{4}{5}$de van de tweede op te tellen bij $\frac{1}{5}$de van de eerste, eene meer benaderde waarde, namelijk

$$\theta + \frac{17\,\theta^7}{870912}.$$

De eerste dezer formulen zou men bijv. als volgt kunnen vinden. Stellende $AD = \theta_1$ en $\angle ADC = \phi$, heeft men, omdat $CD = 3\,Sin\,\frac{\theta}{2}$ en $AC = Sin\,\frac{\theta}{2}$ is, $\theta_1 = 3\,Sin\,\frac{\theta}{2}\,.\,Cos\,\phi - Sin\,\frac{\theta}{2}\,.\,Cos\,\frac{\theta}{2}$, waarin $\frac{Sin\,\phi}{Sin\,\frac{\theta}{2}} = \frac{Sin\,\frac{\theta}{2}}{3\,Sin\,\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{3}$, en dus $3\,Cos\,\phi = \sqrt{\left(3^2 - Sin^2\,\frac{\theta}{2}\right)}$ is; zoodat men, invoerende $s = Sin\,\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\theta^3}{48}$, verkrijgt

$$\theta_1 = s\left\{(3^2 - s^2)^{\frac{1}{2}} - (1 - s^2)^{\frac{1}{2}}\right\} = s\left\{\left(3 - \frac{s^2}{2.3} - \frac{s^4}{8.3^3} - \frac{s^6}{16.3^5}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(1 - \frac{s^2}{2} - \frac{s^4}{8} - \frac{s^6}{16}\right)\right\}.$$

Hiervan aftrekkende

$$\theta = 2\,Boog\,Sin\,s = 2\left(s + \frac{s^3}{6} + \frac{3s^5}{40} + \frac{5s^7}{112}\right),$$

komt er $$\theta_1 - \theta = -\frac{4s^5}{135} - \frac{46s^7}{1701} = -\frac{4}{135}\left(\frac{\theta^5}{32} - \frac{5\theta^7}{16.48}\right) -$$
$$- \frac{46\theta^7}{128.1701} = -\frac{\theta^5}{1080} - \frac{\theta^7}{54432}.$$

In de berekening van den laatsten term der tweede formule schijnt bij Rankine eene rekenfout te zijn begaan. Immers, stellende $AC + CB = \theta_2$, heeft men, omdat in ΔACB, $AC = Tg\,\frac{\theta}{4}$, $AB = 2\,Sin\,\frac{\theta}{2}$, $\angle CAB = \frac{\theta}{2}$, en dus $CB^2 = Tg^2\,\frac{\theta}{4} + 4\,Sin^2\,\frac{\theta}{2} -$

$$- 2\,Tg\,\frac{\theta}{4}\,.\,2\,Sin\,\frac{\theta}{2}\,.\,Cos\,\frac{\theta}{2} = Tg^2\,\frac{\theta}{4} + 4\left\{4\,Sin^2\,\frac{\theta}{4}\,.\,Cos^2\,\frac{\theta}{4} - \right.$$
$$\left. - 2\,Sin^2\,\frac{\theta}{4}\left(2\,Cos^2\,\frac{\theta}{4} - 1\right)\right\} = Tg^2\,\frac{\theta}{4} + 8\,Sin^2\,\frac{\theta}{4} \text{ is,}$$

$$\theta_2 = Tg\,\frac{\theta}{4}\,.\left\{1 + \sqrt{\left(1 + 8\,Cos^2\,\frac{\theta}{4}\right)}\right\};$$

of, invoerende

$$t = Tg\,\frac{\theta}{4} = \frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{192},$$

(zooals ook aldaar is geschied), komt er

$$\theta_2 = t\left\{1 + \sqrt{\left(1 + \frac{8}{1+t^2}\right)}\right\} = t\left\{1 + (9 - 8t^2 + 8t^4 - 8t^6)^{\frac{1}{2}}\right\} =$$

$$= t\left\{4 - \frac{4t^2}{3} + \frac{28t^4}{27} - \frac{212t^6}{243}\right\}.$$

Hiervan aftrekkende

$$\theta = 4\,Boog\;Tg\,t = 4\left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}\right),$$

vindt men $\theta_2 - \theta = \frac{32t^5}{135} - \frac{512t^7}{1701} = \frac{32}{135}\left(\frac{\theta^5}{4^5} + \frac{5\theta^7}{4^4.192}\right) -$

$$-\frac{512.\theta^7}{4^7.1701} = \frac{\theta^5}{4320} + \frac{5\theta^7}{870912},$$

in plaats van de boven opgegeven formule.

Uit de beide gevonden formulen komt nu nog, door de termen in θ^5 te elimineeren,

$$\frac{4\theta_2 + \theta_1}{5} \text{ of } \theta_2 + \frac{\theta_1 - \theta_2}{5} = \theta + \frac{\theta^7}{1088640},$$

zoodat de werkelijke fout, die men begaat door deze waarde te gebruiken, slechts een $21\frac{1}{4}$ste gedeelte bedraagt van het daarvoor door Rankine opgegeven bedrag.

Indien men, in de tweede constructie in plaats van $Tg\,\frac{\theta}{4}$, hetzelfde gebruik maakt van $\frac{Tg\,\theta}{4}$, zou men, tot in θ^5 benaderend, verkrijgen

$$\theta'_2 = \frac{Tg\,\theta}{4} + \sqrt{\left\{\left(Sin\,\theta - \frac{Tg\,\theta}{4}\right)^2 + (1 - Cos\,\theta)^2\right\}} =$$

$$= \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{12} + \frac{\theta^5}{30}\right) + \sqrt{\left\{\left(\frac{3\theta}{4} - \frac{\theta^3}{4} - \frac{\theta^5}{40}\right)^2 + \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\right)^2\right\}} =$$

$$= \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{12} + \frac{\theta^5}{30}\right) + \left(\frac{9\theta^2}{16} - \frac{\theta^4}{8} - \frac{\theta^6}{60}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\theta^3}{12} + \frac{\theta^5}{30}\right) + \left(\frac{3\theta}{4} - \frac{\theta^3}{12} - \frac{17\theta^5}{1080}\right) = \theta + \frac{19\theta^5}{1080};$$

zoodat dan de fout 76 maal zoo groot zou zijn als die volgens de tweede constructie zelve.

Indien men daarentegen boog $AE = \frac{1}{3}$ boog AB nam, en dan, na weder het snijpunt C van de raaklijn in A met den straal OE

bepaald te hebben, in plaats van den afstand CB, den loodregten afstand CB′ van C tot den straal OB gebruikte, zou men vinden

$$\theta''_2 = AC + CB' = Tg\,\frac{\theta}{3} + \left(Sin\,\theta - Tg\,\frac{\theta}{3}\,.\,Cos\,\theta\right) =$$

$$= Sin\,\theta + (1 - Cos\,\theta)\,Tg\,\frac{\theta}{3} = \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\theta^2}{2} - \frac{\theta^4}{24}\right)\left(\frac{\theta}{3} + \frac{\theta^3}{81}\right) = \theta + \frac{\theta^5}{1620};$$

en dus eene fout gelijk aan $\frac{8}{3}$ maal die volgens de tweede constructie.

Ziehier nog een paar andere benaderings-formulen of constructiën.

III. Uit
$$Sin\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040},$$

$$Tg\,\theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\,\theta^5}{15} + \frac{17\,\theta^7}{315},$$

en
$$Koorde\,\theta = 2\,Sin\,\frac{\theta}{2} = \theta - \frac{\theta^3}{24} + \frac{\theta^5}{1920} - \frac{\theta^7}{322560},$$

volgen onmiddellijk de formulen

$$\theta_3 = \frac{2\,Sin\,\theta + Tg\,\theta}{3} = Sin\,\theta + \frac{Tg\,\theta - Sin\,\theta}{3} = \theta + \frac{\theta^5}{20} + \frac{\theta^7}{56},$$

$$\theta_4 = \frac{4\,Koorde\,\theta - Sin\,\theta}{3} = Koorde\,\theta + \frac{Koorde\,\theta - Sin\,\theta}{3} = \theta - \frac{\theta^5}{480} + \frac{\theta^7}{16128},$$

$$\theta_5 = \frac{8\,Koorde\,\theta + Tg\,\theta}{9} = Koorde\,\theta + \frac{Tg\,\theta - Koorde\,\theta}{9} = \theta + \frac{11\,\theta^5}{720} + \frac{145\,\theta^7}{24192},$$

die onderling samenhangen volgens $\theta_3 + 2\,\theta_4 - 3\,\theta_5 = 0$; en verder nog de meer benaderde waarde

$$\frac{\theta_3 + 24\,\theta_4}{25} \text{ of } \theta_4 + \frac{\theta_3 - \theta_4}{25} = \theta + \frac{13\,\theta^7}{16800}$$

geven. Deze waarde, ofschoon minder nauwkeurig dan de boven uit θ_1 en θ_2 gevondene, is dus terstond, alleen door van den sinus, de tangens en de koorde gebruik te maken, te construeeren.

IV. Opdat (in de tweede figuur) $BD = Boog\,AB$ zij, moet men bij benadering hebben $FD = \sqrt{(BD^2 - BF^2)} = \sqrt{(\theta^2 - Sin^2\,\theta)} =$
$= \sqrt{\left\{\theta^2 - \left(\theta - \frac{\theta^3}{6}\right)^2\right\}} = \sqrt{\frac{\theta^4}{3}} = \frac{1}{3}\,\theta^2\,\sqrt{3} = \frac{2}{3}\,AF\,\sqrt{3}$; dat is, FD

moet gelijk zijn aan de zijde van een gelijkzijdigen driehoek, die AF tot hoogte heeft; en wordt alzoo gevonden door in den halven cirkel op AF den straal AG uit te zetten, en FD = FGH te nemen. De graad van benadering van deze constructie wordt berekend door

$$\theta_6 = BD = \sqrt{\left\{ Sin^2\theta + \tfrac{4}{3}(1 - Cos\theta)^2 \right\}} = \sqrt{\left\{ \left(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^5}{120} - \frac{\theta^7}{5040}\right)^2 + \right.}$$

$$\sqrt{\left. + \tfrac{1}{3}\left(\theta^2 - \frac{\theta^4}{12} + \frac{\theta^6}{360}\right)^2 \right\}} = \sqrt{\left(\theta^2 - \frac{\theta^6}{90} + \frac{\theta^8}{1008}\right)} = \theta - \frac{\theta^5}{180} + \frac{\theta^7}{2016}.$$

Deze waarde, in verband gebracht met de zooeven voor θ_3, θ_4 en θ_5 gevondene, zou weder door eliminatie der termen in θ^5 tot meer nauwkeurige waarden kunnen voeren.

Omdat $\frac{2}{3}\sqrt{3} = 1.1547005$. slechts weinig kleiner is dan $1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}) =$ $= 1.154762..$, kan men nog met groote benadering de gevonden formule $FD = \frac{2}{3} AF \sqrt{3}$, vervangen door $AD = \frac{1}{2}\left(\frac{AF}{6} + \frac{AF}{7}\right)$.

Omtrent alle benaderingen valt op te merken, dat men den graad van nauwkeurigheid daarvan kan verhoogen door ze, in plaats van op den boog θ zelf, bijv. op $\frac{\theta}{2}$ enz. toe te passen, en de uitkomst met 2 enz. te vermenigvuldigen.

Op pag. 105 van Cremona-Curtze wordt nog eene constructie van Ceradini opgegeven, volgens welke de hypotenuse van een regthoekigen driehoek, wiens ééne regthoekszijde gelijk is aan de middellijn, en de andere aan driemaal den straal verminderd met de tangens van 30°, gelijk is aan 3.14153 maal den straal, en dus bijna gelijk aan den halven cirkelomtrek. Deze constructie werd reeds medegedeeld door Kochanski, op pag. 397—398 van de *Acta Eruditorum Lipsiensa* van 1685, en wordt als zoodanig o. a. aangehaald in J. H. van Swinden's *Grondbeginsels der Meetkunde*, 1790, pag. 291, en in Klügel's *Mathematisches Wörterbuch*, 1e Abtheilung, 4er Theil, pag. 95—96, Artikel Quadratur.

Delft, September 1877.

BIBLIOGRAPHIE.

Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, *von Dr*. E. Dühring, *Docenten an der Berliner Universität. Zweite*, *theilweise umgearbeitete und mit einer Anleitung zum Studium der Mathematik vermehrte Auflage. Leipzig. Fues's Verlag*. 1877.

DOOR

Dr. P. VAN GEER.

In 1869 werd door de filosofische Faculteit der hoogeschool te Göttingen eene prijsvraag uitgeschreven over het volgende onderwerp: *eene kritische geschiedenis van de algemeene beginselen der mechanica.* Vijf antwoorden kwamen in, waarover drie jaar later rapport werd uitgebracht. Twee werden bekroond, één met den eersten, één met den tweeden prijs. Het laatste bleek afkomstig te zijn van Dr. H. Klein, toen nog leeraar aan het gymnasium te Dresden, maar sedert tot een der hoogste ambten in de wetenschap opgeklommen, namelijk tot hoogleeraar in de wiskunde aan de hoogeschool te München. Dit werk is in druk verschenen [1]), en bevat niet veel meer, dan wat bij de beoefenaars der wetenschap als bekend kan ondersteld worden, nl. een kort uittreksel van het voornaamste, dat over het genoemde onderwerp is geschreven in geschiedkundige volgorde samengesteld.

Geheel anders is het met het werk, dat den eersten prijs verkreeg, en afkomstig bleek te zijn van Dr. E. Dühring, toen nog privaatdocent aan de hoogeschool te Berlijn. Het oordeel der faculteit

[1]) *Die Principien der Mechanik*, *historisch und kritisch dargestellt*, *von Prof. Dr*. H. Klein. Leipzig. Teubner 1872.

over dezen arbeid luidt zoo gunstig als slechts zelden bij bekroonde prijsvragen het geval is. Zij kan geen woorden genoeg vinden, om het werk van den haar toen nog onbekenden schrijver te roemen, en verklaart zich zelfs gelukkig door het uitschrijven van de prijsvraag zulk een voortreffelijken arbeid uitgelokt te hebben. Door de uitgave van het werk werd ieder belangstellende in staat gesteld, om het meer of minder juiste van dit oordeel te onderzoeken; afgescheiden van allerlei bijkomende omstandigheden, kan het niet anders dan bevestigd worden; want het is een merkwaardig boek, in hooge mate leerzaam voor een ieder, die zich bekend wil maken met de geschiedenis der wiskundige wetenschappen. Ik wensch bij dezen een kort overzicht van het werk te geven; niet, om de lezing er van overbodig te maken, doch omgekeerd, om daartoe op te wekken door te wijzen op den grooten schat van wetenswaardige bijzonderheden omtrent personen en stelsels, van af de herleving der wis- en natuurkundige wetenschappen met Galilei en Descartes tot op onzen tijd. Bij het doorbladeren zal ik mij eerst bepalen tot de oorspronkelijke uitgaaf (1872); de belangrijke toevoegingen, die de tweede heeft ondergaan, staan niet alleen met het onderwerp van het geschrift in verband, maar hebben ook betrekking op zaken, die met den levensloop des schrijvers ten nauwste samenhangen, en waarover wij daarna nog een en ander zullen meedeelen.

I.

De Inleiding handelt in korte trekken over de geschiedenis der mechanica vóór de herleving der wetenschap in den nieuwen tijd; zij is bijna geheel samengevat in de verdiensten van Archimedes op het gebied der statica en hydrostatica. Van eene wetenschappelijke behandeling der bewegingsleer was, zooals men weet, in den ouden tijd geen sprake; alles bepaalde zich tot eenige bijzondere gevallen van evenwicht door het beginsel van den hefboom, door Archimedes gevonden maar niet aangetoond, en evenzoo tot zijne bekende wet omtrent de drukking op een in eene vloeistof gedompeld of drijvend lichaam.

Met de eerste afdeeling gaat de schrijver terstond over tot Galilei, den schepper der dynamica, die tevens den wetenschappelijken grondslag der statica vormde. Zijn recht op den eersten titel werd door hem zelven erkend, daar hij zijn geschrift als over eene „nieuwe wetenschap" handelende uitgaf. Enkele onmiddellijke voorgangers

van Galilei worden opgenoemd, en hunne bijzondere verdiensten vermeld. Hieronder vindt men voornamelijk Leonard de Vinci, meer als schilder beroemd, maar niet minder hoog staande als man van wetenschap. Zijn karakteristieke uitspraak, „de mechanica is het paradijs der mathematische wetenschappen, omdat men met haar tot de vrucht der wiskundige kennis komt", wordt aangehaald en verklaard; daarbij alles besproken, wat van de wiskundige werken des grooten kunstenaars tot ons is gekomen.

Na nog een paar minder bekende voorgangers aangehaald te hebben, gaat de schrijver tot Galilei zelf over, en handelt op de meest uitvoerige wijze over dezen beroemden man; duidelijk en volledig wordt aangewezen, wat hij op dit gebied tot stand bracht, en hoe hij de grondslagen der nieuwe wetenschap legde. Ook zijne tijdgenooten worden niet vergeten, en voor ons, Nederlanders, is het eene aangename gewaarwording, dat daarbij aan de verdiensten van een Simon Stevin volkomen recht geschiedt. Evenzoo werden de uitbreidingen, door Descartes en Pascal aan de grondbeginselen der wetenschap gegeven, uitvoerig besproken. Over de toepassingen der mechanica zoowel op het gebied der sterrekunde als dat der ingenieur-wetenschappen wordt niet gesproken, daar het onderwerp dit niet meebracht. In de prijsvraag lag het niet opgesloten; zij maakte slechts gewag van de grondbeginselen der wetenschap. Hierdoor komen de namen en ontdekkingen van Copernicus en Keppler in het geschrift niet voor; van de eene zijde is dit wel te betreuren, omdat de uiteenzetting daarvan, in aansluiting met en op dezelfde wijze bewerkt als die van Galilei, volstrekt geen vruchtelooze of ondankbare taak zou geweest zijn; van de andere zijde moet toegegeven worden, dat hierdoor de omvang, althans voor een prijsschrift, dat aan zekere gegevens en tijd gebonden is, buiten behoorlijke grenzen zou uiteengezet zijn.

Zoo komen wij dus in de tweede afdeeling tot de tijden van Newton en Huygens. In geen mij althans bekend werk is dit voor de wiskundige wetenschap zoo merkwaardige tijdperk met zooveel uitvoerigheid, zaakkennis, scherpte en logische gedachtengang behandeld. In aansluiting met de ontdekkingen van Galilei worden de uitbreidingen, door Huygens aan de wetenschap gegeven, ontwikkeld; en op nieuw moet het voor elk Nederlandsch hart eene groote voldoening zijn, de verdiensten van onzen geleerden zoo uitvoerig en klaar uiteengezet te zien. Met Galilei zijn voorganger en Newton zijn tijdgenoot wordt hij op eene lijn gesteld, en zelfs ver boven een Leibnitz verheven, wiens verdiensten trouwens door onzen schrijver niet zoo

hoog worden geschat, als in den regel het geval is. Bij het doorlezen van de bladzijden aan de groote geleerden van dit zóo merkwaardige tijdperk gewijd, gevoelt men dat het meer dan tijd is, dat eindelijk voor onzen landgenoot de eerzuil worde gesticht, die voor zijne mededingers en tijdgenooten NEWTON en LEIBNITZ reeds lang is verrezen, en niet bestaat uit een standbeeld op markt of plein, dat door den grooten hoop met onverschilligheid wordt voorbijgegaan, maar in eene volledige, hernieuwde uitgave zijner werken, vermeerd met eene beschrijving van zijn leven in de lijst van zijn tijd en grondige beoordeeling zijner ontdekkingen. De voorname plaats, die zij op het gebied der wiskundige wetenschappen innemen, wordt meer in den vreemde dan bij zijne landgenooten op prijs gesteld.

Zijn het opsporen en toepassen van de eigenschappen der middelpunt vliedende kracht, de daaruit voortvloeiende theorie van de beweging des slingers, de wetten van de botsing der lichamen, de voornaamste bijdragen van HUYGENS op dit gebied, met NEWTON komen wij tot de analyse der kromlijnige beweging, hare snelheden en versnellingen; eene theorie, door welke de verklaring van de bewegingen der lichamen van het zonnestelsel mogelijk werd.

Hiermede is de voorname periode afgesloten, waarin de grondslagen der nieuwe wetenschap vast zijn gelegd; aan de navolgers bleef over hierop voort te bouwen, en vooral door de ontwikkeling der algebraische en geometrische analyse uit te werken, wat in kiem in de ontdekkingen van GALILEI, HUYGENS en NEWTON lag opgesloten.

De derde afdeeling houdt zich bezig met zoodanige ontwikkelingen en uitbreidingen door het volgend geslacht, waarbij de namen der BERNOULLI's, van EULER en LAGRANGE op den voorgrond treden. De geschiedenis van wat tegenwoordig meer in het bijzonder de beginselen der mechanica wordt genoemd, vindt hier hare plaats en komt tot haar recht door de volledige uiteenzetting en toelichting van al wat door de genoemde groote mannen in dit opzicht is verricht.

Het beginsel van het *behoud der levendige krachten* komt het eerst hierbij op den voorgrond. Hoe de oorsprong er van in eenige uitspraken van HUYGENS is te vinden, hoe LEIBNITZ het denkbeeld overnam, hoe het door de BERNOULLI's werd uitgebreid, welk een zware en langdurige strijd tusschen de grootste geleerden van dien tijd daaruit voortvloeide, hoe deze door D'ALEMBERT en LAGRANGE tot de ware afmetingen werd terug gebracht, en hoe de waarde en beteekenis van het beginsel eerst in onzen tijd werden vastgesteld,

dat alles wordt hier op duidelijke en onderhoudende wijze beschreven en uit de bronnen toegelicht.

Vervolgens komt het beginsel van *de beweging van het massa-middelpunt*, en dat van *de doorloopen sectoren* aan de beurt; het groote belang van beide bij de centrale bewegingen in het algemeen, en de bewegingen in het zonnestelsel in het bijzonder, wordt hierbij ontwikkeld. De merkwaardige geschiedenis van het beginsel *der kleinste werking*, dat eerst zoo hoog werd verheven en later zoo diep daalde, vindt daarna hare behoorlijke plaats.

Van meer belang zijn de nu volgende beginsels, zijnde dat van D'ALEMBERT *over het evenwicht der zoogenaamde verloren krachten*, en dat *van de virtueele snelheden*. Het eerste diende, om de leer der beweging tot die van het evenwicht terug te brengen, hetgeen in dien tijd van veel belang was, omdat de laatste volledig was ontwikkeld, en de eerste meer uit de samenvoeging van eenige algemeene vraagstukken bestond, die ieder op hunne wijze werden opgelost. Het tweede, dat reeds in beginsel door GALILEI en andere voorgangers was uitgesproken, werd door LAGRANGE in zijn beroemd werk *Traité de Mécanique Analytique* tot grondslag voor de mechanica verheven, waarop in verbinding met het beginsel van D'ALEMBERT het gebouw dezer wetenschap volledig wordt opgetrokken. Bij al de voortreffelijkheid van het genoemde werk blijft juist die grondslag de zwakke zijde, omdat geen volledig bewijs van het beginsel voorafgaat en zelfs kan gegeven worden; maar, zooals later door POINSOT zoo terecht is aangetoond, al, wat er op steunt en uit kan worden afgeleid, tot bewijs voor de juistheid van het uitgangspunt moet strekken.

Aan het slot dezer afdeeling wordt de invloed van de bespiegelende wijsbegeerte op de wiskundige wetenschappen in het algemeen, en op de mechanica in het bijzonder, besproken. Heel schitterend komt zij van het onderzoek niet af, omdat uit de geschiedenis blijkt, hoe zij de wetenschap meestal op dwaalsporen voerde, waarvan de zuivere wiskunde alleen haar op het rechte pad kon terug brengen. Het beginsel van de levendige krachten en dat van de kleinste werking zijn de voornaamste getuigen voor die bewering; terwijl DESCARTES, LEIBNITZ en KANT, met al hunne bespiegelingen op het gebied der wis- en natuurkundige wetenschappen, haar geen stap verder hebben gebracht, maar veeleer tot verwarring aanleiding gegeven, die slechts door de zuiver wiskundige beschouwing aan de eene zijde en nauwkeurige waarneming aan de andere konden opgelost worden.

In de vierde en laatste afdeeling komt de schrijver tot, zoo niet het gewichtigste, dan toch het moeilijkste gedeelte zijner taak, namelijk tot de beschrijving van de uitbreidingen, die in onze eeuw aan de wetenschap zijn gegeven. Zij loopt dus over tijdgenooten, of mannen, die eerst kort geleden hun invloed deden gelden. Belangrijk is hier de arbeid des schrijvers in hooge mate, omdat hij de eerste is, die in algemeene en breede trekken de vooruitgang der mechanica in den jongsten tijd weergeeft, en dus genoodzaakt is vele verspreide draden bijeen te garen, en een oordeel uit te spreken over ontdekkingen, die nog niet of nauwelijks zijn voltooid. Wij mogen dan ook den schrijver niet te hard vallen, wanneer wij bemerken, dat zijne geschiedenis hier onvolledig is, en zijne beoordeeling volstrekt geene algemeene instemming bij de vakgenooten zal vinden. Eene groote verdienste van zijn werk is, dat hij uitvoerig handelt over den voortreffelijken arbeid van Poinsot tot zuivering en opheldering der mechanische begrippen, die nog zoo dikwijls zelfs in onzen tijd wordt voorbijgezien; maar onvolledig is daarbij de schrijver in hooge mate, daar hij wel spreekt van de invoering der koppels, die de leer van de samenstelling en uitwerking der krachtstelsels zoozeer heeft verhelderd, ook wel van de nieuwe zooveel vereenvoudigde theorie van de wenteling der lichamen, maar niet van datgene, wat juist in dit werk de voornaamste plaats moest bekleeden, de groote verbeteringen die door Poinsot in het theorema van d'Alembert en dat der virtueele snelheden zijn gebracht. Hetgeen een Lagrange niet mocht gelukken is door hem volbracht, namelijk eene klare ontleding van den oorsprong en de beteekenis van het laatstgenoemde beginsel[1]), waarbij de slagboomen tusschen statica en dynamica wegvielen, en het beginsel van d'Alembert op de meest natuurlijke wijze voor den dag treedt, zonder dat, zooals tot dusverre, eene duistere en ingewikkelde beschouwing over doode of verloren krachten moet te hulp geroepen worden.

De werken van Gauss, Hamilton, Jacobi, Dirichlet, Cauchy en andere groote vernuften van den nieuwen tijd worden vervolgens besproken, en hun invloed op de ontwikkeling der wetenschap nagegaan; terwijl eindelijk het nieuwste op dit gebied in behandeling komt, namelijk de ontdekking van het mechanisch equivalent der warmte door Mayer en Joule, die in nauw verband staat met het

[1]) Zie o. a. zijne verhandeling: *„Théorie generale de l'équilibre et du mouvement des systèmes."*

tegenwoordig hoog verheven beginsel van het behoud van het arbeidsvermogen, dat niets anders is dan eene uitbreiding van het oude zoo veel en heftig bestreden theorema der levendige krachten. Hiermede zijn wij geheel op het gebied der werkzaamheid van onze tijdgenooten, en moet dus de geschiedenis een einde nemen. Eenige meer algemeene beschouwingen over de verhouding der mechanica tot de zuivere wiskunde aan de eene, en de empirische natuurwetenschappen aan de andere zijde, besluiten het werk, terwijl hierbij op nieuw de invloed der bespiegelende wijsbegeerte, vooral van de positieve, besproken wordt.

II.

Is het mij gelukt, in het voorgaande eene duidelijke schets van inhoud, omvang en beteekenis van het belangrijke werk van DÜHRING te geven, slechts de kennismaking met het boek zelf kan leeren, volgens welk eene voortreffelijke methode het is saamgesteld. Hoewel het over zaken handelt, die zoo nauw mogelijk met de zuivere wiskunde zijn verwant, komt toch in het geheele werk geene enkele formule, zelfs geene berekening of bloot wiskundige beschouwing met of zonder figuur voor. En toch is het den schrijver gelukt, duidelijk en volledig de verschillende theoriën weer te geven en te analyseeren, zonder aan hare wetenschappelijke waarde in het minst tekort te doen. Daarbij moet nog vermeld worden, dat de bronnen in oudere en nieuwere boeken, in breedé verhandelingen en korte opstellen zoo volledig worden opgegeven, dat men verbaasd staat, hoe het mogelijk is, dat zij allen bekend en beoefend zijn door een man, wiens eigenlijke gebied van studie, blijkens zijne vroegere geschriften, buiten de wiskundige wetenschappen ligt.

Het bovenstaand overzicht heeft betrekking op de eerste uitgave van DÜHRING's geschrift; nu blijft mij nog over, iets mee te deelen van de veranderingen en uitbreidingen, die de tweede eerst onlangs verschenen heeft ondergaan; doch het is niet wel mogelijk dit te doen zonder tevens eenige levensbijzonderheden te vermelden van den schrijver, wiens naam door zijne bijzondere verhouding tot de Berlijnsche universiteit en hare hoogleeraren in den laatsten tijd groote bekendheid heeft verkregen. In den strijd, waardoor zijn naam zoo ruchtbaar is geworden, wensch ik mij hier volstrekt geen partij te stellen; doch de kennisneming van de bijzonderheden, hoe betreurenswaard zij uit een wetenschappelijk oogpunt ook zijn mogen, is niet zonder

beteekenis, wanneer men met de inrichting en werking der Duitsche hoogescholen wenscht bekend te worden. Zoowel in de werken van onzen schrijver, waarvan zoo straks nog een paar zullen aangehaald worden, als in de door de filosofische faculteit der hoogeschool te Berlijn uitgegeven officiële *„Aktenstücke in der Angelegenheit des Privatdocenten Dr.* DÜHRING," vindt men de bronnen voor deze beruchte geschiedenis.

Verscheidene werken op het gebied der bespiegelende wijsbegeerte en sociale wetenschappen had onze schrijver reeds geleverd, voor hij tot de beantwoording der bovengemelde prijsvraag overging, die met zulk een gelukkigen uitslag werd bekroond. Het schijnt, dat die vorige werken nog al heftige tegenspraak hebben gevonden; althans in de voorrede van zijn prijsschrift merkt hij op, dat hij voor de eerste maal in zulk een wedstrijd is getreden, om te zien of zijne anonyme onderzoekingen op een zuiver wetenschappelijk gebied meer waardeering en rechtvaardiger beoordeeling zouden vinden, dan zijn naam tot dusverre in andere hem nader bestaande kringen gevonden heeft. Bij den schitterenden uitslag van deze poging is zulk eene verklaring waarlijk niet zonder beteekenis. Dat echter bij het ontwikkeld publiek zijn streven genoegzame waardeering vindt, blijkt voldoende uit het feit, dat bijna al zijne werken, hoewel op afgetrokken gebied thuis behoorende, zijn herdrukt. Een paar jaren na de uitgave van het bekroonde prijsschrift verscheen de tweede druk van zijne *„Kritische Geschichte der Nationalökonomie und des Socialismus"*; en hierin schijnt een uitval tegen een der Berlijnsche hoogleeraren WAGNER voor te komen, die tot een heftig couranten-geschrijf aanleiding gaf. Dit was de aanleiding voor de filosofische faculteit om, partij kiezende voor een harer medeleden, aan den Minister van openbaar onderwijs de verwijdering (Remotion) van den privaat-docent DÜHRING voor te dragen De Minister antwoordde, dat het gedrag van dezen zeker niet goed te keuren was, maar omdat de heer WAGNER van zijne zijde evenmin correct had gehandeld, moeilijk tot de verwijdering kon worden overgegaan, doch op grond van de wet aan den privaat-docent van wege de faculteit eene disciplinaire waarschuwing moest worden gegeven. Dit geschiedde dan ook op officieele wijze door den dekaan der faculteit in Maart 1875, met de bedreiging, dat bij herhaling van het misdrijf de verwijdering stellig zou uitgesproken worden.

De onvermoeide werkzaamheid van DÜHRING, die te meer is te bewonderen omdat de man blind is, en door de hulp van zijne

dochter op de hoogte wordt gehouden, gaf hem intusschen weer nieuwe werken in de pen, die tot geen geschil schijnen aanleiding gegeven te hebben; terwijl hij zijne lessen, die door een groot aantal studenten geheel vrijwillig werden bijgewoond, onverstoord voortzette. Doch in den loop van het laatst afgeloopen jaar kwamen een paar werken van hem uit, die den toorn der faculteit, en waarlijk niet ten onrechte, deed ontbranden, en tot vernieuwden heftigen strijd aanleiding gaf, die ditmaal voor goed den ondergang van DÜHRING veroorzaakte. Het eerste der genoemde werken is getiteld: *„der Weg zur höheren Berufsbildung der Frauen und die Lehrweise der Universitäten"*, waarin eenige scherpe uitvallen tegen de inrichting der Duitsche hoogescholen en in het bijzonder tegen de Berlijnsche voorkomen; het andere is de vernieuwde uitgave van het prijsschrift, waarover wij dus nu nog kort moeten spreken. omdat er bijzonderheden in voorkomen, die uit een zuiver wetenschappelijk oogpunt van groot belang zijn. De veranderingen bestaan, met ter zijde stelling van eenige zaken van ondergeschikt belang, uit eene verscherping van het oordeel over verschillende groote mannen, wier geschriften worden aangehaald, maar vooral uit eene veel sterker aanwijzing dan in de eerste uitgave van het doorloopend schadelijk karakter van den invloed aller metafische beschouwingen op de wis- en natuurkundige wetenschappen (zie het 5de hoofdstuk van de 3de afdeeling). Al wat van dien aard door verschillende wijsgeeren als DESCARTES, HOBBES, LOCKE, SPINOZA, LEIBNITZ en vooral door KANT is verricht en geschreven, vindt hier niets dan de scherpste veroordeeling. Zie hier een staaltje van zijne beschouwing over laatstgenoemden wijsgeer.

„Der eben bei HUME bezeichnete Vortheil ist bei KANT, der sonst von dem grossen Schotten Einiges gelernt hat und auch in der mechanischen Begriffsfassung hätte lernen können, nicht vorhanden, wohl aber das grade Gegentheil, nämlich eine metaphysische Verzerrung positiv feststehender Vorstellungen. In KANT's weitschweifiger Erstlingsschrift sind die metaphysischen Ungeheuerlichkeiten, die sich später etwas verhüllen, am handgreiflichsten..... Die Verbreitung des Newtonschen Systems regte KANT zu einer populären Schrift „Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels" an, in welcher die in die Anfänge der Griechischen Philosophie zurückreichende Annahme eines ursprünglich luftförmigen Zustandes der Welt in Verbindung mit unbestimmten Anziehungs- und Ballungsvorstellungen nach modernen Mustern einen im Ganzen erträglichen

im Einzelnen aber mit lauter Willkürlichkeiten versetzten Ausdruck erhielt."

Deze veroordeeling van alle speculatieve en metaphysische beschouwingen treft te meer, omdat zij niet afkomstig is van een zuiver wis- of natuurkundige, maar van een diepzinnig geleerde, die van huis uit een bespiegelend wijsgeer is.

Ook de laatste afdeeling, handelende over de ontdekkingen van onzen tijd, heeft eenige omwerking ondergaan; doch de bezwaren, die ik in dit opzicht tegen de eerste uitgave kenbaar maakte, zijn daarbij niet weggenomen. Onvolledig blijft de analyse van Poinsot's werken, en evenzoo de beschouwing over de ontdekking van het mechanisch warmte-equivalent en haar groote gevolgen. Doch het verband en de wederkeerige invloed van wiskunde, bespiegelende wijsbegeerte en natuurwetenschappen worden uitvoerig besproken en met groote scherpzinnigheid behandeld.

Het voornaamste echter, wat de nieuwe uitgave van de vorige onderscheidt, is het laatste gedeelte, dat geheel nieuw er aan is toegevoegd, en handelt over „das Studium der mathematisch mechanischen Wissenschaften und die Lehren der Geschichte." Eigenlijk is het niets minder dan eene kritische geschiedenis van de methode der wiskundige wetenschappen van af Euclides tot op onzen tijd; en verdient derhalve eene meer uitvoerige bespreking.

Hij begint met de leerwijze van Euclides, tot nog toe bijna uitsluitend bij het onderwijs in de elementaire meetkunde gebruikt, over boord te werpen; en noemt dit algemeene gebruik eene hindernis, die slechts bij bijzonder goeden aanleg niet schaadt, omdat de bekwamere leerling zich de stof eigen maakt naar gezichtspunten, volgens welke eene nader komen tot het natuurlijke denken en eene overeenkomstige omzetting der voorstellingen eenigermate plaats grijpt. Dat de vorming in rekenkunde en algebra zooveel meer vruchten draagt dan die in de gewone meetkunde, schrijft hij juist hieraan toe, dat de eerstgenoemden niet als de laatste van klassischen bodem tot ons zijn gekomen. Hij acht de klassische vorming voor wis- en natuurkundigen niet alleen overbodig, maar zelfs een hinderpaal, die hunne regelmatige ontwikkeling belemmert; de beoefening der nieuwere talen en van de moderne vakken van onderwijs in het algemeen noemt hij voor hen eene veel betere voorbereiding. De zuivere wiskunde heeft bij hem ook niet veel waarde als vormend element, maar ontleent hare groote beteekenis aan de mechanica en physica, waartoe zij den onmisbaren sleutel vormt. Alle bijzondere deelen der mathesis, die

hieraan niet dienstbaar kunnen gemaakt worden, zooals de hoogere getallenleer, hebben geene waarde; men kan ze best missen. Slechts deze methode zou in de gewone meetkunde waarde hebben, die even als in de algebra van trap tot trap opklimt, de ontwikkeling der waarheden regelmatig voortzet, zonder de kunstmatige afscheiding van stellingen en bewijzen, die den rustigen gang slechts verstoort. Wat men hierbij voornamelijk zou winnen, ware de heldere voorstelling, die bij de tegenwoordige methode zooveel te wenschen overlaat. De bepalingen zouden voornamelijk uit de wording en constructie ontleend zijn; dat is, zij zouden de vormen, die uit de veelvoudigheid der voorstellingen afgeleid en met een bijzonderen naam aangeduid moeten worden, werkelijk in de gedachten doen ontstaan, en zoo tegelijkertijd hare mogelijkheid klaar aan den dag brengen. Maar ook de meest samengestelde waarheden zouden, uit op zoodanige wijze verbonden bestanddeelen, zoo klaarblijkelijk te voorschijn treden, dat men geen spoor meer van dien dwang en kunstmatige verwringing zou bemerken, waarover reeds zoo menig helder hoofd juist in de meetkunde geklaagd heeft. De beruchte parallellen-theorie is hiervan een voorbeeld, daar zij bij de kunstmatige methode der ouden tot zooveel hoofdbreken aanleiding geeft, en bij eene natuurlijke opvatting zoo eenvoudig wordt verklaard.

Overgaande tot de zoogenaamde infinitesimaal-rekening, wijst hij aan, hoe reeds het invoeren van het begrip „oneindig klein” bij de elementaire meetkunde eene natuurlijke behoefte is; hoe men het ook langs allerlei kunstmatige wegen tracht te verloochenen en ontduiken, onmisbaar blijkt het o. a. bij de bepaling van den omtrek des cirkels, bij het zoeken van den inhoud des bols, kegels en cylinders. Daarbij wordt op die wijze de natuurlijke samenhang tusschen hoogere en lagere meetkunde hersteld, die thans door een diepe kloof onnoodig zijn gescheiden.

Vervolgens komt hij tot het begrip „beweging” als plaatsverandering, en wijst aan, hoe het ook van den beginne af aan moet ingevoerd worden, om de studie zooveel geleidelijker te maken; daar ook hier het elementaire gedeelte wordt verhelderd en vereenvoudigd, terwijl de overgang tot hoogere deelen weer zooveel gemakkelijker plaats grijpt. Later komt dan tot aanvulling de tijd als vierde afmeting in rekening; en zoo gaat men van het gebied der zuivere wiskunde tot dat van de mechanica zonder eenige afbreking over. Op die wijze kan men het geheele uitgestrekte gebied der wiskundige wetenschappen doorwandelen, zonder de hinderlijke stoornis te ondervinden,

dic thans bij het overgaan van het eene deel tot het andere bestaat, en zooveel schade brengt aan de regelmatige beoefening.

Dergelijke opmerkingen gelden voor rekenkunde en algebra, waar het begrip van voortdurende beweging uit de meetkunde moet vervangen worden door dat van veranderlijkheid in grootte; zoodat elke grootheid moet beschouwd worden als samengesteld uit een opeenhooping van zeer kleine deelen. Niet vroeg genoeg kon dit begrip ingevoerd worden; en hoe het in de geheele lagere en hoogere algebra wordt doorgevoerd, tracht de schrijver aan te wijzen.

Overgaande op het gebied der hoogere analyse komt hij op het voor hem zoo gevaarlijke terrein. Buitengemeen roemt hij de leerboeken en cursussen der Fransche geleerden, vooral van hen, die aan de polytechnische school te Parijs het eerst gearbeid hebben, zooals Monge en Lagrange, waarvan de goede invloed tot op de tegenwoordige leerboeken in dat land terugwerkt. De 19de eeuw is in dit opzicht slechts achteruit gegaan; haar ontbrak de geest der 18de eeuw met hare logisch ophelderende richting; want de legitimist en Jesuitenleeraar Cauchy, en de godsdienstig beperkte, op vorsten-bescherming en den titel van hofraad ijdele, metselaarszoon Gauss zijn waarlijk geene typen in den zin van de 18de eeuw. Doch ook de Fransche zijn in dat opzicht in onzen tijd sterk achteruit gegaan; de rekening met eindige verschillen, die zij bijna alle voorop stellen, brengt slechts verwarring, en voert tot ongerijmdheden door het geheele verdere gebied der analyse. Zoo doorloopt nu de schrijver het gebied der differentiaal- en integraalrekening en de leer der functien met de theorie van Lagrange als leiddraad.

Tot de geometrische analyse teruggekeerd, wijst hij op het ware begrip van de negatieve, en daarna van de imaginaire grootheden; hij veroordeelt op de scherpste wijze de theoriën, die in dit opzicht in den laatsten tijd zijn gegeven, en niet minder die van andere deelen der moderne algebra, zooals determinanten, covarianten enz. Doch tegenover de afdwalingen der analyse staat de voortreffelijkheid, waarmede de synthetische geometrie in eere is hersteld door mannen als Poncelet in Frankrijk en Steiner in Duitschland. Scherp wordt echter veroordeeld wat in dit opzicht door Plücker is verricht, wiens arbeid hier „Zusammengeschleppten Schutt jenes mathematischen Caliban" wordt genoemd; terwijl hij toch als de type van nog slechtere varianten op inheemschen bodem kan beschouwd worden. Eenmaal op dien weg vaart de schrijver met onverholen woede voort; Cauchy en Chasles in Frankrijk, Hesse en het geheele jongste professoren-

geslacht in Duitschland, worden op de scherpste wijze gegeeseld. Wij zullen dan ook dit gedeelte met stilzwijgen voorbijgaan; maar betreurenswaardig blijft het, dat de talentvolle schrijver zich hier blijkbaar door zijne drift en persoonlijke grieven laat verleiden, om op de meest onwaardige wijze te spreken over mannen als HELMHOLTZ, CLAUSIUS en KIRCHHOFF, die tot de grootste geleerden van onzen tijd behooren. Tot verontschuldiging van dien heftigen toon kan slechts aangevoerd worden, dat de schrijver herhaaldelijk is verongelijkt, daar hij in zijn ondergeschikten werkkring moest blijven, terwijl andere, met veel minder talent begaafd, tot de hoogste wetenschappelijke ambten opklommen. Ook zijn de heftige uitvallen van DÜHRING tegen tijd- en ambtgenooten volstrekt niet een op zich zelf staand feit te noemen; daar de geleerden, die aan zijne onbesuisde aanvallen zooveel ergernis nemen, zich bij hunne onderlinge twisten en dikwijls midden in geleerde verhandelingen aan hetzelfde euvel schuldig maken; men denke slechts aan den strijd over de electrische wetten tusschen HELMHOLTZ, WEBER, NEUMANN, ZÖLLNER en anderen.

Kort na het verschijnen van deze nieuwe uitgave werd de schrijver door de filosofische faculteit der Berlijnsche hoogeschool ter verantwoording geroepen van de beleedigende uitdrukkingen daarin voorkomende; en toen hij hieraan niet naar genoegen voldeed, maar zich beklaagde over de vervolging, die hij van den kant der hoogleeraren en niet minder van hunne vrouwen had te verduren, werd zijne verwijdering van de universiteit door den Minister van Onderwijs, op voordracht der faculteit, uitgesproken; waarbij hem van stonde af aan verboden werd eenige voorlezing meer aan de hoogeschool te houden. Kort daarna werd zijn voornaamste tegenstander Prof. HELMHOLTZ bij vrije keuze tot Rector der universiteit benoemd, en hield als zoodanig op 15 October van dit jaar eene inwijdingsrede „over de academische vrijheid der Duitsche Universiteiten", die hierin als boven die van alle andere landen staande wordt geroemd.

Het schandaal aan de Berlijnsche hoogeschool, waarvan Dr. DÜHRING het middelpunt was, zal ongetwijfeld nog lang in wetenschappelijke kringen besproken en verschillend beoordeeld worden; maar zelfs wanneer de tijd het reeds lang uit de herinnering heeft weggewischt, zal het bekroonde prijsschrift, dat wij hier bespraken, in zijne volle waarde erkend blijven als een onmisbare bron voor de geschiedenis der beginselen van de wiskundige wetenschappen tot op onzen tijd.

REGISTER, NAAR DE ONDERWERPEN GERANGSCHIKT, OP EENIGE WISKUNDIGE TIJDSCHRIFTEN.

ANALYTISCHE MEETKUNDE OP HET PLAT VLAK.

N. A. DE M. T. 16, p. 37, 38. Questions 1163 et 1164. Par M. *Pelissier.*

id. p. 421—424, 451—466, 496—507, 529—541. Mémoire sur les transformations du second ordre dans les figures planes. Par M. *E. Amigues.*

N. CORR. M. T. 2, p. 14—20. Identité de la transformation linéaire avec la transformation projective. Par M. *P. Mansion.*

id. p. 257—262. De l'application des systèmes de coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques. Par M. *E. Lucas.*

id. p. 306—312, 340—347. Note de Géométrie. Par M. *G. de Longchamps.*

GR. ARCH. B. 61, S. 359, 360. Sur une représentation des points imaginaires en géométrie plane. Par *P. Appell.*

J. V. CR. B. 83, S. 38—42. Ueber die Abbildung $x+yi=\sqrt[n]{X+Yi}$ und die lemniscatischen Coordinaten n^{ter} Ordnung. Von *Holzmüller.*

ANALYTISCHE MEETKUNDE IN DE RUIMTE.

N. A. DE M. T. 16, p. 5—18, 160—176, 193—211, 249—260, 289—302, 467—469, 508—521, 541—562. Théorie des indices. Par M. *Faure.*

id. p. 234, 235. Question 1220. Par M. *Laisant.*

N. CORR. M. T. 3, p. 91, 92. Question 201. Par M. *Even.*

id. p. 225—230. De l'application des systèmes de coordonnées tricirculaires et tétrasphériques à l'étude des figures anallagmatiques (suite). Par M. *E. Lucas.*

id. p. 299—306, 337—340. Aperçu de questions sur les faisceaux de surfaces de deuxième ordre. Par M. *Ph. Breton.*

GR. ARCH. B. 61, S. 438, 439. Allgemeinster Ausdruck der Richtungscosinus einer Geraden in rationaler Brüchen. Von *R. Hoppe.*

CL. M. ANN. B. 11, S. 347—378. Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfläche. Von *H. Schubert.*

id. B. 12, S. 202—221. Singularitäten des Complexes n^{ten} Grades. Von *H. Schubert.*

id. S. 403—418. Les fonctions métriques fondamentales dans un espace de plusieurs dimenuons et de courbure constante. Par M. *d'Ovidio.*

J. V. CR. B. 84, S. 242—258. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre. Von *G. Cantor.*

id. S. 273—283. Verwendung der Ausdehnungslehre für die allgemeine Theorie der Polaren und das Zusammenhang algebraischer Gebilde. Von *H. G. Grassmann.*

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

GR. ARCH. B. 60, S. 356—365. Construction der Reflex auf ebenen Spiegelflächen. Von *K. Köpl.*

id. B. 61, S. 337—343. Neue Methode zur Auflösung des Dreikants. Von *K. Klekler.*

BOL.

N. CORR. M. T. 3, p. 427, 428. Question 287. Par M. *J. Freson.*

GR. ARCH. B. 60, S. 100—105. Kugel von excentrischer Masse und centrischer Trägheit. Von *R. Hoppe.*

id. B. 61, S. 361—365. Ueber die Kugeln, welche die Flächen eines Tetraeders berühren. Von *L. Klug.*

CINEMATICA.

GR. ARCH. B. 61, S. 146—159. Zur Kinematik der Auges. Von *R. Hoppe.*

J. DE L. T. 3, p. 147—152. Sur la construction géométrique des pressions que supportent les divers éléments plans se croisant en un même point d'un corps, et sur celles des déformations qui se produisent autour d'un tel point. Par M. *J. Boussinery.*

CIRKEL.

N. A. DE M. T. 16, p. 188—190. Question 21. Par M. *H. Brocard.*

N. CORR. M. T. 3, p. 49, 50. Question 25. Par M. *H. van Aubel.*

id. p. 55, 56. Question 177. Par M. *J. Freson.*

id. p. 253, 254. Question 254. Par M. *V. Jamet.*

id. p. 347—349. Centre de gravité d'un arc de cercle. Par M. *Laisant.*

id. p. 356, 357. Question 107. Par M. *Laisant.*

id. p. 381—384. Note sur les cercles tangents à trois cercles donnés. Par M. *E. Dubois.*

GR. ARCH. B. 60, S. 78—87. Beziehungen zwischen Dreieck und Kreis. Von *E. Hain.*

id. S. 445. Radius des Kreises, der drei gegebene Kreise berührt. Von *C. J. Matthes.*

J. V. CR. B. 84, S. 259—263. Ueber die *Steiner*sche Verallgemeinerung des *Malfatti*schen Problems. Von *W. Godt.*

CONSTANTEN (MERKWAARDIGE).

N. A. DE M. T. 16, p. 157—160. Sur les théorèmes de Binet et de Staudt concernant les nombres de Bernoulli. Par M. *E. Lucas.*

N. CORR. M. T. 3, p. 69—73. Sur la généralisation de deux théorèmes dus à MM. Hermite et Catalan. Par M. *E. Lucas.*

id. p. 86, 87. Question 118. Par M. *J. Freson.*

id. p. 361, 362. Question 262. Par M. *J. Freson.*

id. p. 362. Question 263. Par M. *J. Freson.*

J. V. CR. B. 84, S. 267—269. Zur Theorie der *Bernoulli*schen Zahlen. Von *Stern.*

CONSTRUCTIE (MEETKUNDIGE).

SCHL. ZEITSCHR. B. 22, S. 339, 840. Näherungsmethode zur Construction eines regelmässigen Polygons von n Seiten und zur Theilung eines gegebenen Winkels in n gleiche Theile. Von *V. Schlegel.*

N. CORR. M. T. 3, p. 129—139, 177—186. Sur la production du mouvement rectiligne exact, au moyen de tiges articulées. Par M. *A. B. Kempe B. A.*, traduits de l'anglais par M. *P. Liguine.*

id. p. 204—208. Sur la géométrie de la règle. Par M. *de Coatpont.*

id. p. 269, 270. Position limite d'une série de points du plan. Par M. *H. Brocard.*

DETERMINANTEN.

N. ARCH. Dl. 3, blz. 84—89. Merkwaardige eigenschappen van eenen determinant van den derden graad. Door *D. B. Wisselink.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 22, S. 277—298. Beitrag zu den Grundlagen der Invariantentheorie. Von *W. Veltmann.*

N. A. DE M. T. 16, p. 372, 373. Sur une application des déterminants. Par M. *V. Jamet.*

N. CORR. M. T. 3, p. 141—144. Sur la multiplication des déterminants. Par M. *C. Le Paige.*

id. p. 247. Lettre de M. *Jamet.*

id. p. 275—277. Lettre de M. *Le Paige.*

J. V. CR. B. 83, S. 65—71. Ueber den Ausdruck, welcher im Fall gleicher Wurzeln an die Stelle der *Vandermonde*schen alternirenden Function tritt. Von *Franke.*

id. B. 84, S. 355—359. Sätze über Determinanten und Anwendung derselben zum Beweise der Sätze von *Pascal* und *Brianchon.* Von *Mertens.*

DIFFERENTIAAL-REKENING.

N. CORR. M. T. 3, p. 73—77. Sur la démonstration du théorème de Taylor. Par M. *Mister.*

id. p. 118, 119. Lettre de M. *Nieuwenglowski.*

id. p. 161, 162. Lettre de M. *Mister.*

id. p. 312—314. Un Commentateur du Marquis de l'Hospital. Par M. *Laisant.*

J. V. CR. B. 84, S. 64—69. Sur la formule de *Maclaurin.* Par *Ch. Hermite.*

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN.

N. ARCH. Dl. 3, blz. 1—20. Over de afzonderlijke integralen der differentiaalvergelijkingen van de eerste orde, met twee veranderlijken. Door *C. L. Landré.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 22, S. 100—125. Nachträge zu meinen Abhandlungen über Integration partieller Differentialgleichungen der ersten Ordnung. Von *A. Weiler.*

N. A. DE M. T. 16, p. 215—218. Sur quelques cas de séparation des variables dans l'équation $Mdx + Ndy = 0$. Par M. *C. Harkema.*

N. CORR. M. T. 3, p. 20, 21. Lettre de M. *Le Paige.*

id. p. 93, 94. Question 208. Par M. *E. C.*

id. p. 317—319. Lettre de M. *Le Paige.*

id. p. 322—326. Question 224. Par M. *Mantel.*

id. p. 364—366. Question 265.

GR. ARCH. B. 60, S. 1—12. Simultane Schwingungen zweier Magnete. Von *J. Obermann.*

GR. ARCH. B. 60, S. 113—117. Ueber die oscillatorischen Bewegungen einer Walze mit excentrischer Schwerpunktsachse. Von *C. Bender.*

id. S. 185—214. Ueber das Phaff'sche Problem. Von *Hamburger.*

CL. M. ANN. B. 11, S. 115—118. Ueber lineare Differentialgleichungen. Von *F. Klein.*

id. S. 194—198. On the theory of Partial Differential Equations. By *A. Cayley.*

id. S. 199—241. Ueber partielle Differentialgleichungen höhern Ordnung, die intermediare erste Integrale besitzen. Von *A. V. Backlund.*

id. S. 401—411. La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre. Par *F. Brioschi.*

id. S. 412—433. Ueber Systeme partielle Differentialgleichungen erster Ordnung. Von *A. V. Backlund.*

id. S. 464—557. Allgemeine Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (zweite Abhandlung). Von *S. Lie.*

id. B. 12, S. 123—131. Note über die Integration totaler Differentialgleichungen. Von *R. du Bois-Reymond.*

id. S. 132—142. Ueber den Multiplicator eines Jacobi'schen Systems. Von *A. Meyer.*

id. S. 167—179. Ueber lineare Differentialgleichungen. Von *F. Klein.*

J. DE L. T. 3, p. 5—20. Mémoire sur les équations du mouvement d'un système de corps. Par M. *E. Matthieu.*

id. p. 219—304. Mémoire sur la théorie des plaques élastiques planes. Par M. *M. Levy.*

J. V. CR. B. 83, S. 89—170. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen (Fortsetzung des B. 81). Von *L. W. Thomé.*

id. S. 184. Ueber einen das elastische Gleichgewicht betreffenden Satz. Von *H. Aron.*

id. B. 84, S. 89—215. Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique. Par M. *C. Jordan.*

id. S. 264—266. Ueber die Wurzeln der Fundamentalgleichung, die zu einem singulären Punkte einer linearen Differentialgleichung gehört. Von *Hamburger.*

id. S. 284—293. Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integrale verscheidener Differentialgleichungen. Von *Königsberger.*

BULL. MATTH. T. 1, p. 180—184. Sur les équations différentielles linéaires. Par M. *F. Klein.*

DIFFERENTIE-REKENING.

N. CORR. M. T. 2, p. 301, 302. Sur une équation aux différences finies. Par M. *C. Le Paige.*

id. T. 3, p. 45—47. Note sur une équation aux différences finies. Par M. *C. Le Paige.*

DRIEHOEKSMETING.

N. A. DE M. T. 16, p. 49—61. Sur les débuts de la trigonométrie. Par M. *Ch. Brisse.*

id. p. 527, 528. Question 1244. Par M. *J. Lapierre.*

N. CORR. M. T. 3, p. 65—69, 106—110, 187—192. Propriété du triangle. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 358, 359. Question 253. Par M. *J. Freson.*

GR. ARCH. B. 60, S. 369, 370. Propriété trigonométrique du triangle rectangle, avec application en Astronomie au calcul de l'anomalie vraie en valeur de l'anomalie excentrique. Par *G. Dostor.*

id. B. 61, S. 99—107. Ueber ein einfaches Winkelmessinstrument zum Gebrauche für die Schule. Von *F. W. Fischer.*

ELIMINATIE.

N. A. DE M. T. 16, p. 105—113. Sur l'élimination. Par M. *E. Rouché.*

N. CORR. M. T. 3, p. 56, 57. Question 190. Par M. *H. Brocard.*

CL. M. ANN. B. 11, S. 571—574. Zur Eliminationstheorie. Von *M. Nöther.*

id. B. 12, S. 476—480. Note über ein Eliminationsproblem. Von *H. Krey.*

BULL. MATH. T. 1, p. 54—64. Sur l'élimination entre deux équations algébriques à une inconnue. Par M. *G. Darboux.*

ELLIPTISCHE FUNCTIEN.

N. A. DE M. T. 16, p. 78—96, 211—215, 361—369, 385—406, 433—450, 481—495. Théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Par M. *H. Laurent.*

N. CORR. M. T. 3, p. 81—83. Lettre de M. *Ghysens.*

id. p. 241, 242. Sur la représentation géométrique des intégrales elliptiques. Par M. *E. C.*

GR. ARCH. B. 61, S. 321—323. Ueber die geometrische Darstellung elliptischer Functionen. Von *A. Strnad.*

CL. M. ANN. B. 11, S. 1—29. Zur Theorie der Jacobi'schen Thetafunctionen. Von *F. Herstowski.*

id. S. 567—570. Ueber einige elliptische Integrale. Von *A. Enneper.*

id. B. 12, S. 1—22. Algebraische Untersuchungen aus der Theorie der elliptischen Functionen. Von *M. Krause.*

id. S. 143—146. Note on the Theory of Elliptic Integrals. Von *A. Cayley.*

id. S. 369—374. On some formulae in Elliptic Integrals. Von *A. Cayley.*

id. S. 419—434. Ueber die Modulargleichungen der elliptischen Functionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. Von *M. Krause.*

J. V. CR. B. 83, S. 13—37. Sur quelques propriétés des intégrales des équations différentielles, auxquelles satisfont les modules de périodicité des intégrales elliptiques de deux premières espèces. Par M. *L. Fuchs.*

id. S. 175—179. Zur Theorie der elliptischen Functionen. Von *Frobenius* & *Stickelberger.*

id. S. 265—292. Schreiben über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen. Von *R. Dedekind.*

FUNCTIEN (THEORIE DER).

N. ARCH. Dl. 3, blz. 21—32. Iets over de „Théorie des fonctions de variables imaginaires, par M. Maximilien Marie." Door *D. Bierens de Haan.*

id. blz. 113—144. Theorie der functien van veranderlijke complexe getallen (slot). Door Dr. *G. A. Benthem Gzn.*

id. blz. 186—192. De periodiciteit der functien. Door Dr. *G. A. Benthem Gzn.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 22, S. 180—190. Ein auf die Einheitswurzeln bezugliches Theorem der Functionenlehre. Von *E. Schröder.*

N. A. DE M. T. 16, p. 113—116. Note sur les vraies valeurs des expressions de la forme $\infty : \infty$. Par M. *V. Rouquet.*

id. p. 315—318. Questions proposées par M. S. Realis. Par M. *Moreau.*

N. CORR. M. T. 3, p. 279, 280. Question 212. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 369—376, 401—407. Sur la théorie des fonctions numériques simplement périodiques. Par M. *E. Lucas.*

GR. ARCH. B. 61, S. 366—384. Eclaircissements sur une Note relative à la fonction log Γx. Par M. *Genocchi.*

CL. M. ANN. B. 11, S. 145—148. Zwei Sätze über Grenzwerthe von Functionen zweier Veränderlichen. Von *P. du Bois-Reymond.*

id. S. 149—167. Ueber die Paradoxen des Infinitärcalculs. Von *P. du Bois-Reymond.*

id. S. 168—193. Versuch einer neuen Entwicklung der Hamilton'schen Methode, genannt „Calculus of Quaternions." Von *G. Dillner.*

id. B. 12, S. 375—386. Der Ort der Hamilton'schen Quaternionen in der Ausdehnungslehre. Von *H. Grassmann.*

J. DE L. T. 3, p. 325—400. Applications mécaniques du calcul des quaternions. Par M. *Laisant.*

J. V. CR. B. 83, S. 185—209. Ueber ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variable, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte. Von *Hamburger.*

id. S. 220—233. Further investigations on the double $\wp$-functions. By *A. Cayley.*

id. S. 251—261. Beweis eines *Riemann*'schen Satzes. Von *F. E. Prym.*

id. B. 84, S. 80—84. Zur Theorie der Functionen. Von *L. Schendel.*

GEOMETRIA SITUS.

N. CORR. M. T. 3, p. 234—241, 263—268, 289—294. Théorie du solitaire. Par feu Dr. *Reiss*, traduit par M. *Ch. Ruchonnet.*

GR. ARCH. B. 60, Lit. Ber., S. 16—22. Recension von „Das Problem der magischen Systeme, von Dr. Th. Hugel." Von *S. Günther.*

GESCHIEDENIS.

SCHL. ZEITSCHR. B. 22, S. 203, 204. Aufruf zur Errichtung eines Standbildes fur Carl. Friedrich Gauss.

id. Hist. liter. Abth., S. 1—23. Graeko-indische Studien. Von *M. Cantor.*

id. id. S. 71. Zur Geschichte des Problems der Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. Von *H. Weber.*

id. S. 93—106. Ueber Arwed Walter's Untersuchungen über Molekularmechanik. Von *D. J. Korteweg.*

id. S. 106, 107. Ueber den Himmelsglobus des Archimedes. Von *F. Hultsch.*

id. S. 133—150. „I sei Cartelli di matematica disfida, da E. Giordani." Recension von *Cantor.*

id. Suppl. Hft., S. 1—100. Das Rechnen im 16 Jahrhundert. Von *Treutlein.*

id. S. 101—198. Die homocentrischen Sphären des Eudoxus, des Callippus, und des Aristoteles. Von *E. V. Schiaparelli*, übersetzt von *W. Horn.*

N. A. DE M. T. 16, p. 116—128. Notice sur la vie et les travaux de Victor-Amédée de Besgue. Par *J. Houel.*

id. p. 273—278. Lettre sur la tachymétrie. Par M. *Lagout.*

id. p. 373—376. Encore la tachymétrie. Par M. *C. Rey.*

N. CORR. M. T. 3, p. 158, 159. Sur les lettres de J. A. Lagrange à L. Euler.

id. p. 209, 210. Lettre de M. *V. van Tricht.*

BULL. MATH. T. 1, p. 116—124. Address by Prof. Adams, 1 Febr. 1876, on presenting the gold Medal of the Society to *M. Le Verrier.* Par M. *J. Bertrand.*

GETALLEN-LEER.

N. ARCH. Dl. 3, blz. 58, 59. Over de completatie van het repetendum bij de herleiding van gewone breuken tot tiendeelige. Door *A. J. M. Brogtrop.*

SCHL. ZEITSCHR. B. 3, S. 54—59. Ueber die Theilbarkeit der dekadischen Zahlen. Von *J. Hann.*

N. A. DE M. T. 16, p. 18—26. Sur les sommes des puissances semblables des nombres entiers. Par M. *E. Lucas.*

id. p. 190, 191. Question 291. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 272, 273. Formation d'un cube entier qui soit égal à la somme de quatre cubes entiers. Par M. *E. Rebout.*

id. p. 370—372. Sur les chiffres qui terminent les puissances des nombres entiers. Par M. *D. André.*

id. p. 429—432. Question 1180. Par M. *E. Lucas.*

N. CORR. M. T. 3, p. 22. Lettre de M. *Réalis.*

id. p. 47, 48. Sur le théorème de Stiefel. Par M. *E. Lucas.*

id. p. 55. Question 176. Par M. *H. van Aubel.*

id. p. 119, 120. Question 87. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 144. Sur le théorème de Nicomaque. Par M. *Gelin.*

id. p. 166. Question 77. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 166, 167. Question 78. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 167. Question 79- Par M. *H. Brocard.*

id. p. 167, 168. Question 86. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 169—171. Questions 217, 218. Par M. *Laisant.*

id. p. 247, 248. Lettre de M. *E. Lucas.*

id. p. 388—390. Questions 247 et 248. Par M. *H. Brocard.*

id. p. 411, 412. Note sur une question d'Arithmologie. Par M. *F. Proth.*

id. p. 413, 414. Lettre de M. *E. Lucas.*

GR. ARCH. B. 60, S. 353—355. Nombres entiers, dont le cube est égal à la somme de trois ou de quatre cubes entiers. Par M. *E. Rebout.*

CL. M. ANN. B. 12, S. 241—253. Bemerkungen zum analytischen Beweise des cubischen Reciprocitätsgesetzes. Von *V. Dantscher.*

J. V. CR. B. 84, S. 85—88. Tafeln für die dekadischen Endformen der Quadratzahlen. Von *Schady.*

id. S. 216—218. Verallgemeinerung einer *Jacobi*schen Formel. Von *Stern.*

id. S. 270—272. Auszug eines Schreibens an Hern *Stern* über die „Verallgemeinerung einer *Jacobi*schen Formel. Von *E. Lampe.*

BULL. MATH. p. 17—41, 69—92, 144—164. Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Par M. *R. Dedekind.*

PERIODICAL